**Compresión del concepto razón a través del modelo de Pirie y Kieren**

**RESUMEN**

**Contexto**: En Matemática Educativa, un tema de competencia investigativa es la comprensión de conceptos en matemáticas, debido, en parte, a los procesos cognitivos que se pueden promover para alcanzarla. **Objetivos y participantes:** En este sentido, esta investigación tuvo como objetivo analizar el proceso de comprensión de estudiantes de sexto año de educación básica (11-12 años), al resolver tareas sobre el concepto de razón. El estudio se fundamentó en el modelo teórico de Pirie y Kieren. **Diseño:** Se siguió un enfoque cualitativo, y el diseño de la investigación fue un estudio de caso. **Recopilación y análisis de datos:** Los datos se recolectaron a través de un cuestionario (tarea) y una entrevista. **Resultados:** Los resultados indicaron que los estudiantes no lograron formalizar su proceso de comprensión en relación con el concepto de razón. **Conclusión:** Debido a las dificultades que presentan en las estrategias matemáticas que utilizaron en el desarrollo del cuestionario.

**Palabras claves**: Matemática Educativa. Comprensión. Razón. Fracción. Educación básica.

**RESUMO**

**Contexto:** Em Matemática Educacional, um tópico de competência de pesquisa é a compreensão de conceitos em matemática, devido, em parte, aos processos cognitivos que podem ser promovidos para alcançá-la. **Objetivos e participantes:** Nesse sentido, esta pesquisa teve como objetivo analisar o processo de compreensão de alunos do sexto ano do ensino fundamental (11-12 anos), na resolução de tarefas sobre o conceito de razão. O estudo foi baseado no modelo teórico de Pirie e Kieren. **Desenho:** foi seguida uma abordagem qualitativa e o desenho da pesquisa foi um estudo de caso. **Coleta e análise de dados:** Os dados foram coletados por meio de questionário (tarefa) e entrevista. **Resultados:** os resultados indicaram que os alunos não conseguiram formalizar seu processo de compreensão em relação ao conceito de razão. **Conclusão:** Pelas dificuldades que apresentam nas estratégias matemáticas utilizadas no desenvolvimento do questionário.

**Palavras-chave**: Matemática educacional. Entendimento. Razão. Fração. Educação básica.

**INTRODUCCIÓN**

Las matemáticas son una asignatura de gran importancia debido a que se vinculan con otras ciencias, sin embargo, parte de su contenido abstracto hace de ellas una asignatura no deseada por muchos estudiantes por las dificultades a las que se enfrentan para su aprendizaje. Ello ha desencadenado un múltiple de investigaciones en el campo de la Educación Matemática, desde la parte histórica, cognitiva, didáctica, entre otras. Por ejemplo, desde la parte cognitiva, un tema que ha tomado relevancia, es el estudio o valoración de la comprensión de un concepto matemático, donde se han generado diversos modelos o teorías que apuntan a la obtención de ciertas categorías de comprensión, con el objetivo de fortalecer la enseñanza o aprendizaje de los conceptos matemáticos (Çalişici, 2018; Autor & Autor, 2021).

Particularmente, en educación básica primaria (6-12 años de edad), diversas investigaciones en el campo de la Educación Matemática, han señalado que los temas de matemáticas son difíciles de comprender por los estudiantes (Lamon, 2007; Fernández, Figueras, Monzó & Puig, 2009; Fernández & Llinares, 2010; Buforn, Llinares & Fernández; 2018), entre ellos, el tema relativo al razonamiento proporcional, el cual abarca los conceptos de razón, proporción y fracción, los cuales son complicados de comprender tanto para estudiantes como docentes (Lamon, 2020; Sanchez, 2013). En este nivel educativo, el aprendizaje de los conceptos de razón y proporción en los temas relacionados a las fracciones, constituye la base para comprender conceptos trascendentes y transversales curricularmente como el de porcentaje, ecuaciones y problemas de velocidad. Por ello, que es de vital importancia, estudiar el tema de la razón y detectar las dificultades que los estudiantes manifiestan al momento de desarrollar actividades que involucren la utilización del tópico.

Monteiro (2003) determinó que los profesores de matemáticas de la educación básica primaria, presentan dificultades cuando resuelven problemas que involucran el concepto de razón y proporción, debido a la falta de comprensión de los conceptos cuando eran estudiantes de la escuela primaria y secundaria. Asimismo, Fernández et al. (2009) manifestaron que tanto estudiantes como docentes presentan dificultad para construir y apropiarse correctamente del concepto de razón. Una de las dificultades, es que no logran desvincular a la razón del proceso aritmético de operar el numerador con el denominador. Al mismo tiempo, Ramírez y Block (2009) expresaron que, el tema de la proporcionalidad se presenta confuso en el currículo, ya que los planes de estudios y libros de texto de referencia para los docentes, no presenta una relación o diferencia pertinente entre las nociones de razón y fracción, por tanto, para mejorar la comprensión de los conceptos, se requiere una reorganización curricular.

