ISSN: 2178-7727
DOI: 10.17648/acta.scientiae.7363

Conocimiento especializado del profesor de matemáticas para enseñar a través de la modelación utilizando las TIC

Ivan Andrés Padilla Escorcia [a]
Jenny Patricia Acevedo-Rincón [b]
Miguel Angel Montes [c]

[a] Universidad del Atlántico, facultad de Ciencias de la Educación, Barranquilla, Colombia.
[b] Universidad Industrial de Santander, Escuela de Educación, Bucaramanga, Colombia.
[c] Universidad de Huelva, Facultad de Educación, Huelva, España.

Recebido para publicação 31 ago 2022. Aceito após revisão 9 nov. 2022
Editor designado: Claudia Lisete Oliveira Groenwald

RESUMEN

Antecedentes: el estudio del conocimiento del profesor de matemáticas ha centrado la atención en diferenciar a los licenciados en matemáticas de otro tipo de profesionales que tienen conocimiento del área, de manera que se puedan establecer características específicas que identifiquen al profesional licenciado para la enseñanza de las matemáticas. **Objetivos:** caracterizar el conocimiento especializado del profesor que incorpora las tecnologías de la información y comunicación (TIC) en la enseñanza de las matemáticas utilizando la modelación. **Diseño:** investigación de carácter cualitativo basada en un estudio de caso de tipo instrumental. **Contexto y participantes:** el estudio es realizado en un curso de Educación básica secundaria, con un profesor con la formación y la experiencia en la enseñanza de las matemáticas con recursos tecnológicos. **Recopilación y análisis de datos:** Los análisis se enfocaron en tres subdominios del modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas, a saber: conocimiento de los temas, conocimiento de las prácticas matemáticas y conocimiento de la enseñanza de las matemáticas, mediante la adaptación de indicadores a las categorías de conocimiento de estos subdominios, integrados con aspectos de la modelación. **Resultados:** Se encontraron las relaciones que surgen entre categorías de los subdominios y que son evidencia de la necesidad que el profesor que enseña matemáticas, conozca en profundidad su disciplina y la relacione con su conocimiento didáctico-pedagógico para poder desarrollar procesos de modelación matemática usando las TIC. **Conclusiones:** Se concluyó que la construcción de indicadores de conocimiento del KoT, KPM y KMT permitió comprender e interpretar el conocimiento especializado del profesor al enseñar cónicas, y en particular la

Autor para correspondencia: Jenny Patricia Acevedo-Rincón. Email: jepaceri@uis.edu.co

circunferencia, mediante modelación matemática con el software especializado GeoGebra.
Palabras claves: modelación; conocimiento especializado; MTSK; conocimiento de las matemáticas, enseñanza de las matemáticas**.**

Conhecimento especializado do professor de matemática para ensinar por meio de modelagem usando TIC

RESUMO

Antecedentes: O estudo dos conhecimentos dos professores de matemática centrou-se na diferenciação dos licenciados em matemática de outros tipos de profissionais que têm conhecimentos da área, de modo a que possam ser estabelecidas características específicas que identifiquem o licenciado profissional para o ensino da matemática. **Objetivos:** caracterizar o conhecimento especializado do professor que incorpora tecnologias de informação e comunicação (TIC) no ensino de matemática por meio de modelagem. **Desenho:** de natureza qualitativa com desenho de estudo de caso do tipo instrumental. **Contexto e participantes**: o estudo é realizado numa turma do ensino secundário, com um professor formado e experiente no ensino de matemática com recursos tecnológicos. **Coleta e análise de dados:** As análises focaram em três subdomínios do modelo de Conhecimento Especializado do Professor de Matemática, a saber: conhecimento de tópicos, conhecimento de práticas matemáticas e conhecimento de ensino de matemática, por meio da adaptação de indicadores às categorias de conhecimento desses subdomínios, integrados com Aspectos da modelagem. **Resultados:** Foram encontradas as relações que surgem entre as categorias dos subdomínios e que são evidências de que é necessário que o professor que ensina matemática conheça a fundo sua disciplina e a relacione com seu conhecimento didático-pedagógico para desenvolver processos de modelagem matemática utilizando TIC. **Conclusões:** Concluiu-se que a construção de indicadores de conhecimento do KoT, KPM e KMT permitiu compreender e interpretar o conhecimento especializado do professor no ensino de cónicas, e em particular a circunferência, através da modelação matemática com o software especializado GeoGebra.
Palavras-chave: modelagem; conhecimento especializado; MTSK; conhecimentos de matemática; ensino de matemática

INTRODUCCIÓN

Diversos investigadores han hecho esfuerzos por evidenciar y caracterizar la profesionalización del profesor de matemáticas, de manera que existan características puntales que los hagan diferenciar de cualquier profesional con conocimiento disciplinar de las matemáticas, como lo son: los matemáticos, físicos, estadísticos, ingenieros, contadores, entre otros. Es así como los trabajos de Shulman (1986), Fennema y Franke (1992), Rowland et al. (2005), Ponte (1992) y Ball et al. (2008), sirvieron como fundamento para la conceptualización del modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas -MTSK- (Carrillo et al., 2018). Este modelo aborda elementos de conocimiento tanto disciplinares como de tipo didáctico ligados a un contenido específico de las matemáticas y con los cuales debería contar cualquier profesor que enseña matemáticas, independiente al nivel de escolaridad en el que se encuentre.

En Colombia, país en el cual se llevó a cabo esta investigación, desde el año 2002 la docencia de matemáticas es desarrollada por profesionales que no necesariamente cuentan con el título de licenciado en matemáticas. Esta situación fue validada por el Ministerio de Educación Nacional en Colombia (Gobierno de Colombia-MEN, 2002) y ha sido contemporánea a la implementación del programa del Ministerio de Tecnologías de la Información y Comunicación (Min-TIC) 'computadores para educar' (Gobierno de Colombia-MinTIC, 2016), cuya idea está basada en la implementación de computadores en las escuelas colombianas de forma complementaria a la formación de profesores en competencias sobre las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC), con el objetivo de mejorar la calidad educativa. Sin embargo, los resultados en pruebas estandarizadas como por ejemplo el programa para la evaluación internacional de alumnos (PISA) en el informe presentado por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE) en el caso de matemáticas y lenguaje, muestran que los países que más dinero y recursos TIC han implementado en el contexto educativo no han obtenido buenos resultados a largo plazo (OCDE, 2019).

De este modo, la necesidad de formación del profesorado en el componente didáctico-pedagógico lleva a pensar en la necesidad de que en las escuelas colombianas los profesores con formación disciplinar y en pedagogía, sean los encargados de enseñar las matemáticas (Padilla-Escorcia y Acevedo-Rincón, 2022). Así se podría dar una mayor importancia a la profesión docente, mediante la selección de un perfil del profesor que enseña matemáticas, con características en enseñanza del área, pedagogía y didáctica, que no tiene otro profesional afín a las matemáticas. El conocimiento que tiene un profesional de estas características tiene especificidades concretas respecto de las matemáticas, lo que le permite profundizar en el posible uso de las TIC para la enseñanza de las matemáticas, con sentido didáctico-pedagógico, debido a que será capaz de usar los recursos tecnológicos como medios para llevar a cabo la enseñanza de los contenidos de las matemáticas de una manera más interactiva, práctica y en dónde se puedan evidenciar más competencias matemáticas, como el caso de la modelación (Padilla-Escorcia y Acevedo-Rincón, 2020 Padilla-Escorcia, y Acevedo Rincón, 2021;Padilla-Escorcia, 2022)

En un estudio previo (Padilla-Escorcia, 2020) se plantea si los profesores de matemáticas colombianos están preparados para enseñar los contenidos matemáticos que supongan al estudiante un alto grado de abstracción a través de las TIC, especialmente en la modelación, la cual representa un lugar relevante dentro de las agendas de investigación a nivel internacional, debido al interés que genera la forma en cómo el profesorado implementa esta competencia en la enseñanza (Verschaffel & De corte, 1997; Villa-Ochoa, 2015; Granados-Ortiz & Padilla-Escorcia, 2021).

