

Educação de Jovens e Adultos: investigação sobre os processos de fatoração numérica e algébrica

LUIZ EDUARDO CORNELIO¹
OCSANA SÔNIA DANYLUK²
CARMEN HESSEL PEIXOTO GOMES³
MAGDA INÊS MOREIRA⁴

RESUMO

Na educação de Jovens e Adultos (EJA) do Ensino Médio, geralmente os estudantes encontram dificuldades na decomposição de um número em fatores, impedindo-os de identificar os múltiplos e de divisores de um número. O método de Fermat para fatorar números usando a diferença entre dois quadrados nos motivou a investigar os processos de fatoração em classes de EJA. O objetivo desta pesquisa é analisar a compreensão dos estudantes sobre fatoração numérica usando o ábaco, e sobre fatoração algébrica usando o método de Fermat. A pesquisa é de cunho essencialmente qualitativo e o método utilizado é o fenomenológico-hermenêutico. Os sujeitos da pesquisa têm idade entre 18 e 43 anos, sendo que os resultados parciais mostram que os estudantes da classe pesquisada desconheciam o significado de fatores. Entretanto, constata-se que os mais jovens conseguiram, sem dificuldades, realizar a decomposição de um número em fatores.

Palavras-chave: Educação de Jovens e Adultos, métodos de ensino, processos de fatoração, método sistemático de Fermat, ábaco.

¹ Acadêmico do Curso de Matemática - Licenciatura Plena/ UPF

³ Professora do Curso de Matemática - Licenciatura Plena/ UPF

² Professora do Curso de Matemática - Licenciatura Plena/ UPF

⁴ Professora do Curso de Matemática - Licenciatura Plena/ UPF

ABSTRACT

In the education of Youth and Adults (EJA) of high school, students often encounter difficulties in the decomposition of a number of factors, preventing them from identifying and dividing multiples of a number. The method for factors of Fermat numbers using the difference between two squares is motivated to investigate the process of factorization in classes of EJA. The objective of this research is to analyze the students' understanding of numerical factorization using the abacus and on algebraic factorization using the method of Fermat. The research is mainly qualitative in nature and the method is the phenomenological-hermeneutic. The research subjects are aged between 18 and 43 years, and the partial results show that students know the class investigated the significance of factors. However, it appears that younger people have, without difficulty, perform the decomposition of a number of factors.

Key words: *Adult and youth education, teaching methods, processes factorization, systematic method of Fermat; Abacus.*

INTRODUÇÃO

Quando se fala em fatoração numérica ao estudante da 5ª série do ensino fundamental, normalmente não conseguimos remetê-lo à situação de quando ele aprendeu a operação de multiplicação. Desse modo, para muitos deles o significado de fatoração parece desconhecido e, por consequência, o significado da palavra fator lhes é estranho e, ainda, que os números primos causam confusão. Caso essas relações não sejam realizadas fica a impressão de que aquilo que aprenderam no passado não importa. No entanto, essa discussão é necessária, pois, do contrário, muitos conceitos são abandonados e esquecidos, causando assim grandes prejuízos à aprendizagem matemática.

Nas primeiras séries do ensino de matemática os estudantes aprendem o que é fator. Quando aprendem a “tabuada”, que continua sendo “tabuada na cabeça dos estudantes de muitas classes escolares”, os termos da operação são multiplicados, ou seja, o multiplicando e o multiplicador, são denominados fatores. Na maioria das vezes, no entanto, não é levado em conta nem pelo professor e nem pelo

estudante a importância dos termos da operação realizada; ou seja, não é ressaltada a linguagem matemática, ficando assim os termos multiplicando, multiplicador ou fatores sem sentido e significado para o estudante.

Desse modo, a linguagem matemática, bem como a compreensão do tema ficam relegados ao esquecimento. Por outro lado, o modo como muitas vezes é ensinado ao estudante também faz com que este não relacione o ensinamento a outro que virá mais tarde na construção da matemática. Por isso, entendemos que os jovens e os adultos, os sujeitos de nossa pesquisa, tiveram dificuldade em responder o que é fator, não compreendendo que fatorar um número é encontrar uma multiplicação de números da qual resulte o número a ser fatorado. Para nós professores de matemática é simples: $50 = 25 \times 2$; $144 = 12 \times 6 \times 2$ ou então, que 144 é o mesmo que:

a) 12^2 ou seja 12×12

Ou ainda:

b) $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^4 \times 3^2$

Em “b” temos fatores primos que mostram a decomposição multiplicativa de 144.