Por su parte, en el currículo de la escuela primaria mexicana, la enseñanza del concepto de razón no está claramente definido, así como el vínculo entre el concepto de fracción, limitándolo sólo a una relación de representación (Ramirez & Block, 2009). Por ejemplo, en su plan y programa de estudio 2011, la noción de razón se evidencia en el bloque III en el tema proporcionalidad y funciones. Su contenido hace referencia a la comparación de razones en casos simples. Ahora, en el libro de texto de sexto grado (para el maestro), se presenta una característica del concepto “Una razón puede representarse con un número entero, fraccionario, decimal o mediante un porcentaje”. Algunos ejemplos que presentan son: 2 de cada 5 estudiantes son hombres, la cantidad de hombres puede representarse como 2/5, 0.4 𝑜 40% (Rosales et al., 2015, p.162).

Por otra parte, Çalışıcı (2018) establece que la dificultad de los estudiantes, se debe a que memorizan las fórmulas y el algoritmo en lugar de comprender el concepto razón y que, además, perciben el numerador y el denominador de fracciones como dos números enteros diferentes y no como una relación de magnitud entre dos cantidades. Todas las falencias, se evidencian en los resultados de pruebas estandarizadas de matemática, tanto a nivel internacional como nacional (PISA y PLANEA respectivamente), muestran que, en México el 57% de los estudiantes no alcanza el nivel básico de competencias en matemáticas y se encuentran por debajo del promedio (490 puntos) de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE). Lo cual, pone de manifiesto que, los estudiantes que no alcanzan el nivel básico en matemáticas, es decir, pueden realizar procedimientos rutinarios (operaciones aritméticas en situaciones simples) pero presentan dificultades para identificar cómo una situación sencilla del mundo real puede ser representada matemáticamente (OCDE, 2016).

A nivel nacional, es conveniente destacar los resultados de las pruebas del plan nacional para la evaluación de los aprendizajes (PLANEA), aplicados a estudiantes de sexto grado de primaria en el año 2015, los cuales reflejan que, al término de dicho ciclo escolar, 6 de cada 10 estudiantes no han logrado adquirir los aprendizajes clave de Matemáticas. Concretamente, el 60% de los estudiantes de sexto grado de primaria alcanzaron el nivel I de logro (insuficiente) en Matemáticas, nivel donde se trabaja con el conjunto de los números naturales. Y el porcentaje más bajo de los estudiantes alcanzó el nivel IV de logro sobresaliente, nivel donde se trabajan con el razonamiento proporcional (razón, proporción y fracción) (INEE, 2015).

Debido a que los resultados de las investigaciones en mención y las pruebas estandarizadas muestran que los estudiantes de la educación básica, no han logrado adquirir aprendizajes que les permita comprender el razonamiento proporcional, es natural preguntar, ¿la falta de comprensión a qué se debe? ¿cuáles son los factores que impiden una buena comprensión del concepto razón? ¿cuál es la manera de proceder de los estudiantes al desarrollar una actividad que demande el uso del razonamiento proporcional?

Particularmente en esta investigación, se buscó conocer el proceso que siguen los estudiantes en la construcción del concepto de razón, para ellos se usó el modelo teórico de Pirie y Kieren (1994) buscando profundizar dónde radica la falta de comprensión que presentan los estudiantes de la escuela primaria sobre el tópico en estudio. Así, el objetivo de esta investigación fue analizar la comprensión de estudiantes de sexto año de nivel básico (11-12 años) cuando resuelven tareas sobre el concepto razón, representado mediante fracción, a partir de los niveles de comprensión propuestos por Pirie y Kieren. Es decir, se analizará el proceso continuo que realizan los estudiantes para concretar el objeto razón en tareas que promueven el uso de este concepto.

**BASES TEÓRICAS**

Se utilizó el modelo de Pirie y Kieren (1994), el cual surgió desde una perspectiva constructivista. El modelo describe el proceso de la comprensión matemática de manera dinámica, recursiva, nivelada pero no lineal (Pirie & Kieren, 1989), además reconoce a la comprensión, como *un proceso continuo que realiza un sujeto para concretar un objeto, el cual se construye de manera iterativa a partir de sus experiencias, para así construir, fortalecer o modificar su conocimiento.*

El uso del modelo teórico en esta investigación, posibilitó profundizar acerca del proceso de compresión que establecen los estudiantes al resolver tareas de manera colectiva (en grupos) relacionadas con el concepto razón. El modelo, se encuentra estructurado en ocho niveles (ver figura 1), que son usados para describir el proceso de comprensión que tienen estudiantes sobre un concepto matemático. En dichos niveles se puede progresar, no sólo avanzando, sino también retrocediendo a un nivel anterior, con el objetivo de reflexionar, o volver a trabajar acerca de comprensiones previas sobre un concepto matemático (Delgado, Codes, Monterrubio & Gonzalez, 2014). Los ocho niveles del modelo de comprensión expuesto por Pirie y Kieren son:

**Figura 1**

*Niveles del modelo de Pirie y Kieren de 1994 (Pirie y Kieren, 1994)*



*Primitive Knowing (PK).* En este primer nivel se empieza el proceso de la comprensión matemática. El nivel PK se refiere a todo lo que el estudiante conoce y sabe hacer antes de confrontarse con el nuevo concepto matemático a estudiar. Es importante señalar que, la palabra Primitive Knowing no se debe confundir con un nivel bajo de conocimiento matemático. Como Pirie y Kieren (1994) lo afirman: “Primitivo aquí no implica matemáticas de bajo nivel, sino que es más bien el punto de partida para el crecimiento de cualquier comprensión matemática particular” (p.170). Por ejemplo, en el desarrollo del cuestionario (figura 3) los estudiantes deben partir de sus conocimientos previos relacionados con la comparación y equivalencia de unidades de medida (masa), ya que ambas situaciones tienen la misma unidad (1 kilo de naranja).

*Image Making (IM).* En el segundo nivel se evidencia cuándo un estudiante es capaz de hacer distinciones con base a sus capacidades y conocimientos anteriores, además, realiza acciones (físicas o mentales) con el fin de crear una idea del nuevo concepto matemático. Las imágenes no siempre son representaciones pictóricas, sino que se pueden expresar mediante el lenguaje o acciones específicas de los estudiantes. Particularmente, los estudiantes al lograr identificar la unidad de partidad de ambas situaciones de la tarea (1 kilo de naranjas), se encuentran en la capacidad de utilizar sus conocimientos previos para relacionarlos con las características propias del concepto matemático.

*Image Having (IH).* En este nivel, el estudiante es capaz de emplear una construcción mental sobre el concepto matemático, pero sin la necesidad de trabajar con ejemplos particulares o realizar una abstracción del concepto mismo; asimismo, el estudiante se ve en la necesidad de reemplazar las imágenes asociadas al concepto por una imagen mental del mismo. En específico, este nivel se alcanza, por ejemplo, cuando se logra establecer una representación (simbólica, pictórica, gráfica, entre otras) de la situación asociada al objeto matemático.

*Property Noticing (PN).* Este nivel se alcanza cuando el estudiante puede utilizar o combinar aspectos de las imágenes mentales que ya posee, para construir propiedades específicas del concepto y tratar de generalizarlas. En concreto, los estudiantes manifiestan la capacidad de utilizar estrategias que les permita comparar y elegir una razón matemática (representada como fracción), por ejemplo, para determinar el costo por unidad de cada naranja según las dos opciones de compra (mercado Baltazar o huerta de don José).

*Formalising (F).* Da evidencia de cuándo el estudiante conoce las propiedades y es capaz de abstraer características comunes de esa imagen; además, en este quinto nivel, el estudiante trabaja el concepto matemático como un objeto formal y no hace referencia a una acción o imagen particular. En particular, en esta investigación se alcanza este nivel cuando el estudiante logra identificar correctamente la unidad de partida (1 kilo); crear y establecer una representación de la situación relacionada con el concepto de razón. Además, puede desvincularse de la representación y utilizar propiedades del concepto para lograr una generalización (mejor opción de compra del kilo de naranjas). El estudiante, puede establecer que en la situación problema no importa la cantidad de naranjas (9 o 7), sino el menor precio establecido (huerta de don José).

*Observing (O).* Se logra cuando el estudiante utiliza su pensamiento y lenguaje matemático formal, realizando reflexiones sobre enunciados formales y estableciendo conexiones entre conceptos matemáticos, que le permitan deducir patrones y regularidades al momento de expresar algoritmos y teoremas. En concreto, se observa cuando los estudiantes logran alcanzar correctamente el nivel anterior (formalising) y expresan coherente y formalmente la razón que utilizan para determinar el resultado de la situación problema.

*Structuring (S).* En este nivel el estudiante debe reflexionar en sus observaciones formales como una teoría y realizar justificaciones o verificaciones de declaraciones a través de un argumento lógico o metamatemático.

*Inventising (I).* En el último nivel, y se alcanza cuando el estudiante tiene la capacidad de desvincularse de las situaciones concretas y determinadas del concepto, ya que tendrá una comprensión completa del mismo, para luego emprender otras perspectivas que lo conduzcan a realizar hipótesis de otro problema o concepto. Como lo expresaron Pirie y Kieren (1994) “Una persona en este nivel tiene una comprensión estructurada completa y por lo tanto puede ser capaz de romper con los preconceptos que provocaron esta comprensión y crear nuevas preguntas que podrían convertirse en un concepto totalmente nuevo” (p. 171).