En diversos trabajos se plantea que, mediante la inserción de herramientas tecnológicas es posible hacer visible la competencia de modelación, a través del uso de diferentes representaciones de la matemática, como los objetos, el análisis de modelos matemáticos y los gráficos algebraicos que se vinculan a la realidad a través de entornos virtuales (Villa-Ochoa, 2007; Villa-Ochoa & Ruiz, 2009; Villa-Ochoa, González & Carmona, 2018; Molina-Toro, Rendón-Mesa, & Villa-Ochoa, 2019).

En ese orden de ideas, esta investigación busca caracterizar el conocimiento especializado del profesor que incorpora las TIC en la enseñanza de las matemáticas utilizando la modelación. Esto, debido a que la mayoría de los estudios que han sido realizados alrededor del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, han estado enfocados en explorar los conocimientos matemáticos y de tipo didáctico-pedagógico, que requiere un profesor para la enseñanza de un contenido de educación básica primaria, secundaria e incluso educación superior. Sin embargo, no se habían estudiado aspectos ligados al conocimiento necesario para enseñar un contenido de matemáticas a través de la tecnología. Por lo tanto, en este artículo de investigación se hace una aproximación desde el modelo MTSK, *Mathematics Teacher Specialised Knowledge* (Carrillo et al., 2018) y se formula la siguiente pregunta de investigación: ¿cuáles son las características del conocimiento especializado del profesor que incorpora las TIC en la enseñanza de las matemáticas utilizando la modelación?

De esta forma, se muestran los fundamentos teóricos del estudio, centrados en MTSK como modelo de análisis del conocimiento profesional del profesor de matemáticas, y la modelación en educación matemática. Posteriormente se describe el diseño metodológico del estudio desarrollado y la categorización a partir de los indicadores del conocimiento de los tópicos

(*Knowledge of Topics*, KoT), del conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (*Knowledge of Mathematics Teaching*, KMT) y, del conocimiento de las prácticas matemáticas (*Knowledge of Practice of Mathematics,* KPM), que contribuyen a los análisis desarrollados en el posterior apartado. Finalmente, se muestran los resultados y las conclusiones de este artículo.

MARCO TEÓRICO DEL MTSK

Desde los años ochenta, el conocimiento del profesor de matemáticas ha sido objeto de estudio, discusión, análisis y evaluación desde el ámbito de la investigación. Así, trabajos como el de Ball, Thames y Phelps (2008), Rowland et al (2005), o Godino (2009), han profundizado en los componentes de dicho conocimiento desde diferentes modelos teóricos que conceptualizan el conocimiento del profesor. Por su parte, Carrillo et al. (2018) proponen un modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas -MTSK-, que pretende constituirse en una herramienta analítica para comprender el conocimiento que un profesor de matemáticas usa cuando desarrolla tareas ligadas a su profesión. Dicho modelo conserva la estructura en dos dominios propuesta por Ball, et al. (2008), diferenciando el conocimiento matemático, ligado al conocimiento profundo de la disciplina, del conocimiento didáctico del contenido, entendido desde la perspectiva de Shulman (1986).

El dominio del conocimiento matemático se divide a su vez en tres subdominios. El primero de ellos, el conocimiento de los temas (KoT), refleja un conocimiento de índole local de la matemática enseñada, y engloba tanto el conocimiento relativo a definiciones, procedimientos y propiedades, como a significados, registros de representación, y aspectos fenomenológicos, en los que se incluye el conjunto de situaciones, dentro de las cuales el profesor puede ubicar un tema (conocimiento extra-matemático) para generar conocimiento matemático a través del uso y aplicaciones de los contenidos en la vida real.

El segundo subdominio es el conocimiento de la estructura matemática (KSM), que refleja el conocimiento que el profesor posee de los diferentes temas matemáticos como un conjunto de elementos conectados y relacionados. Así, en este subdominio encontramos las conexiones de simplificación, complejización, transversales y auxiliares (Montes et al., 2016). Finalmente, el conocimiento de la práctica matemática (KPM), contempla el conocimiento que posee el profesor acerca de las matemáticas desde una perspectiva sintáctica (Schwab, 1978).

Por otro lado, el conocimiento didáctico del contenido (PCK, de acuerdo con la terminología propuesta por Shulman, 1986) se estructura en tres subdominios. El primero de ellos, el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT), que corresponde al conocimiento que tiene el profesor relativo a recursos manipulativos o digitales para la enseñanza de la matemática, a teorías de enseñanza que le permitan estructurar su docencia, y a tareas y ejemplos que pueda usar en sus clases. El segundo de ellos, el conocimiento de las características del aprendizaje matemático (KFLM), se centra en el conocimiento del profesor sobre diferentes aspectos del aprendizaje del alumno, como las fortalezas o las dificultades que pudieran tener, sus formas habituales de tratar el contenido matemático, o aspectos emocionales en el aprendizaje de la matemática. Este subdominio también incluye el conocimiento de teorías de aprendizaje, ya sean personales o provenientes de investigaciones en educación matemática. Finalmente, el conocimiento de los estándares de aprendizaje matemáticos (KMLS) abarca el conocimiento que el profesor tiene acerca tanto de los estándares curriculares oficiales como de otros propios de asociaciones profesionales. También se incluye en este subdominio el conocimiento de propuestas de secuenciación de diferentes temas matemáticos, o el conocimiento del nivel de desarrollo conceptual o procedimental que se esperaría que tuviera un alumno.

Finalmente, el modelo MTSK considera un tercer dominio ligado a las creencias del profesor de matemáticas como elemento que permea el conocimiento del profesor (Carrillo et al., 2018). Dicho dominio no será abordado en este trabajo.

Modelación en Educación Matemática

Para definir la modelación en el campo de la educación matemática, es necesario abordar los conceptos de modelo matemático y de modelización matemática, como elementos claves en los procesos de modelación matemática. Así, la modelización matemática es entendida por Villa-Ochoa (2007) como "una actividad científica en matemática que se involucra en la obtención de modelos propios de las demás ciencias" (p.65). Dichos modelos tienen una naturaleza matemática y son sistemas axiomáticos conformados por términos indefinidos que se obtienen a partir de la abstracción y cualificación de ideas del mundo real y que se caracterizan por ser gráficos, símbolos, simulaciones y construcciones experimentales (Maki y Thompson 1973; Giordano, et al., 1997; Leal, 1999; Villa-Ochoa et al., 2009), que en su mayoría pretenden explicar, predecir y solucionar aspectos de un fenómeno o situación contextualizadas.

En ese sentido, se entiende la modelación matemática como una oportunidad de generar la abstracción y aplicación de los hechos de la vida cotidiana con fines educativos a los contenidos de las matemáticas que enseña el profesor de matemáticas. Así, distintos autores (Cetinkaya et al., 2016; Galbraith, et al., 2007; Parra-Zapata et al., 2018; Romo et al., 2019; Rosa & Orey, 2019; Villa-Ochoa, 2007; Villa-Ochoa et al., 2009; Villa-Ochoa et al., 2020; Villa-Ochoa & Ruiz, 2009; Villarreal et al., 2018) plantean que la modelación en la educación matemática se concibe como un proceso en el que se relacionan las matemáticas y el resto de las disciplinas, o, desde una perspectiva más informal, lo que se denomina 'mundo real'.

De esta manera, la modelación ayuda a que los estudiantes construyan un concepto matemático, a través de la creación de sus propias imágenes mentales asociadas a contextos de cada contenido. Lo que motiva a que se despierte el interés por el aprendizaje de las matemáticas, dada la relación de esta disciplina con la vida real. La modelación en educación matemática, a su vez, explora el estudio de situaciones y resolución de problemas de la vida cotidiana que están relacionados con el conocimiento matemático y que sirven de recurso en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas por parte del profesor, puesto que el uso de datos reales les permite a los estudiantes dar y referenciar un significado a este proceso (matematizar); es decir, plantear y representar relaciones entre los diferentes objetos y las cantidades.

Es por esa razón que los profesores deben relacionar las distintas problemáticas que puedan ser productivas como objeto de estudio, es decir que puedan ser modeladas en el aula de clase, y que no necesariamente sean específicamente de las matemáticas, sino de otras áreas del conocimiento como la física, economía, administración e ingeniería, entre otras (Çetinkaya et al., 2016). El conocimiento del profesor sobre modelación matemática no es de índole exclusivamente matemática, en el sentido de MTSK, sino que implica también conocimientos que promuevan la modelación matemática en el aula, denominados estos conocimientos como extra-matemáticos por Villa-Ochoa et al. (2020), centrados en desarrollar la propia modelación o su integración con otras disciplinas (Carmona-Mesa, Cardona Zapata & Castrillón-Yepes, 2020).