Para Rodrigues Neto (2009, p.1), “a fatoração é um recurso usado para auxiliar e estudar melhor os números com o objetivo de aperfeiçoar o cálculo”. Dessa forma, ao invés de termos um conteúdo onde os estudantes não vêem sentidos e nem significado, podemos transformar em nossas salas de aula a fatoração num conhecimento fácil e divertido, sendo aprendido com significado e tendo aplicações em vários outros assuntos matemáticos. Estes são elos necessários para que os estudantes percebam o significado dos conteúdos que estão aprendendo.

Ao fatorar um número qualquer, geralmente, o estudante não chega a perceber que está realizando o exercício de transformar um número diferente de zero, em uma operação de multiplicação, com pelo menos dois fatores. Em palavras simples, o estudante poderia lembrar a fatoração, que vem da multiplicação e vem de transformação de números em fatores.

Quando bem compreendido pode ser um excelente recurso mental, ou de jogo de cálculo mental. Segundo Rodrigues Neto (2009, p.1): “se os números não forem primos poderão ser transformados em multiplicação de outros dois números, permitindo a construção de um jogo de cálculo mental”.

Diante do que estamos expondo ficam as indagações: Porque nossos estudantes, desde a segunda série do ensino infantil e após na sexta e sétima séries do ensino fundamental e, ainda, no ensino médio e na educação de jovens e adultos, não conseguem lembrar, ou melhor, construir esse conhecimento? Por que não identificam que fatorar é transformar números em multiplicação? Por que esquecem que fatorar um número é escrevê-lo na forma de multiplicação ou potenciação, na condi-

ção de que os fatores ou as bases sejam números primos?

Dessa forma, esse método nos motivou a investigar os processos de fatoração em classes de EJA, e assim nossa questão norteadora inicial foi: estudantes da EJA conseguem compreender a fatoração de números ímpares usando o ábaco e o método sistemático de Fermat?

A motivação inicial da pesquisa originou-se de uma proposta de trabalho realizada na disciplina de Metodologia do Ensino da Matemática, na qual os alunos foram instigados a buscar diferentes metodologias para a prática de ensino. Os resultados da proposta em sala de aula foram positivos, levando-nos à criação deste projeto de pesquisa.

A pesquisa, portanto, tem por objetivo analisar a compreensão dos estudantes de EJA sobre fatoração numérica usando o ábaco, e sobre fatoração algébrica usando o Teorema de Fermat.

Sabe-se que na Educação de Jovens e Adultos (EJA) do Ensino Fundamental e Médio os estudantes geralmente encontram dificuldades na decomposição de um número em fatores, talvez por não compreenderem tanto o significado da palavra “fatorar” quanto os algoritmos usados para o processo de fatoração. Disto decorre a não identificação de múltiplos e divisores de um número e, conseqüentemente, dificuldades para operar com a multiplicação. As dificuldades são ainda maiores à medida que avançam nas séries e começam os estudos da álgebra, onde é muito forte a presença da linguagem matemática que, sendo simbólica, se torna subjetiva.

É comum a apresentação inadequada da linguagem matemática em sala de aula, quando o professor usa, essencialmente, o uso de símbolos e termos

técnicos específicos da área sem preocupar-se em trabalhar a compreensão dos mesmos. Deixando de clarear os seus significados, consegue um efeito contrário: dificulta o processo de aprendizagem em matemática. Assim, não é fácil compreender os processos de fatoração de expressões algébricas.

Na Educação de Jovens e Adultos, mais do que em outras modalidades de ensino, os conhecimentos já trazidos pelos estudantes costumam ser diversificados e, em alguns casos, encarados, por equívoco, como obstáculos à aprendizagem. Toma-se com isso que, o ponto inicial para a construção dos novos conhecimentos matemáticos parte dos conhecimentos já adquiridos pelos estudantes.

A CURIOSIDADE DE FERMAT E OS NÚMEROS PRIMOS

Fermat, por volta de 1637, criou uma equação semelhante ao Teorema de Pitágoras, que por sua vez não tinha solução. No lugar de considerar a equação de Pitágoras $x^2 + y^2 = z^2$, Fermat modificava as potências da equação, não obtendo uma solução para qualquer número inteiro. Assim, ele alterou ainda mais a equação, trocando as potências para números maiores que três, constatando que em parte alguma do infinito universo dos números existia um trio de números que se encaixassem perfeitamente em sua equação:

$x^n + y^n = z^n$, onde n representa números inteiros positivos maiores ou iguais a três.