En relación con las características del modelo teórico, una de las más importante es el proceso dinámico de redoblar (MEEL, 2003). El *Folding back* (redoblar o volver hacia atrás), se identifica cuando una persona que está en un nivel de comprensión superior del modelo, vuelve a un nivel inferior al que ya estaba, para realizar una reexaminación de la comprensión, pero de una forma más enriquecida a la que tenía cuando trabajó en ese nivel.

**Objeto Matemático**

La noción de razón a lo largo de la historia, se ha manifestado en dos contextos: entre números y entre cantidades de magnitud, en ambos, se han establecido relaciones con otros conceptos. Como, por ejemplo, fracción y cociente (Gairín & Oller, 2012). Sin duda, una de las dificultades que se presenta para comprender el concepto de razón, es la ambigüedad que presenta con los conceptos fracción y cociente (Ramírez & Block, 2009).

*Definición:* la razón es un número abstracto, que expresa solo la relación que hay entre dos magnitudes, por lo que carece de especie. Geométricamente, es el número que resulta de comparar por cociente dos magnitudes de la misma especie. En general, si $a$ y $b$ son cantidades de una misma magnitud, su razón es el cociente o cociente indicado que resulta de dividir la medida de $a$ entre la medida de $b$, se llama razón entre $a$ y $b$, y se escribe $\frac{a}{b}$ o bien, $a:b $(Caballero, Martinez & Bernárdez, 1970).

Por ejemplo, dada una colección de objetos (canicas) (Figura 2), se puede decir que las canicas blancas y negras están a una razón de 2 a 3 o $\frac{2}{3}$, es decir, que por cada 2 canicas blancas hay 3 canicas negras; también se puede interpretar que las canicas negras y blancas están a una razón de 3 a 2 o $\frac{3}{2}$, es decir, que por cada 3 canicas negras hay 2 blancas.

**Figura 2**

*Ejemplo pictórico del concepto de razón (Rojas, 2010)*



**METODOLOGÍA**

La investigación es cualitativa, puesto que se interpreta el proceso de comprensión de estudiantes sobre un concepto matemático. La técnica empleada es la observación de campo, lo que permite realizar una observación directa y presencial de las acciones de los estudiantes en el aula de clases, plasmadas en notas de campo detalladas de dichos sucesos (Mcmillan & Schumacher, 2005).

Para ello, se realizó un estudio de caso, con la participación de cuatro estudiantes (11 – 12 años) inscritos al sexto grado de la educación básica mexicana de una escuela primaria de la ciudad de Chilpancingo de los Bravo estado de Guerrero, dos estudiantes presentaban desempeño académico alto (Caso I) y los otros dos (Caso II) rendimiento académico bajo. Se asignaron códigos para cada estudiante según el caso que conformaban, al caso I se les asignó los códigos E1 (estudiante 1) y E2 (estudiante 2), para el caso II fueron E3 (estudiante 3) y E4 (estudiante 4).

Los casos ya habían trabajado el bloque III del programa de estudio (SEP, 2011), bloque en el cual se presenta la caracterización del concepto de razón. Para recolectar los datos se usó el cuestionario (figura 3), la aplicación se llevó a cabo en dos sesiones, una por cada caso de estudio. Las sesiones fueron video-grabadas y se realizaron notas de clase. Asimismo, se realizó una entrevista para clarificar el proceso de resolución de la tarea. Los datos fueron transcritos y se confrontaron, interpretaron y se analizaron en relación con las características y niveles de acción del modelo teórico de Pirie y Kieren (1994).

**El cuestionario**

El cuestionario consistió de una tarea de siete incisos (figura 3), en términos generales, con los cinco primeros se busca que los estudiantes reflexionen sobre dos situaciones para decidir cuál es la óptima, de acuerdo a la comparación de magnitudes, es decir, de acuerdo a la comparación de razones. Los últimos dos incisos, requieren que el estudiante utilice sus conocimientos previos sobre porcentaje, para así, identificar que ambas situaciones (mercado Baltazar y huerta de don José) son óptimas. El cuestionario se adaptó de una actividad del libro Desafíos Matemáticos de sexto grado edición para el maestro (Rosales et al., 2015). Los materiales y recursos que utilizaron los estudiantes para resolverla fueron hojas de papel, lápiz, goma (borrador) y sacapuntas.

**Figura 3**

*Tarea “Qué cantidad de naranjas quiero” (Adaptación de Rosales et al., 2015).*



Particularmente, con el inciso a) se buscó que el estudiante identificara que ambas situaciones (mercado Baltazar y huerta de don José) se expresan con la misma unidad de partida, por tanto, se puede realizar una comparación de razones para poder decidir cuál es la situación óptima para adquirir las naranjas. Además, en este inciso, de acuerdo al modelo teórico, el estudiante puede avanzar en su proceso de comprensión, desde el nivel *Pk* o *IM*, dependiendo de la profundidad de análisis sobre el enunciado.