En vista de lo anterior, el integrar aspectos de la modelación dentro de las categorías de conocimiento de los subdominios del MTSK parece no solo posible, dado que en este modelo de conocimiento del profesor se profundiza aspectos disciplinares de las matemáticas y de tipo didáctico-pedagógico, los cuales están presentes también cuando se quieren desarrollar procesos de modelación matemática en aula, sino también necesario, para retroalimentar al propio modelo MTSK. Para Villa-Ochoa (2007), el proceso de modelación se puede entender desde las fases de modelación que debe tener en cuenta el profesor en la elección y análisis de los contextos y fenómenos cotidianos que serán los objetos por modelar. Dichas fases son las siguientes:

Observación y experimentación: consiste en la identificación de un fenómeno o problema de la vida cotidiana y que es propenso a ser modelado, de manera que el profesor tenga en cuenta, qué conceptos previos que debe haber interiorizado el alumnado para abordar la situación a modelar.

Delimitación del problema: consiste en reducir todas las variables con los que cuenta un problema o fenómeno del mundo real que se pretende modelar. Así, no se consideran todos los datos que intervienen en el fenómeno, por lo que se realizan simplificaciones y asunciones que eliminan algunos datos, y permitan la construcción del modelo deseado que represente el fenómeno de estudio.

Selección de estrategias: consiste en la selección de los recursos y metodologías por parte del profesor para organizar secuencias de tipo didáctico que contribuyan a la representación, manipulación y tratamiento, tanto de los modelos intermedios, como del modelo final deseado o pretendido.

Evaluación y validación: consiste en valorar la pertinencia del modelo utilizado, teniendo en cuenta que se haya dado cumplimiento a las condiciones impuestas, de acuerdo con el conjunto de datos experimentados. En esta fase son especialmente relevantes las discusiones que se dan entre compañeros, y entre alumnos y especialistas en el tema, así como la influencia de cambio de comportamiento de las variables que constituyen el modelo.

Conexión con otros modelos y situaciones: consiste en identificar otros fenómenos en los cuales se puedan establecer relaciones entre los mismos conceptos, pero bajo otro tipo de interpretaciones.

Por tanto, tomando como referencia los indicadores de conocimiento que se proponen de las categorías que conforman los subdominios del MTSK (Carrillo et al., 2018) y de acuerdo con las fases de modelación (Villa-Ochoa, 2007), se proponen indicadores de conocimiento que requiere el profesor para la enseñanza de las secciones cónicas utilizando las TIC a partir del desarrollo de procesos de modelación en aula. Cada una de las fases expuestas, que son necesarios para llevar a cabo el proceso de modelación matemática en el aula, se requiere de la experticia del profesor, tanto de tipo matemático, para saber relacionar los contenidos de las matemáticas con situaciones problemáticas que puedan ser solucionadas con dicho contenido matemático, a través de la modelación. Así como de tipo didáctico para saber establecer la secuencialidad que conlleva a la representación, manipulación y tratamiento del modelo que plasme la situación que está relacionada con determinado contenido de las matemáticas.

Así, en el caso de la observación y experimentación que debe tener en cuenta el profesor de matemáticas para desarrollar procesos de modelación, se encuentra la relación que esto tiene con el conocimiento de los temas (KoT), en cuanto a las categorías de definiciones, relaciones fenomenológicas y registros de representación; en el conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM) en relación a la categoría de motivaciones de los estudiantes para el aprendizaje de las matemáticas; en el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT) las técnicas y recursos de enseñanza; en el conocimiento de las prácticas matemáticas (KPM) en las categorías de formas de proceder y de modelar.

Por su parte, en el momento de delimitación del problema, parece plausible la relación con el desarrollo de procesos de modelación con el conocimiento de los temas (KoT) en las categorías de propiedades y definiciones. Del mismo modo, en el momento de selección de estrategias, se guarda relación con el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT), desde las categorías de potencialidad del recurso, y de actividades, tareas, ejemplos y estrategias para la enseñanza de las matemáticas; y en el conocimiento de los temas (KoT), con la categoría de registros de representación.

Finalmente, de cara a desarrollar procesos de evaluación, validación y conexión con otros modelos, el profesor movilizará conocimiento de los temas (KoT) en las categorías de definiciones, propiedades, relaciones fenomenológicas y procedimientos; y su conocimiento de las prácticas matemáticas (KPM), con las categorías de formas de modelar y proceder.

En esta investigación nos centramos únicamente en los subdominios KoT y KPM del dominio matemático, y el subdominio KMT del dominio del PCK. Esta decisión se tomó debido a que son los subdominios del modelo en los cuales sus respectivas categorías guardan más relación con las fases de la modelación propuesta por Villa-Ochoa (2007). Así, la versatilidad que tiene este modelo para establecer relaciones entre propias categorías de un mismo subdominio, entre categorías de distintos subdominios del mismo dominio de conocimiento y entre categorías de distintos subdominios de diferentes dominios de conocimiento, es muestra de la proyección del MTSK a las fases de la modelación matemática, una práctica no abordada en su profundidad en las categorías del KPM, pero sustancial dentro del conocimiento especializado que requiere un profesor que enseña un contenido de las matemáticas, como es el caso de las secciones cónicas que puede ser aplicado a diversas situaciones de la vida cotidiana, y que mediante el uso de herramientas y/o recursos tecnológicos facilita su enseñanza a través de esta práctica. Por lo que se requiere que el profesor de matemáticas no solamente tener conocimiento matemático, sino de tipo didáctico-pedagógico, que hagan que su conocimiento sea especializado para la enseñanza de la modelación de determinado contenido haciendo uso de la tecnología. Si bien indicadores de los subdominios KSM y KFML (PCK) y KMLS (MK) podrían ser identificados y analizados en futuras investigaciones, no serán objeto de estudio en este trabajo.

METODOLOGÍA

Este trabajo de investigación se desarrolla bajo un enfoque cualitativo (Stake, 2010) con un estudio de caso de tipo instrumental (Stake, 2005), ya que, a través de un caso particular de estudio, se comprende, interpreta y analiza qué implica integrar elementos de la modelación dentro de la práctica de un profesor que *enseña secciones cónicas utilizando las TIC.*

Participantes y contexto

A partir de los criterios de Simons (2011), de un conjunto de casos relacionados con los intereses de la investigación, se selecciona un profesor de seudónimo Pablo, cuya formación es en licenciatura en matemáticas, especialista en didáctica de las matemáticas y magíster en didáctica de las matemáticas, que cuenta con experiencia docente de tres años, enseñando en el grado décimo de Educación Media las secciones cónicas y utilizando software especializados de la matemática como GeoGebra, Geo Tic, entre otros, además de haber publicado un artículo científico sobre su práctica.

Instrumento de recogida de datos

El instrumento utilizado para la recolección de la información en la investigación corresponde a 13 unidades de observación no participante aplicadas a Pablo, 11 bajo la modalidad virtual y 2 bajo la modalidad presencial. Estas unidades de observación se transcribieron textualmente y corresponden a clases que fueron grabadas del profesor Pablo, en la cual este hizo uso de las TIC para la enseñanza de los siguientes contenidos que corresponden a las secciones cónicas: la Circunferencia y sus partes, recta tangente a una circunferencia, ecuación canónica de la circunferencia, demostración de la ecuación general de la circunferencia, gráfica de la circunferencia, la elipse, construcción de una elipse de manera empírica y en el plano, partes de la elipse, demostración de la ecuación general de la elipse, cálculo de las partes de la elipse, la hipérbola, partes de la hipérbola, cálculo de la ecuación general de la hipérbola y gráfica de la hipérbola. Para términos de este artículo de investigación se seleccionó un extracto de un episodio de la sesión de clases #2 observada, desde la línea 37 a la 57 (2. S2-L37-57) relacionado con el contenido de la circunferencia. La codificación que se utilizó para las unidades de análisis es la siguiente: sesión, número de la sesión y líneas de transcripción de la sesión. Se decidió elegir el episodio antes mencionado, debido a que muestra evidencias de conocimiento especializado del profesor acerca de los subdominios a estudiar en el presente, relaciones entre estos y acercamientos del profesor para desarrollar modelación matemática en la enseñanza del contenido de las secciones cónicas, específicamente de la circunferencia.