Fermat, que afirmava ter a demonstração para este resultado, acabou morrendo sem divulgar sua solução. Este problema ficou conhecido como “O

Ultimo Teorema de Fermat”, ficando em aberto por mais de 350 anos. Ao longo destes anos, muitos matemáticos dedicaram suas carreiras à tentativa de provar este teorema, sendo que o matemático Andrew Wiles conseguiu prová-lo em 1995.

Estudando a história do Ultimo Teorema de Fermat, encontramos um método sistemático baseado na procura de números x e y tais que:

$N = x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$, sendo N o número a ser fatorado.

Todos os números primos podem ser encaixados em duas categorias: aquelas que são iguais a $4n + 1$ e aqueles que são iguais a $4n - 1$, onde n é igual algum número. Para Fermat isso era mais uma de suas demonstrações secretas, sendo que Euler, um dos maiores matemáticos do século XVIII, foi desafiado a reconstruir essa demonstração. Após sete anos de trabalho, em 1749, quase um século após a morte de Fermat, Euler obteve sucesso provando o teorema de Fermat para os números primos. Podemos considerar que, a partir da curiosidade de Fermat, outros matemáticos tiveram despertada a necessidade de gerar a construção dos números primos.

Pierre de Fermat nasceu em 20 de agosto de 1601 na cidade de Beceumont de Lamagne na França. Seu pai era um rico mercador de peles e desse modo Fermat pode receber uma educação privilegiada no monastério franciscano de Grandselve, graduando-se, posteriormente, em Direito pela Universidade de Toulouse (Singh, 2005, p.55). É curioso afirmar que enquanto jovem e mesmo após adulto Fermat não foi um matemático, o fato é que ele gostava de resolver exercícios matemáticos. Não há registro algum de que, quando jovem, mostrasse qualquer talento para a matemática.

A profissão de Fermat, na verdade, foi de ser-

vidor público, sendo que em 1631 foi nomeado conselheiro na Câmara de Requerimentos, na qual prestaria serviços ao juiz, desenvolvendo todas as suas atribuições de modo eficiente. Com o fato de chamar a atenção para si mesmo, pois não tinha grandes ambições políticas, evitou disputas no parlamento. Dedicava todas as suas energias, nas horas vagas, à matemática, que era seu hobby.

No século em que Fermat tinha como profissão a função pública e amador pela matemática, os matemáticos não eram respeitados e não tinha prestígio. A única instituição que encorajava o estudo de matemática na Europa era a Universidade de Oxford. Galileu buscou um professor particular. Já Pascal, Beamgrand e o padre Marin Mersenne formavam um grupo que conseguiu estudar, sendo esse último o responsável por avanços nessa ciência.

Quando o padre Mersenne chegou a Paris lutou contra a questão do sigilo na matemática, ou seja, tentou encorajar os matemáticos a trocaram idéias uns com os outros. Apesar dos esforços do padre Mersenne, Fermat se recusava a revelar suas demonstrações e Descartes acabou a amizade com o padre. Porém isso não fez com que o padre desistisse de continuar divulgando as últimas descobertas pelo exterior.

Apesar dos esforços do padre Mersenne, a publicação e o reconhecimento público nada significaram para Fermat. No decorrer da história é possível verificar que:

O gênio tímido e retraído tinha um toque travesso, o qual, combinado com o sigilo, levava-o a comunicar-se com outros matemáticos unicamente para ganhar deles. Fermat escrevia contas enunciando seu mais recente teorema, sem fornecer a demonstração (SINGH, 2005, p.58)

Sendo assim, muitos matemáticos viam Fermat como amador, brincalhão, Descartes o chamou de “fanfarrão” e John Walluis se referia a ele como “aquele maldito francês”. Fermat parecia se divertir com a matemática e com os matemáticos.

Fermat dedicou-se à aritmética devido o contato com livros sobre a teoria dos números. Um deles apresentava cerca de mil problemas e soluções; conhecimentos obtidos por Pitágoras e Euclides.

Relata Sing (2005, p76) que Fermat, ao resolver os problemas de Diofante:

[...] limitava-se a escrever o que achava necessário para convencer a si mesmo de que tinha uma solução [...] não se importava em registrar o resto da demonstração. Frequentemente atirava suas anotações no lixo e passava para o problema seguinte.