Con el inciso b) se quiso conocer la trascendencia de la representación verbal del enunciado a otro tipo de representación (numérica, pictórica o gráfica) que los estudiantes manifestaran. Específicamente, desde el modelo teórico lo relacionamos con el nivel *IH*. El inciso c) se diseñó con la finalidad de que los estudiantes a partir de representaciones creadas por ellos mismos, interpretaran y compararan situaciones para elegir la razón que permite elegir la situación óptima para comprar las naranjas. El d) tuvo como objetivo que los estudiantes modelaran una situación de la vida real a un lenguaje matemático (representación de fracciones). Con relación al modelo, se buscó que los estudiantes reflexionaran sobre la imagen que crearon de la situación, para poder avanzar al nivel *NP*.

El inciso e) tuvo como objetivo que los estudiantes pusieran en juego sus habilidades para interpretar y argumentar las estrategias de comparación utilizadas para elegir la situación óptima para comprar el kilo de naranjas. Con base en el modelo teórico, con este inciso se buscó que el estudiante logrará avanzar al nivel *F*, logrando desprenderse de la imagen que creó, proporcionando argumentos para llegar a una generalización.

Finalmente, en los incisos f) y g), se prevé que los estudiantes consideren una condición diferente para reinterpretar el problema de inicio. Ya que, a partir de sus conocimientos previos, deben establecer el nuevo costo del kilo de naranjas en el mercado Baltazar (*PK*), para así establecer las nuevas razones matemáticas (*IM* o *IH*), empezar a trabajar en ellas (*NP*), para lograr seleccionar la mejor opción de compra (*F*).

**ANÁLISIS Y RESULTADOS**

Esta sección se organiza en dos apartados, proceso de comprensión del caso I y proceso de comprensión del caso II, los cuales, a su vez, se dividieron en dos categorías diferenciadas de acuerdo a las respuestas dadas por los estudiantes y el objetivo de la tarea: *elección de la mejor razón* y *comparación de razones*.

**Proceso de comprensión del caso I (C1)**

Se presenta el análisis de la comprensión, es decir, se presenta el análisis del proceso de las estructuras del conocimiento de los estudiantes del caso I (E1 y E2), con base en el modelo teórico de Pirie y Kieren (1994) al resolver la tarea (Figura 3).

*Elección de la mejor razón (categoría 1)*

Los estudiantes del caso I, inicialmente leyeron por separado y con detenimiento el enunciado de la tarea, fijándose en los datos que plantean las dos situaciones presentadas (precio normal y con descuento). Todo con el objetivo de fijarse que las dos situaciones son comparables, puesto que comparten la misma unidad de medida. Pero los estudiantes, relacionaron la tarea con la búsqueda del costo por unidad de naranja en cada una de las dos situaciones, evidenciando que no identificaron o interpretaron la situación problema, por lo que comenzaron enfrentándose al problema desde el nivel *Image Making.*

E2: *Tenemos que saber qué cuesta cada naranja aquí y aquí…* [Señala los datos que se presenta en la tarea en relación con las dos situaciones].

E1: *¡Sí! Tenemos que hacer las fracciones* [se refieren a estas representaciones 9/10 𝑦 7/8].

Los estudiantes, realizaron una representación simbólica de las dos situaciones, lo que dio evidencia que avanzaron a un nivel exterior del modelo *Image Having,* en donde buscaban conocer el valor de cada unidad de naranja, por eso expresaron la relación del costo total por el número de naranjas (ver Figura 4).

**Figura 4**

*Representación simbólica de los estudiantes caso I, categoría 1 (Elaboración de los estudiantes caso I).*



En este nivel, los estudiantes disponían de los datos y comenzaron a relacionarlos con una estrategia matemática que les permitió resolver la tarea. La estrategia que utilizaron fue la operación aritmética de división (Figura 5), para encontrar el valor de cada unidad de naranjas en cada situación. Este procedimiento evidenció que alcanzaron el nivel *Property Noticing*, puesto que trabajaron sobre la imagen que poseían.

E1: *hay que dividir 10 entre 9 y 8 entre 7*.

**Figura 5**

*Proceso matemático de los estudiantes del caso I, categoría 1 (Elaboración de los estudiantes caso I).*



Una vez encontrado el valor por unidad de cada naranja en las dos situaciones de la tarea, los estudiantes construyeron una representación pictórica de la cantidad de naranjas (*Image Having*) y la asociaron con el costo unitario que determinaron con el proceso matemático de la división. Se puede identificar que se desencadenó un *Folding Back*, ya que los estudiantes retrocedieron a un nivel inferior que ya habían superado, sin embargo, como se observa en la Figura 6, los estudiantes alcanzaron (al regresar) una comprensión más sólida, posteriormente lo que hicieron fue asociar el valor encontrado con la representación pictórica.