Análisis de los datos

En cuanto al análisis de los datos, se utilizan como instrumento de análisis los indicadores a las categorías de conocimiento de los subdominios del MTSK propuesto por Carrillo et al. (2018), adaptados a los momentos de la modelación que debe tener en cuenta el profesor de matemáticas propuestos por Villa-Ochoa (2007) para desarrollar modelación matemática (Tablas 1, 2 y 3). Estos indicadores están vinculados a los subdominios, que son objeto de análisis en este artículo de investigación, KoT, KPM y KMT. El análisis se desarrolla en forma de análisis de contenido a un extracto de un episodio relacionado con el contenido de la circunferencia. En este análisis, con características inductivas, se organizan los datos en categorías, y a partir del análisis de estos se revisan constantemente hasta llegar un punto de saturación en el que no se puede hacer más aportes a dichas categorías, ya que están completamente definidas y descritas (Bardin, 1996; Krippedorff, 2009; Carter, 2020). Es por eso, que el análisis de las interacciones entre Pablo y los estudiantes en las cuales se pretende caracterizar el conocimiento especializado del profesor se hace por subdominios del MTSK. De este modo las siguientes tablas dan muestra de la propuesta de indicadores a las categorías de conocimiento de los subdominios KoT, KPM y KMT del MTSK, como adaptación de los propuestos en el estudio realizado por Carrillo, et al., (2018) y su respectiva relación con los momentos del profesor para desarrollar modelación matemática en el salón de clase que propone Villa-Ochoa (2007), en este orden: KoT, KMT y KPM.

En la Tabla 1, se muestran los momentos del profesor para desarrollar modelación matemática que más se relacionan con categorías del subdominio KoT, especialmente los que corresponden a la fase de observación y experimentación y la de validación y de evaluación, lo que se entiende pues en esta última se utilizan definiciones, procedimientos y propiedades de la matemática para modelar situaciones de la vida real y generar el(los) modelo(s) matemático(s) a partir de estos.

Tabla 1

Indicadores del KoT

Dominio	***Subdominio***	***Categoría***	***Indicadores***	***Momento de la modelación Villa-Ochoa (2007)***
MK	KoT	Conocimiento de las definiciones	(IC1 [1]) Saber las definiciones de las secciones cónicas en la construcción de modelos matemáticos utilizando las	Observación y experimentación Evaluación y Validación

[1] Leyenda: IC representa a los Indicadores de Conocimiento del KoT enumerados del 1 al 6.

		TIC (GeoGebra)	
	Conocimiento del tipo de fenomenología o aplicación en la vida cotidiana de los contenidos matemáticos	(IC2) Identificar situaciones del diario vivir de las propias matemáticas o de áreas del conocimiento afines que puedan ser modeladas de las matemáticas escolares (secciones cónicas).	Observación y experimentación
	Conocimiento de los registros de representación de los contenidos	(IC3) Representar los contenidos de las matemáticas escolares (secciones cónicas) en cada uno de sus registros (gráfico, numérico, algebraico, pictórico y de lenguaje natural).	Observación y experimentación Selección de estrategias
	Conocimiento de las propiedades y fundamentos de	(IC4) Aplicar las propiedades de las	Delimitación del problema Evaluación y Validación

	los contenidos a modelar	secciones cónicas en la modelación de situaciones contextuales mediante el uso de herramientas TIC.	
	Conocimiento de los procedimientos de contenidos de las matemáticas escolares en la modelación de situaciones matemáticas de contexto.	(IC5) Aplicar los procedimientos de las secciones cónicas en la modelación de situaciones dentro de matemática o de áreas de conocimiento a fin (¿por qué se hace así? ¿Cómo se hace? ¿Cuándo se hace así? Utilizando las TIC.	Observación y experimentación Evaluación y Validación
	Conocimiento de las posibles relaciones fenomenológicas entre contenidos matemáticos al ser modelados	(IC6) Reconocer las relaciones fenomenológicas que surgen dentro de los contenidos matemáticos	Conexión con otros modelos

		en situaciones de contexto.	(secciones cónicas) y que contribuyen en la modelación de situaciones del mundo real.	

En la Tabla 2 se muestra que el momento del profesor para desarrollar modelación matemática que más se relaciona con categorías del subdominio KMT, es la selección de estrategias. Esto se entiende ya que, a partir del conocimiento de los ejemplos, las estrategias y la potencialidad del recurso como estrategia de enseñanza, permiten llevar a cabo procesos de modelación de situaciones reales de la vida cotidiana utilizando las matemáticas en la construcción de modelos.

Tabla 2.

Indicadores del KMT

Dominio	***Subdominio***	***Categoría***	***Indicadores***	***Momento de la modelación Villa-Ochoa (2007)***
PCK	KMT	Conocimiento del tipo de contenidos que son del gusto de los estudiantes.	(IE1 [2]) Identificar situaciones que son de interés del estudiante en la modelación matemática	Observación y experimentación Selección de estrategias

[2] Leyenda: IE representa a los indicadores de conocimiento del KMT enumerados del 1 al 6.

		mediante los softwares matemáticos	
	Conocimiento de la potencialidad del recurso virtual y/o material en el modelado de los contenidos en situaciones de contexto.	(IE2) Saber la efectividad de los comandos de GeoGebra y programas de Microsoft como herramientas de apoyo para la modelación matemática de situaciones del diario vivir de las secciones cónicas.	Selección de estrategias
	Conocimiento de la potencialidad del recurso virtual y/o material en la enseñanza de los contenidos	(IE3) Saber la efectividad de herramientas TIC (GeoGebra y programas Microsoft) para realizar representaciones matemáticas de manera dinámica de las secciones cónicas.	Selección de estrategias
	Conocimiento de las actividades,	(IE4) Conocer	Delimitación del problema

	las tareas, las estrategias y los ejemplos que contribuyan en la enseñanza de los contenidos matemáticos	variedad de las actividades, los ejercicios, los ejemplos y las tareas a realizar con herramientas TIC que contribuyan en la construcción de modelos matemáticos relacionados con las secciones cónicas	Selección de estrategias
	Conocimiento del tipo de ayudas a brindarles a los estudiantes que permitan cubrir sus necesidades en la enseñanza de los contenidos matemáticos	(IE5) Saber el tipo de ayudas a brindarles a los estudiantes cuando tengan dificultades para plasmar una situación real a través de la modelación matemática relacionada con las secciones cónicas.	Observación y experimentación Selección de estrategias
	Conocimiento del tipo de	(IE6) Saber relacionar	Conexión con otros modelos

		teorías institucionalizadas como soporte para realizar procesos de modelado matemático acerca de situaciones contextuales.	teorías y procesos pedagógicos en la enseñanza de la modelación matemática de situaciones y/o contextos reales de las secciones cónicas utilizando GeoGebra.	

En la Tabla 3 se muestra que el momento del profesor para desarrollar modelación matemática que más se relaciona con categorías del subdominio KPM son la evaluación y validación, y la conexión con otros modelos. Esto se entiende puesto que a partir del conocimiento del profesor sobre las formas de modelar, demostrar y proceder utilizando algoritmos matemáticos, este puede desarrollar procesos de modelación matemática de situaciones reales y a su vez relacionar sus modelos matemáticos como simulación a dichas situaciones con modelos matemáticos ya existentes.

Tabla 3.