MATERIAL E MÉTODOS

Esta pesquisa tem cunho essencialmente qualitativo e o método escolhido é o fenomenológico-hermenêutico. Percebemos que esse aporte metodológico fornece elementos substanciosos para um pensar rigoroso que interage com a subjetividade humana presente no processo de educação. Pereira (2002, p.34) descreve que:

O pesquisador põe-se frente ao fenômeno com um olhar hermenêutico, um olhar que busca não se ater a uma interpretação da estrutura textual do discurso emitido por aquele ser, o qual vivenciou ou vivencia o fenômeno, mas avança na tentativa de encontrar o significado do discurso no próprio universo de onde este surgiu, confrontando esse significado com suas próprias vivências,

à luz do que também é seu real vivido, trazendo, para isso elementos de sua história e tradição.

Dessa forma, elegemos a abordagem fenomenológica-hermenêutica para esta pesquisa, partindo daquilo que os estudantes sabem e de como eles compreendem os conteúdos, para levá-los ao conhecimento formal. A observação do fenômeno foi feita em uma escola de ensino fundamental de EJA, onde estudantes e professores estavam em atividades de ensino e aprendizagem. Os encontros foram gravados e, posteriormente foram transcritos, na íntegra, servindo de material de análise. Desta atividade surgiram as unidades de significado e as categorias abertas que nos levaram às considerações finais da pesquisa.

Para a coleta dos dados utilizamos materiais elaborados pelo grupo de pesquisadores como as fichas de trabalho, o ábaco e argolas de plástico para fazer a representação dos números a serem fatorados, além dos materiais de uso diário que se encontram na sala de aula. Os sujeitos da pesquisa tinham idade que variavam entre 18 e 43 anos. Foram realizados quatro encontros semanais no Instituto Estadual de Educação Cardeal Arcoverde, em Passo Fundo (RS), numa turma de EJA do primeiro ano do Ensino Médio, no 2º semestre de 2008. Registramos todos os encontros, com reflexões diárias, e as descrições e escritas dos estudantes servirão para análise e interpretação da pesquisa.

Procedimentos:

- Fatorar um número impar não primo usando argolas e o ábaco.

Ex: Vamos encontrar os fatores do número 33. Para fatorar este número é preciso distribuir as argolas da esquerda para direita começando com uma argola no primeiro lugar, adicionando duas a mais nos lugares posteriores assim como mostra a Figura 1, que elaboramos para o projeto:

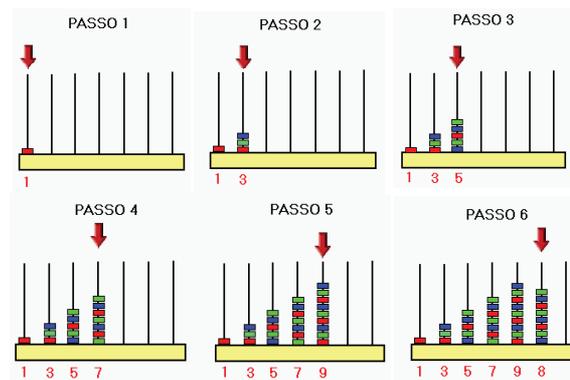


Figura 1 - Demonstração do método de fatoração no ábaco.

- Podemos observar na Figura 1 que o sexto lugar do ábaco deveria conter onze argolas ao invés de oito, por isso devemos completá-lo, remanejando as três primeiras argolas do primeiro e segundo lugar, como podemos ver na Figura 2.

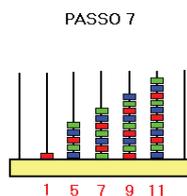


Figura 2 - Demonstração do método de fatoração no ábaco (Passo 7).

- Agora retiramos as argolas dos três primeiros lugares seguindo a mesma idéia de antes (Figura 3).

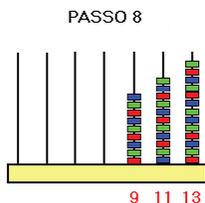


Figura 3 - Demonstração do método de fatoração no ábaco (Passo 8).

- Logo encontramos uma configuração onde a quantidade de argolas no lugar central do ábaco corresponde a um dos fatores e o número de lugares com argolas sendo o outro fator. Dessa forma temos: 11 argolas no elemento central, e 3 lugares contendo argolas. Portanto $33 = 11 \times 3$

Esses procedimentos foram realizados com números de, no máximo 2 algarismos. Para fatorar números com mais de dois algarismos os alunos utilizarão o método sistemático de Fermat.