**Figura 6**

*Representación pictórica, situación 1 y 2 respectivamente, caso I (Elaboración de los estudiantes caso I).*

 

Los estudiantes realizaron abstracciones de la nueva imagen, lo que indicó que avanzaron nuevamente al nivel *Property Noticing*. En este nivel los estudiantes conjeturaron sobre cuál era la mejor razón matemática que les convenía elegir para comprar las naranjas en el mercado o la huerta.

**Figura 7**

*Abstracciones realizadas por los estudiantes del caso I, categoría 1 (Producción de los estudiantes del caso I).*

****

E1: *Yo digo que en el mercado Baltazar es más económica, porque cada naranja cuesta $1,1 y en la huerta de don José cada naranja cuesta $1,14. Así que creo que conviene más esta* [señala la operación realizada con 10/9].

E2: *¡Sí! es que cada naranja está más barata aquí* [señala el proceso realizado con la situación del mercado] *que acá* [señala proceso realizado con huerta de don José].

No obstante, los estudiantes no lograron alcanzar el nivel *Formalising*, puesto que las conclusiones que obtuvieron fueron erróneas. Esto como consecuencia de que al iniciar la tarea no identificaron la unidad de partida en las que se daban ambas situaciones.

**Figura 8**

*Conclusión de los estudiantes caso I, categoría 1 (Producción de los estudiantes del caso I).*



En la figura 9, se esquematiza el proceso que siguieron los estudiantes hasta el momento en que determinaron la elección de la mejor razón matemática (refiriéndose a la comparación de razones sobre el precio de las naranjas). En la siguiente figura, las flechas indican que el caso en estudio, logró ese nivel en su proceso de comprensión y el grosor de la línea representa el desarrollo del proceso de comprensión.

**Figura 9**

*Estructura de conocimiento del caso I, para elegir la mejor razón (Elaboración propia de los autores).*



*Comparación de razones (categoría 2)*

Los estudiantes primero encontraron el valor del descuento de acuerdo a la oferta, por lo que comenzaron enfrentándose al problema desde el nivel *Primitive Knowing*, ya que esos conocimientos fueron su punto de partida en relación al proceso.

E1: *Lo primero que tenemos que hacer es…*

E2: *Sacar el porcentaje del precio anterior.*

E1: *Si ajá… ¿De este precio?* [Señala el costo de la huerta de don José $8].

E2: *No, ¿De diez no? Por qué dice: si en el mercado Baltazar el kilo de naranjas se oferta con un 20%...*

E1: *Entonces es esta* [señala el costo del mercado Baltazar] *¡Ah!, sí es diez.*

Inmediatamente, como ya sabían cuáles eran los datos por utilizar escogieron una estrategia para calcular el 20% de $10. Durante la entrevista, el caso I expresó que el proceso utilizado fue el explicado por su profesor para obtener el porcentaje de una cantidad numérica, el cual consiste en realizar una descomposición aditiva en porcentajes más fácil de calcular, tal como se evidencia en la Figura 10. El proceso que realizaron da evidencia de que, con los conocimientos previos se alcanzó el nivel *Property Noticing* sin pasar por los dos niveles anteriores (*Image Making & Image Having*). Esto se debe a la complementariedad de conocimientos para construir propiedades específicas del concepto, logrando generalizarlas.

**Figura 10**

*Proceso para calcular el 20% de $10, estudiantes caso I, categoría 2 (Elaboración de los estudiantes caso I).*



A partir de este proceso obtienen el nuevo costo de las naranjas en el mercado Baltazar con el descuento ofertado.

E1: *Es $2 el descuento… ¿y luego se lo restamos?*

E2: *Sí, a diez le restamos dos.*

E1: *El nuevo precio es $8.*

**Figura 11**

*Respuesta de los estudiantes caso I, con base al nuevo costo del kilo de naranjas, categoría 2 (Elaboración de los estudiantes caso I).*

**

Luego, los estudiantes realizaron un *Folding Back* con una representación simbólica de la situación (descuento en el mercado), expresando una relación del costo del kilo de naranjas con el número total de ellas. Encontrándose ahora en el nivel de *Image Having.*

**Figura 12**

*Representación simbólica de la nueva situación de los estudiantes caso I, categoría 2 (Elaboración de los estudiantes caso I).*



E2: *Pero tenemos que hacer esto* [señala el proceso que realizaron anteriormente para conocer el valor de cada unidad de naranja*] porque aquí ya cuesta esto* [señala el nuevo costo del kilo de naranjas con el descuento realizado] *y aquí cuesta menos.*

E2: *Entonces sería ocho novenos ¿no? Volvamos hacer la fracción y la división.*

E1: *Ajá.*

De la interacción, los estudiantes relacionaron la actividad con el procedimiento de división realizado con anterioridad (Figura 5) para encontrar el valor por unidad de cada naranja y utilizan la misma estrategia para resolver la tarea, es decir, aplican la operación de división (Figura 13). Este proceso evidencia que el caso I ha alcanzado nuevamente el nivel *Property Noticing*. Lo que confirma que, el proceso de comprensión se construye a partir de experiencias y se realiza de una manera iterativa, para lograr construir, fortalecer o modificar el conocimiento.