Indicadores del KPM

Dominio	***Subdominio***	***Categoría***	***Indicadores***	***Momento de la modelación Villa-Ochoa (2007)***

MK	KPM	Conocimiento de las prácticas del quehacer matemático (modelación de situaciones reales de contenidos matemáticos)	(IP1[3]) Interpretar situaciones del mundo real, cuya solución esté determinada mediante la construcción de modelos matemáticos usando GeoGebra.	Observación y experimentación Evaluación y validación
		Conocimiento del proceder en matemáticas a través del uso de los modelos matemáticos en situaciones reales mediante algoritmos	(IP2) Usar con sentido los algoritmos matemáticos en la modelación de situaciones del mundo real a través de software del área (i. e. GeoGebra) de las secciones cónicas.	Evaluación y validación
		Conocimiento para relacionar modelos matemáticos entre sí	(IP3) Relacionar modelos matemáticos construidos mediante el software (GeoGebra)	Conexión con otros modelos

[3] Leyenda: IP representa a los indicadores de conocimiento del KPM enumerados del 1 al 6.

		como solución a situaciones del mundo real relacionadas con las secciones cónicas y con otros modelos matemáticos ya existentes.	
	Conocimiento de validaciones de las aplicaciones de contenidos matemáticos mediante la simulación de estos	(IP4) Verificar la resolución de una situación contextual de las secciones cónicas de manera teórica, mediante la simulación de estas construida a partir de un modelo matemático en GeoGebra.	Evaluación y validación
	Conocimiento de las demostracione s de los contenidos matemáticos abstractos a modelar mediante situaciones reales.	(IP5) Demostrar conceptos, fórmulas, axiomas, y/o teoremas de las secciones cónicas, que están relacionados con	Evaluación y validación

	Conocimiento del proceder en la resolución de problemas matemáticos de acuerdo con sus niveles de abstracción.	situaciones del diario vivir y que pueden ser modelados mediante software matemáticos (IP6) Reconocer los distintos niveles de abstracción matemática para llevar a cabo procedimientos matemáticos relacionados con situaciones del diario vivir y solucionados mediante modelación matemática a través de GeoGebra.	Evaluación y validación

Para este trabajo, se selecciona un episodio en el cual intervienen elementos de la modelación (Villa-Ochoa, 2007) y elementos del conocimiento especializado del profesor que enseña matemáticas (Carrillo et al., 2013). El episodio seleccionado, se centra en el proceso que tiene que hacer un estudiante para, de acuerdo con el movimiento de rotación de los radios de una circunferencia con respecto al eje y , y mediante el software GeoGebra, dibujar una recta tangente (2. S2 - L37-57) relacionado con el contenido de la circunferencia y se muestra a continuación:

37	**Pablo**	*Ese triángulo que se forma en GeoGebra ¿qué función cumple? ¿Qué describe?*
38	**Estudiante C**	*¿Describe el movimiento del triángulo?*
39	**Pablo**	*Eso indica que cuando el triángulo mida 90° por ahí por ese punto va a pasar las rectas tangentes que les comenté, ¿dónde quedará ubicado el triángulo rectángulo?*

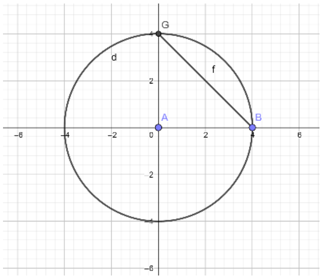

Figura 1. Gráfico del Triángulo que se forma en el movimiento continuo del radio de la circunferencia en GeoGebra

40	**Estudiante B**	*¿Cómo así que va a indicar la recta tangente al punto?*
41	**Pablo**	*Es decir, que, si yo quiero hacer una recta tangente a la circunferencia, yo coloco en utilizo los comandos de GeoGebra, ¿observas dónde dice recta tangente?*
42	**Estudiante B**	*Sí*
43	**Pablo**	*Bueno, entonces con el cursor yo selecciono: punto o recta en GeoGebra*
44	**Estudiante B**	*Bueno, y luego selecciono dónde dice la circunferencia, cónica o función*
45	**Pablo**	*Exacto, el punto referencia va a ser el punto G, miro y trazo la recta tangente.*

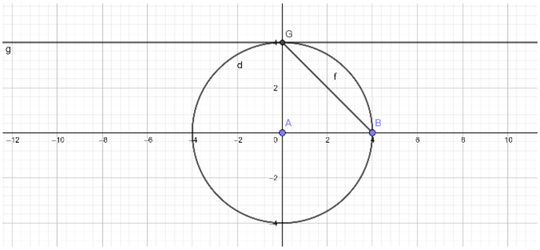

Figura 2. Gráfico de la recta tangente al punto G de la circunferencia que forma a su vez un triángulo rectángulo

46	**Estudiante B**	*Sí profe, ya entendí*
47	**Pablo**	*¿Qué triángulo se formó?*
48	**Curso**	*Un triángulo rectángulo de 90°*
49	**Pablo**	*Si claro, ya que se formar una perpendicular, es decir un ángulo recto.*
50	**Estudiante B**	*Y si yo quiero que la recta tangente pase ahora por el punto ¿también se forma un triángulo rectángulo?*
51	**Pablo**	*Sí, mira voy a colocarlo en el punto D, es decir que la recta tangente pase por ese punto en la circunferencia, entonces ahora se comienza a mover [pausa] y cada vez que pase por los cuadrantes ¿qué se marca? [Pausa el software GeoGebra y muestra la representación], una recta tangente. ¿Se vio?*
52	**Grupo**	*Sí profe*
53	**Pablo**	*¿En cuántos puntos corta la recta tangente?*
54	**Estudiante H**	*En uno.*
55	**Pablo**	*OK, ¿y si la recta no cortara la circunferencia en un solo punto?*
56	**Estudiante C**	*Entonces, no sería una recta tangente.*
57	**Pablo**	*OK*

Este episodio inicia con un diagnóstico que Pablo realiza a sus estudiantes acerca del conocimiento que estos tienen del significado del movimiento de rotación del radio de una circunferencia en GeoGebra, así como la forma que toma el triángulo que se forma en el movimiento del radio de una circunferencia con el eje y. Después de esto, introduce el concepto de recta tangente a una circunferencia, y define el triángulo que se forma en el movimiento del radio como triángulo rectángulo (medida de uno de sus ángulos igual a 90°). Luego afirma que cuando el movimiento del radio forma un ángulo de esta medida, por el punto final del lado de la hipotenusa del triángulo, pasa una de las tantas rectas tangentes a la circunferencia. Finalmente, Pablo realiza preguntas alrededor de la perpendicularidad y características que tienen este tipo de triángulos.

RESULTADOS Y ANÁLISIS

Resultados

Características del conocimiento especializado de Pablo

En este apartado, se describen las características de conocimiento especializado de Pablo encontradas en los subdominios objetivo de análisis de este artículo de investigación, en primera medida se encuentran las características del subdominio KoT, en el cual Pablo muestra conocimiento de los procedimientos, registros de representación y definiciones del contenido correspondiente a la circunferencia. Luego, se encuentra las características del subdominio KPM, dónde se evidencia el conocimiento del profesor sobre las prácticas matemáticas (modelación) de la recta tangente a una circunferencia. Después de esto, se indaga acerca de las características del subdominio KMT, donde se evidencia el conocimiento del profesor acerca de la potencialidad del recurso virtual y de estrategias para la enseñanza de la sección cónica referente a la circunferencia. Dichas características se describen a continuación.

Características del subdominio KoT

Pablo presenta tres características del subdominio KoT, identificadas cada una de ellas a partir de los indicadores correspondientes. Este profesor tiene conocimiento de los procedimientos de los contenidos de las matemáticas escolares en la modelación de situaciones matemáticas de contexto identificada a partir del indicador IC5 (Tabla 1). En este caso está determinado por la modelación de la circunferencia, el movimiento de su radio con respecto al eje y, y la construcción de la recta tangente que se forma partir de dicho movimiento. Esto se evidencia en el hecho de que a la pregunta que Pablo hace al estudiante B*: "¿cómo así que va indicar la recta tangente al punto?"* es una muestra del conocimiento de Pablo acerca del ¿cómo se hace el trazo de una recta tangente a un punto de la circunferencia? Lo cual no solo es evidencia que éste sabe cómo lograr que la recta tangente que se pretende buscar pase por un solo punto de la circunferencia (punto G), sino que, además, sabe que el movimiento del radio forma un ángulo recto y por tanto un triángulo rectángulo, aparte de saber plasmar la situación antes mencionada mediante los comandos del software GeoGebra.

Pablo muestra también conocimiento de diferentes *registros de representación* (KoT) (Macías-Sánchez, 2014) para llevar a cabo la enseñanza de las secciones cónicas Lo cual está relacionado con el IC3 de la Tabla 1: "representar los contenidos de las matemáticas escolares (secciones cónicas) en cada uno de sus registros (gráfico, numérico, algebraico, pictórico y de lenguaje natural). En el caso de las representaciones de la lengua natural (2. S2- L39), muestra dominio para introducir el concepto de la recta tangente a la situación abordada de la circunferencia en el software GeoGebra sin profundizar en qué es una recta tangente en matemáticas (Definición-KoT), más si lo hace en el uso puntual que esta recta tiene en la modelación de la rotación del radio de la circunferencia de manera dinámica en GeoGebra.