A idéia central do método de Fermat é começar com x igual ao menor inteiro maior ou igual a \sqrt{N} e calcular $x^2 - N$. Se o resultado for um quadrado perfeito, o problema está resolvido. Caso contrário repete-se o processo, sucessivamente, para os números $x+1, x+2, \dots$, até encontrar um quadrado perfeito, conforme o exemplo da Tabela 1.

Tabela 1 - Demonstração do método de Fermat para o número 407.

$$N = 407 \Rightarrow \sqrt{N} = 20, \dots \Rightarrow$$

x	$x^2 - N$
21	$441 - 407 = 34$ (não é quadrado perfeito)
22	$484 - 407 = 77$ (não é quadrado perfeito)
23	$529 - 407 = 122$ (não é quadrado perfeito)
24	$576 - 407 = 169 = 13^2$

$$\text{Então, } 407 = 24^2 - 13^2 = (24 + 13) \cdot (24 - 13) = 37 \cdot 11$$

RESULTADOS

Percebemos, inicialmente, que os estudantes do 1º ano do Ensino Médio de EJA desconheciam o significado de fatores. Usavam os termos “divisão”, “separação”, “multiplicação” e até “aperfeiçoamento”. Os mais jovens, no entanto, conseguiram realizar as tarefas sem dificuldades. A maioria dos estudantes decompõe os números tanto no ábaco quanto na escrita, sem anotar as regras do processo de fatoração numérica.

Ao trabalhar com o ábaco e as argolas para decompor os números sugeridos, como o 15, o 21, e o 33 em fatores, os estudantes realizaram as tarefas com facilidade, o que os instigou a realizar a fatoração de números com mais de três ordens, sendo que no ábaco isso seria inviável. Partindo dessa questão levantada pelos estudantes, podemos afirmar a existência de um método sistemático de fatoração de números ímpares, sendo este método utilizado por Fermat para fatorar o número 100895598169, desafio proposto pelo matemático Mersenne, em 1643. A fatoração a partir deste método sistemático será trabalhada no próximo semestre.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Fermat não foi um matemático, o que ocorreu é que ele gostava de resolver exercícios matemáticos. De certo modo, podemos conjecturar que ele, o grande admirador dos números, realmente poderia ter contribuído muito mais com a matemática e com os matemáticos. Podemos também pensar que a ele não importava registrar suas descobertas e deixá-las para outras gerações ou matemáticos,

pois talvez ele apenas se divertisse como se estivesse fazendo “palavras cruzadas”.

A investigação mostrou que o método de fatoração a partir do ábaco pode contribuir para a compreensão do significado de “fatoração” e que, em classes de EJA, é importante a utilização de estratégias metodológicas mais dinâmicas que propiciem a construção de significados.

Ao considerarmos as dimensões curriculares para uma formação matemática na Educação de Jovens e Adultos, não se pode pensar em um processo de ensino-aprendizagem da matemática fora do contexto cultural, declarando-a como absoluta, abstrata e universal. Essa visão seria a principal razão para a alienação e os fracassos da maioria dos estudantes nessa disciplina, considerando-se jovens e adultos que já abandonaram a escola muitas vezes, por haverem nela fracassado.

Na continuidade do trabalho, investigaremos as compreensões que os estudantes conseguirão obter a respeito das expressões algébricas usando o método sistemático de Fermat.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos à Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Cardeal Arcoverde, em

especial, aos alunos da turma de EJA no qual foi aplicado o projeto; e à equipe diretiva da escola, que possibilitou tal experiência.

REFERÊNCIAS

CRUSIUS, M. F.; DANYLUK, O.; GOMES, C.H.P. **Sistema de numeração e operação em diversas bases**. Passo Fundo: Gráfica Editora UPF, [s.d.].

DANYLUK, O.S. (Org.). **Educação de adultos: ampliando horizontes de conhecimento**. Porto Alegre: Editora Sulina, 2001.

PEREIRA, L.H.F. **Teorema de Pitágoras: lembranças e desencontros na matemática**. Passo Fundo: Editora UPF, 2002.

RODRIGUES NETO, A. **Fatoração: transformando os números em multiplicação**. Disponível em: <<http://educação.uol.com.br/matematica/fatoracao.jhtm>> Acesso em fevereiro de 2009.

SAMPAIO, F.A. **Revista do Professor de Matemática**. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, 2004.

SINGH, S. **O Último Teorema de Fermat**. 11.ed. Rio de Janeiro: Record, 2005.