**Figura 13**

*Proceso matemático para calcular el costo de las naranjas por unidad de los estudiantes caso I, tarea 1 (Elaboración de los estudiantes caso I).*



Finalmente, los estudiantes sintetizan la información del proceso realizado y se desligan por completo de la imagen concreta considerando el concepto como objeto formal, determinando dónde les conviene comprar las naranjas después del descuento realizado en el mercado Baltazar, lo que indica que se encuentran en el nivel *Formalising.*

*E1: Ahora cuesta cada naranja $0,8 así que…*

*E2: En el mercado la naranja está más abarata que antes.*

*E1: Ajá. Sí, en el mercado.*

**Figura 14**

*Respuesta de los estudiantes del caso I, categoría 2 (Elaboración de los estudiantes caso I).*



En la figura 15 se esquematiza el proceso de comprensión que delinearon los estudiantes al resolver la tarea. Se señala nuevamente que, en la siguiente figura las flechas indican que el caso en estudio, logró ese nivel en su proceso de comprensión y el grosor de la línea representa el desarrollo del proceso de comprensión.

**Figura 15**

*Estructura de conocimiento del caso I, para comparar las razones (Elaboración propia de los autores).*



**Proceso de comprensión del caso II (C2)**

En este segundo apartado, se presenta el análisis de la comprensión del caso II, es decir, se presenta el análisis del proceso de las estructuras del conocimiento de los estudiantes con base en el modelo teórico de Pirie y Kieren (1994) al resolver la tarea (Figura 2) en torno al concepto de razón.

*Elección de la mejor razón (categoría 1)*

Los estudiantes del caso II, iniciaron leyendo en conjunto el enunciado de la tarea, identificando los datos relativos al precio que plantean ambas situaciones presentadas (precio normal y con descuento). Así, organizaron una hoja de trabajo en dos columnas (datos y operación), sin embargo, los estudiantes no lograron identificar o interpretar la unidad de partida de ambas situaciones (kilo de naranjas).

**Figura 16**

*Organización de los datos por los estudiantes caso II, categoría 1 (Elaboración de los estudiantes caso II).*



Los estudiantes iniciaron a resolver la tarea en el nivel *Image Having*, puesto que tenían una imagen mental de la situación. Posteriormente, cambiaron esta representación por una gráfica cartesiana, manteniéndose en el mismo nivel del modelo. Los estudiantes presentaron mayor dificultad en relacionar los datos de la tarea con un objeto matemático, en comparación con los del caso I.

E3: *Pero es una gráfica, a lo mejor podríamos hacer la gráfica así…* [Construye una gráfica cartesiana en una hoja].

E4: *No, así no es.*

**Figura 17**

*Segunda representación gráfica, estudiantes caso II, categoría 1 (Elaboración de los estudiantes caso II).*



Los estudiantes tuvieron dificultad para representar la situación de las naranjas en la gráfica que construyeron (Figura 17), por lo que realizaron otra representación de la situación (Figura 18), lo que indicó que los estudiantes se mantenían en el mismo nivel (*Image Having*).

**Figura 18**

*Representaciones simbólicas, estudiantes caso II categoría 1 (Elaboración de los estudiantes caso II).*

 

E4: *Pero tenemos que hacer las fracciones primero… para saber cuánto cuesta cada naranja* [borra las dos circunferencias que ya había construido].

E3: *Ajá.*

E4: *Sería 10 entre 9 y tenemos que dividir.*

E4: *$1 cuesta cada naranja.*

E4: *En ambos lugares cuestan lo mismo.*

E3: *El resultado es el mismo* [se refiere al proceso que realizaron de división].

Los estudiantes del caso II, al igual que el caso I, no lograron identificar que ambas situaciones son comparables porque poseen la misma unidad de partida (un kilo), sin embargo, determinaron el costo por unidad de naranja en cada una de las dos situaciones, usando la división. Para ello, trabajaron sobre la nueva imagen que construyeron (Figura 18), utilizando la misma estrategia de los estudiantes del caso I, la operación aritmética de división (Figura 19). Este procedimiento evidencia que los estudiantes avanzaron al nivel *Property Noticing.*

**Figura 19**

*Proceso matemático de los estudiantes caso II, categoría 1 (Elaboración de los estudiantes caso II).*

 

Como se observa en la Figura 19, los estudiantes manifestaron problemas para realizar la operación aritmética de división, lo cual pone de manifiesto las necesidades que tienen en sus conocimientos previos. Posteriormente, realizaron otra representación pictórica de las situaciones (Figura 20). Este proceso desencadenó nuevamente en los estudiantes un *Folding Back*, puesto que retrocedieron a un nivel inferior, el cual, ya habían superado (*Imagen Having*) no obstante, lograron relacionar las abstracciones realizadas en el nivel de *Property Noticing*. Por ejemplo, colocaron el valor unitario a cada naranja que representaron con una circunferencia (Figura 20).