En el caso de la representación pictórica y gráfica (2. S2- L45), Pablo utiliza el punto G como representación pictórica [obsérvese en la Figura 2] para indicar el punto por dónde pasa en el plano, la recta tangente a la circunferencia y que se infiere hace Pablo para que los estudiantes construyan conocimiento relativo a que en ese punto como coordenada del eje y, se formará el triángulo rectángulo que se requiere para construir la recta tangente al punto. En cuanto a la representación gráfica, se usa la gráfica de la circunferencia, el radio, el triángulo rectángulo inscrito en la circunferencia a partir del radio dibujado, y la recta tangente a un punto de la circunferencia, para, con base en estos elementos, analiza con sus estudiantes que la recta tangente solo corta un punto de la circunferencia, o que la posición del radio con el eje y, al rotarse mediante uno de los comandos del software GeoGebra, debe formar un triángulo rectángulo para que la recta tangente pueda pasar por un punto de la circunferencia.

De este modo, el conocimiento de Pablo acerca de los registros de representación se evidencia significativamente en este episodio. Lo que se alinea con el indicador IC3 del KoT, ya que el profesor, utiliza tres tipos de registros de representación: natural, pictórico y gráfico en la enseñanza de las secciones cónicas, particularmente de la recta tangente a una circunferencia en

GeoGebra, lo cual se relaciona a su vez, con el momento de selección de estrategias que propone Villa-Ochoa (2007), como se muestra en la Tabla 1, debido a que el uso del lenguaje pictórico, verbal y gráfico son utilizados en beneficio del modelado del triángulo que se forma en el movimiento continuo del radio de la circunferencia en GeoGebra, en el caso de la representación pictórica utilizando puntos de GeoGebra como estrategia de visibilidad que muestre el momento exacto en donde se forma el triángulo rectángulo como resultado del movimiento dinámico de la recta tangente a la circunferencia en dicho punto en el software, o de la representación gráfica, como estrategia de visibilidad de la recta tangente que corta exactamente a un punto de la circunferencia.

Además, Pablo evidencia conocimiento de las definiciones (KoT) en la enseñanza de las secciones cónicas, específicamente en este episodio de la circunferencia (2. S2- L47-47), lo cual está alineado con el IC1 de la Tabla 1, que afirma que el profesor debe saber las definiciones de las secciones cónicas en la construcción de modelos matemáticos utilizando las TIC, lo cual se evidencia cuando Pablo afirma mediante interrogantes como ¿Qué triángulo se formó? ¿En cuántos puntos corta la recta tangente? ¿Y si la recta no cortara la circunferencia en un solo punto? Las cuales se intuye que Pablo realice para que los estudiantes interpreten la aplicación de la definición de las secciones cónicas como puesta en escena en la modelación de estas definiciones en el software GeoGebra, por lo que se prevé que Pablo sabe que el comportamiento que se produce en el plano bidimensional a través de la rotación de la recta tangente en cualquier punto de la circunferencia forma un triángulo rectángulo, así como también que esta recta corta única y exclusivamente un solo punto de la circunferencia.

Características del subdominio KPM

Pablo presenta una característica del subdominio KPM, identificada a partir de su indicador correspondiente. Este profesor tiene conocimiento parcial de las prácticas del quehacer matemático (modelación de situaciones reales de contenidos matemáticos) identificada a partir del indicador IP1 (Tabla 3) ya que sabe que para enseñar la recta tangente a una circunferencia, lo puede hacer a través de la modelación de cualquier punto de la circunferencia por los cuales pasa una y solamente una recta tangente en GeoGebra y que a su vez este proceso conduce a que se forme un triángulo rectángulo cada vez que se da la rotación de la recta tangente con el respectivo punto en el plano cartesiano. No obstante, se considera que la identificación de conocimiento del profesor es parcial, debido a que no cumple con todo lo propuesto en el IP1 ya que el proceso de modelación que efectúa Pablo lo hace en un contenido particular de las matemáticas, como lo es la circunferencia, no obstante, no aplica la modelación para plasmar situaciones de la vida cotidiana en dónde se aplique el contenido correspondiente a la circunferencia.

Características del subdominio KMT

Pablo presenta dos características del subdominio KMT, identificadas cada una de ellas a partir de los indicadores correspondientes. Este profesor tiene conocimiento de la potencialidad del recurso virtual y/o material en la enseñanza de los contenidos identificada a partir del indicador IE3 (Tabla 2), esto se evidencia cuando Pablo propone trazar una recta tangente a un punto de la circunferencia, de manera que los estudiantes observaran que esta corta a la misma en un solo punto, por eso, dada la funcionalidad del recurso (GeoGebra) para seleccionar un punto cualquiera de la circunferencia y por este trazar la recta, Pablo hace uso del mismo, para seleccionar un punto llamado G que fuera la referencia de la aplicación de la definición de recta tangente a una circunferencia.

Del mismo modo, Pablo conoce que el software GeoGebra permite que las gráficas puedan tener movimiento y dinamismo, por lo que les pide que apliquen el mismo procedimiento de trazar la recta tangente a otro punto de la circunferencia llamado D, lo que es muestra que este sabe que, mediante el comando de movimiento de GeoGebra, los estudiantes pueden evidenciar que en cualquier punto que sea seleccionado de la gráfica, pasara una y solamente una recta tangente a la cónica. Como se observa en la siguiente afirmación que hace Pablo: *"sí, mira, voy a colocarlo en el punto D, es decir que la recta tangente pase por ese punto en la circunferencia, entonces ahora se comienza a mover [pausa] y cada vez que pase por los cuadrantes ¿qué se marca? [Pausa el software GeoGebra y muestra la representación], una recta tangente"* lo que enmarca su conocimiento sobre los comandos que le ofrece el recurso para la enseñanza del contenido referente a las secciones cónicas.

Por otra parte, Pablo evidencia conocimiento de estrategias y ejemplos que contribuyan en la enseñanza de los contenidos matemáticos identificada a partir del indicador IE4 de la Tabla 2: *"Conocer variedad de actividades, ejercicios, ejemplos y tareas a realizar con herramientas TIC que contribuyan en la construcción de modelos matemáticos relacionados con las secciones"* esto debido a que propuso más de un ejemplo que plasmara la gráfica de una recta tangente a un punto de la circunferencia, utilizando varios puntos (punto G y punto D) en lo que ocurriera lo que el profesor quería probar. Así como la estrategia de dinamizar el movimiento de los puntos en el plano, para generalizar la definición de recta tangente a un punto de la circunferencia en el plano cartesiano.

Relaciones entre las características de los subdominios

Dentro de los resultados, se encontró diversas relaciones entre subdominios de un mismo dominio de conocimiento, así como de dominios distintos e indicadores de conocimiento propuestos. Dentro de estas relaciones, se evidencia que Pablo sabe aplicar los procedimientos de matemáticas escolares en la modelación matemática (KoT), y, particularmente, se pone de relieve conocimiento de la fase de observación y experimentación propuesta por Villa-Ochoa (2007), ya que él sabe que para poder modelar la recta tangente en el plano del software GeoGebra, se debe antes observar y analizar el movimiento del radio de la circunferencia con el eje y, es decir, que se formará un triángulo rectángulo para poder hacer la modelación, lo que se relaciona parcialmente con el indicador IP1 del KPM *“conocimiento de las prácticas del quehacer matemático (modelación de situaciones reales de contenidos matemáticos”*, puesto que Pablo conoce de las formas de modelar el comportamiento que tiene la rotación del radio de una circunferencia y el triángulo rectángulo que se forma en el movimiento mismo del radio a un punto G, por donde pasa una recta tangente a la circunferencia, sin embargo no trasciende en la modelación de dicha situación a un problema real, como propone Villa-Ochoa (2007) en las fases de modelación, puntualmente en el momento de evaluación y validación, que se relaciona con esta categoría en la Tabla 1.

Además, el indicador de conocimiento IC3, guarda relación potencial en este episodio con el indicador IE2 *“conocimiento de la potencialidad del recurso virtual y/o material”* y ambos son muestra de conocimiento especializado del profesor para disponer de su conocimiento matemático y didáctico-pedagógico en la enseñanza. Dado que es necesario usar registros de representación pictórica y gráfica como elementos clave en el modelado de la recta tangente a un punto de la circunferencia que forma un triángulo rectángulo, se hace también necesario saber que el software GeoGebra permite insertar elementos como el punto (G) [registro pictórico] y la recta tangente (color negro) [registro gráfico] que se observan en la Figura 2. Esto a su vez guarda relación, como se mencionó anteriormente con el momento de selección de estrategias

(Villa-Ochoa, 2007), y que el profesor de matemáticas debe tener en cuenta para llevar a cabo procesos de modelación. Asumimos que Pablo sabe que mediante GeoGebra puede involucrar al estudiante a que conozca las diversas representaciones que son necesarias para plasmar la situación que se pretende modelar (Acevedo-Rincón y Flórez-Pabón, 2020).

No obstante, esto se considera sólo como un acercamiento de conocimiento, ya que Villa-Ochoa propone estas fases de modelación aplicadas a situaciones relacionadas con la vida cotidiana en donde intervengan elementos de las matemáticas.

Del mismo modo, cabe resaltar que para el profesor conocer de registros de representación aplicados a los contenidos de las matemáticas escolares que enseña requiere conocer de las definiciones formales de la matemática. Así, para poder plasmar en un gráfico a la circunferencia, su radio, recta tangente y demás partes que la componen, este debe saber antes qué es el radio, qué es la recta tangente, y qué implicaciones tiene la construcción de la misma (recta tangente). Esto se enmarca en el indicador IC1, que se describe como: *"saber las definiciones de las funciones trigonométricas y secciones cónicas en la construcción de modelos matemáticos utilizando las TIC (GeoGebra)",* que está conectado con el indicador IC3, referente a los registros de representación, categoría del MTSK propuesto por Flores-Medrano et al. (2014) como parte del mismo subdominio de conocimiento del KoT.

Ahora bien, algunos de los conocimientos de las definiciones de la circunferencia, son evidenciados de manera explícita por Pablo en este episodio (2. S2 -L53-57). A través de preguntas como: ¿En cuántos puntos corta la recta tangente?, ¿y si la recta no cortara la circunferencia en un solo punto?, las que se intuye fórmula para que los estudiantes al observar el gráfico en GeoGebra (Figura 2), hagan interpretación de este y conozcan la definición de una recta tangente a una circunferencia, con respecto a que corta en un solo punto a la cónica. Esto denota conocimiento de Pablo acerca de esta definición, para posteriormente plasmarla de manera dinámica en GeoGebra (KMT).

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

La construcción de indicadores de conocimiento del KoT, KPM y KMT permitió comprender e interpretar el conocimiento especializado del profesor al enseñar cónicas, y en particular la circunferencia, mediante modelación matemática con el software especializado GeoGebra. A razón de esto, se identificó la necesidad de relacionar el conocimiento didáctico y matemático del profesor con la enseñanza de este contenido, de manera que se haga un uso efectivo de las herramientas TIC en el aula. En consecuencia, las competencias tecnológicas en un profesor que enseña contenidos de las matemáticas, están relacionadas con el conocimiento y uso del recurso tecnológico con fines didácticos y pedagógicos para la enseñanza (KMT), sumado a esto, se encontró también que las competencias disciplinares (matemáticas) que debe poseer un profesor están ligadas al conocimiento de los fundamentos y estructura de desarrollo de la matemática, conocimientos que son elementos claves para el fomento de la modelación matemática al utilizar las TIC. Esto se relaciona con la investigación realizada por Santana y Climent (2015) en la cual se estudió acerca del conocimiento especializado del profesor de matemáticas para la enseñanza de la bisectriz de un triángulo, el incentro y una circunferencia inscrita a un triángulo mediante el software GeoGebra, la cual es la única investigación previa a la presente, en la que se estudió el conocimiento especializado de un profesor de matemáticas teniendo en cuenta el uso de un recurso tecnológico (GeoGebra).

En ese sentido, al igual que en este estudio, se aportaron indicadores de los distintos subdominios estudiados del modelo MTSK que describían el conocimiento necesario del profesor para la enseñanza del contenido en cuestión, desde conocimientos tecnológicos, disciplinares, didáctico pedagógicos y sus respectivas relaciones. Esto es interesante y novedoso en este modelo, ya que describe específicamente el conocimiento necesario que requiere un profesor para la enseñanza de un contenido específico de las matemáticas haciendo uso de las TIC. En futuras investigaciones, resultará conveniente trascender los tres subdominios aquí abordados, explorando de forma adicional los subdominios no abordados en este estudio: KSM, KFLM, y KMLS, así como las creencias del profesor, para obtener una visión más completa del conocimiento especializado del profesor de matemáticas que enseña cónicas a través de las TIC.

Por otra parte, como proyección hacia futuras investigaciones, es fundamental que dentro del conocimiento y la formación del profesor de matemáticas, el profesor no solo conozca cómo modelar los contenidos que enseña utilizando las TIC de manera práctica, sino que también, a partir de su conocimiento matemático, sepa aplicarlo en diversas situaciones de la vida cotidiana correspondientes a la misma matemática o a otras áreas del saber afines a las matemáticas, como lo son la economía, física, ingeniería, estadística, administración, química, entre otras. Así, el profesor puede aplicar dentro del estudio de la modelación de este tipo de problemas, áreas transversales a las matemáticas, así como las fases de la modelación referentes a la observación y experimentación, delimitación del problema, selección de estrategias, evaluación y validación y conexión con otros modelos.

En el estudio de la modelación, el uso de herramientas y/o *softwares* especializados de las matemáticas (por ejemplo: GeoGebra, GeoTic, Matlab, o Cabri), toma relevancia dado su potencial para llevar a cabo procesos de modelación. Esto implica que dentro de las características del profesor de matemáticas debería estar el saber relacionar las ciencias del saber de forma interdisciplinar, a partir de sus experiencias y conocimientos transversales entre las ciencias con las matemáticas. Así, el profesor puede poner en práctica la validación y conexión entre modelos que correspondan a una situación contextual con situaciones semejantes exploradas desde diversas perspectivas, utilizando aspectos de la modelación.

DECLARACIONES DE CONTRIBUCIÓN DE LOS AUTORES

IAPE y JPAR concibieron la idea presentada. IAPE desarrolló la teoría. JPAR adaptó la metodología a este contexto, MAMN creó los modelos, realizó las actividades y recopiló los datos. IAPE y JPAR analizaron los datos. Todos los autores participaron activamente en la discusión de los resultados, revisaron y aprobaron la versión final del trabajo.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos que respaldan los resultados de esta investigación serán puestos a disposición por todos los autores (IAPE, JPAR y MAMN), previa solicitud razonable.

REFERENCIAS

Acevedo-Rincón, J., & Flórez-Pabón, C. (2020). Geometry for design: approaches to the study of representation and dimension and their contributions to the modeling of phenomena. *Journal of physics: Conference Series*, *1674*, 1-7. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1674/1/012009

Ball, D., Thames. M., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What makes it Special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Bardin, L. (1996). *Análisis de contenido*. (2ª ed). Akal

Carmona-Mesa, J., Cardona-Zapata, M., & Castrillón-Yepes, A. (2020), Estudio de fenómenos físicos en la formación inicial de profesores de Matemáticas. Una experiencia con enfoque STEM. *Uni-pluriversidad*, *20*(1), 18-38. https://doi.org/10.17533/udea.unipluri.20.1.02

Carter, S (2020). Case Study Method and Research Design: Flexibility or Availability for the Novice Researcher? In: H. van Rensburg & S. O'Neil (Eds.), *Inclusive Theory and Practice in Special Education Hershey*. (p. 301-326). IGI-Global.

Carrillo, J., Climent, N., Montes. M.A., Contreras, L., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar, A., Ribeiro, M., & Muñoz, M. (2018). The mathematics teacher's specialized knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Cetinkaya, B., Kertil, M., Kursat, A., Korkmaz, H., Alacaci, C., & Cakiroglu, E. (2016). Pre-service Teacher´s Developing Conceptions about the Nature and Pedagogy of Mathematical Modeling in the Context of a Mathematical Modeling Course. *Mathematical Thinking and Learning*, *18*(4), 287-314. https://doi.org/10.1080/10986065.2016.1219932

Fennema, E., & Franke, M. (1992), Teacher´s Knowledge and its impact. In: D.A. Grows (Ed). *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 147 – 164)

Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Montes, M., Aguilar, A., y Carrillo, J. (2014). *Nuestra modelación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK*. (p. 57-72). Universidad de Huelva Publicaciones. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=8091124

Galbraith, P., Henn, H., & Niss, M. (2007). Modelling and applications in mathematics education, the 14th ICMI study. *New ICMI Study Series* (*10*).

Giordano, F., Fox, W., & Horton, S. (1997). *A First Course in Mathematical Modeling*. Brooks/Cole.

Granados-Ortiz, C., & Padilla-Escorcia, I. (2021). El aprendizaje gráfico de la recta tangente a través de la modelación de las secciones cónicas utilizando GeoGebra. *Revista Científica*, *40*(1), 118-132. http://dx.doi.org/10.14483/23448350.16137

Gobierno de Colombia-MEN (2002). *Decreto 1278*, MEN. https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-86102_archivo_pdf.pdf

Gobierno de Colombia-MinTIC (2016). *Con formación docente las TIC generan impacto en la educación*, MinTIC, https://www.mintic.gov.co/portal/inicio/Sala-de-Prensa/Noticias/15533:Con-formacion-docente-las-TIC-generan-impacto-en-la-educacion

Godino, J. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del professor de matemáticas, *UNIÓN: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *20*, 13-31.

Krippedorff, K. (2013). *Content Analysis: an introduction to its methodology*. Sage.

Leal, S. (1999). Modelação Matemática uma proposta metodológica para o curso de economia. [Tesis de Maestría Universidad Federal de Santa Catarina]. Repositorio Institucional UFSC. https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/80801

Maki, D., & Thompson, M. (1973). *Mathematical models and applications: with emphasis on the social life, and management sciences*. Prentice-Hall.

Molina-Toro, J., Rendón-Mesa, P., & Villa-Ochoa, J. (2019). Research Trends in Digital Technologies and Modelling in Mathematics Education, Eurasia *Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *15*(8), 1-13. https://doi.org/10.29333/ejmste/108438

Montes, M., Ribeiro, M., Carrillo, J., & Kilpatrick, J. (2016). Understanding mathematics from a higher standpoint as a teacher: an unpacked example”. In: C. Csíkos, A., Rausch, & J. Szitányi (Eds.), *Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. (vol. 3, pp. 315–322). PME.

OCDE (2019). *TALIS 2018 Results: Teachers and School Leaders as Lifelong Learners*. https://www.oecd.org/education/talis-2018-results-volume-i-1d0bc92a-en.htm

Padilla-Escorcia, I. (2022). Caracterización del conocimiento especializado del profesor en la modelación de las funciones trigonométricas en GeoGebra. *Revista Encuentros*, *20*(2), 23-39. https://doi.org/10.15665/encuen.v20i02-Julio-dic..2850

Padilla-Escorcia, I., & Acevedo-Rincón, J. (2022). Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas en la Enseñanza de la Modelación de la Elipse a Través de Recursos Tecnológicos. *Revista Lasallista de Investigación*, *19*(1), 67-83. https://doi.org/10.22507/rli.v19n1a4

Padilla-Escorcia, I., & Acevedo-Rincón, J. (2021), Conocimiento especializado del profesor que enseña la reflexión de la función trigonométrica seno: Mediaciones con TIC. *Eco Matemático*, *12*(1), 93-106. https://doi.org/10.22463/17948231.3072

Padilla-Escorcia, I., & Acevedo-Rincón, J. (2020). El Conocimiento especializado del profesor que enseña matemáticas: Mediaciones con TIC para las funciones trigonométricas. In *Série Educar Matemática, Brasil*. (v. 43, p. 109 – 118). http://dx.doi.org/10.36229/978-65-86127-63-8

Padilla-Escorcia, I. (2020). *Una caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas para el uso efectivo de las TIC en la enseñanza*. Tesis de Maestría, Colombia, Universidad del Norte – Programa de Maestría en Educación.

Parra-Zapata, M., Rendón-Mesa, P., Ocampo-Arenas, M., Sánchez-Cardona, J., Molina-Toro, J., & Villa-Ochoa, J. (2018). Participación de profesores en un ambiente de formación online. Un estudio en modelación matemática", *Educación Matemática*, 30(1), 185–212. https://doi.org/10.24844/EM3001.07

Ponte, J. (1992). Concepções dos professores de matemática e processos de formação. In: J. P. Ponte (Ed.) *Educação matemática: Temas de investigação*. (p. 185-239). https://repositorio.ul.pt/handle/10451/2985

Romo-Vázquez, A., Barquero, B., & Bosch, M. (2019). El desarrollo profesional online de profesores de matemáticas en activo: una unidad de aprendizaje sobre la enseñanza de la modelización matemática. *Uni-pluriversidad*, *19*(2), 161–183. https://doi.org/10.17533/udea.unipluri.19.2.09

Rosa, M., & Orey, D. (2019). Mathematical modelling as a virtual learning environment for teacher education programs. *Uni-pluriversidad*, *19*(2), 80–102. https://doi.org/10.17533/udea.unipluri.19.2.04

Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A. (2005). Elementary Teacher´s Mathematics Subject Knowledge: The Knowledge Quartet and the Case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *8*(3), 255-281. https://doi.org/10.1007/s10857-005-0853-5

Santana, N., & Climent, N. (2015). Conocimiento especializado del profesor para la utilización de GeoGebra en el aula de matemáticas. *Números*, *88*, 75-91.

Schwab, J. (1978). Education and the structure of the disciplines. In: I. Westbury & N. J. Wilkof (Eds.), *Science, curriculum, and liberal education* (pp. 229-272). University of Chicago Press.

Shulman, L. (1986). *Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching*: American Educational Research Association, 4-14.

Simons, H. (2011). *El estudio de caso: Teoría y práctica.* Morata.

Stake, R. (2005). Qualitative Case Studies. In: N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.) *The Sage handbook of qualitative research*, (443 – 466).

Stake, R. (2010). *Qualitative research. Studying how things work*. Gilford.

Verschaffel, L., & De corte, E. (1997). Teaching Realistic Mathematical Modeling in the Elementary School: A Teaching Experiment with Fifth Graders. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(5), 577-601. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.28.5.0577

Villa-Ochoa, J. (2007). La modelación como proceso en el aula de matemáticas: un marco de referencia y un ejemplo. *Tecno-Lógicas*, *19*, 63-85. https://doi.org/10.22430/22565337.505

Villa-Ochoa, J. (2015). Modelación matemática a partir de problemas de enunciados verbales: un estudio de caso con profesores de matemáticas. *Magis*, *8*(16), 133-148. https://doi.org/10.11144/Javeriana.m8-16.mmpe

Villa-Ochoa, J., Bustamante, C., Berrio, M., Osorio, J., & Ocampo, D. (2009). Sentido de Realidad y Modelación Matemática: el caso de Alberto. *Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, *2*(2), 159-180.

Villa-Ochoa, J., & Ruiz, H. (2009). Modelación en educación matemática: una mirada desde los lineamientos y estándares curriculares colombianos, *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, *27*, 1-21.

Villa-Ochoa, J., González, D., & Carmona, J. (2018). Modelación y Tecnología en el Estudio de la Tasa de Variación Instantánea en Matemáticas, *Formación Universitaria*, *11*(2), 25 -34. http://doi.org/10.4067/S0718-50062018000200025

Villa-Ochoa, J., Sánchez-Cardona, J., & Rendón-Meza, P. (2020). Evaluación formativa del conocimiento de los futuros profesores sobre modelación matemática. In: *Anales del 5to Encuentro Internacional de Investigación en Educación Matemática*.

Villarreal, M., Esteley, C., & Smith, S. (2018). Pre-service teachers' experiences within modelling scenarios enriched by digital technologies. *ZDM-Mathematics Education*, *50*, 327–341. https://doi.org/10.1007/s11858-018- 0925A