**Figura 20**

*Representación pictórica de los estudiantes caso II, categoría 1 (Elaboración de los estudiantes caso II).*



E4: *¿Entonces? Son iguales…*

E3: *A eso me refería*… *el número de piezas va a aumentar la cantidad que cuesten.*

E3: *Podemos poner que en los dos lados cuestan lo mismo.*

*E4: En los dos lugares nos conviene de acuerdo a las operaciones.*

*E3: Sí.*

La interacción de los estudiantes, evidencia que regresan al nivel *Property Noticing*, es decir, al proceso de determinar en cuál de las dos situaciones (Mercado y huerta de don José) convendría comprar las naranjas. Además, concluyen erróneamente, pues señalan que es conveniente comprar en los dos lugares ya que se trata de lo mismo, pero esto se debe a las dificultades en el proceso aritmético de la división (Figura 19), lo que conlleva a no superar las dificultades en la comparación y elección de una razón matemática (Figura 21).

**Figura 21**

*Abstracciones realizadas por los estudiantes caso II, categoría 1 (Elaboración de los estudiantes caso II).*



En la Figura 22, se esquematiza el proceso que han seguido los estudiantes hasta el momento para determinar la elección de la mejor razón matemática (refiriéndose a la comparación de razones sobre el precio de las naranjas). Las flechas indican que el caso en estudio, logró ese nivel en su proceso de comprensión y el grosor de la línea representa el desarrollo del proceso de comprensión.

**Figura 22**

*Estructura de conocimiento del caso II para elegir la mejor razón (Elaboración propia de los autores).*



*Comparación de razones (categoría 2)*

En principio, los estudiantes discutieron que camino tenían que seguir para encontrar el valor del descuento que se realizaría con la oferta, por lo que comenzaron en el nivel *Primitive Knowing.*

E4: *Dice que se oferta con un descuento del 20%.*

E3: *Se le saca el nuevo costo del precio que decía anteriormente.*

E3: *¿A esto no?* [Señala la hoja de trabajo].

E4: *Sí. Pero no sé a cuál es.*

E3: *Mmm… Es al que mejor nos convenga. A este* [señala la situación de la huerta de don José].

E4: *No es el lado más conveniente, ambos son iguales. Pero, te saldría más barato… pagarías menos por más* [se refiere a la situación de don José].

E4: *Entonces a esta* [señala la situación de la huerta de don José].

Se observó que los estudiantes tuvieron dificultad al momento de relacionar los datos con alguna estrategia de solución a la tarea. Primero, no interpretaron correctamente a cuál de las dos situaciones se le debe aplicar el descuento mencionado y ellos optan por aplicárselo a la que mejor les convenga según sus abstracciones (huerta de don José). Además, no recuerdan como obtener el porcentaje de un valor numérico.

E4: *¿Cómo se hace?*

E3: *Pues nada más le quitamos, solamente a esto* [señala $8] *le quitamos un descuento del 20%.*

E3: *Eso lo dimos en clases, pero no recuerdo.*

E4: *A ya ya ya… préstame el lápiz.*

E4: *Colocábamos esto aquí* [realiza el mismo proceso que hicieron los compañeros del caso I].

E3: *Ah sí. Es cierto* [expresa al observar el proceso que realiza E4].

El proceso para calcular el porcentaje consistió en realizar una descomposición en sumandos de la cantidad a la que había que calcular el porcentaje, para entonces obtener el porcentaje solicitado (Figura 23). Este proceso da evidencia que los estudiantes continúan utilizando sus conocimientos previos para obtener el porcentaje de un valor numérico (*Primitive Knowing*).

**Figura 23**

*Proceso para calcular el 20% de $8, estudiantes caso II, categoría 2 (Elaboración de los estudiantes caso II).*



Se observa de la Figura 23 que los estudiantes tuvieron errores en el proceso para calcular el descuento, no obstante, expresaron que el nuevo costo del kilo de naranjas en la huerta de don José es de $6 con el descuento (Figura 24), avanzando hacia el nivel *Property Noticing.*

**Figura 24**

*Respuesta de los estudiantes caso II, con base al nuevo costo del kilo de naranjas, categoría 2 (Elaboración de los estudiantes caso II).*



Ya que habían obtenido el nuevo precio, aplicando el descuento al precio del kilo de naranjas en la huerta de don José, debían decidir nuevamente dónde comprar las naranjas, si en la huerta de don José o en el mercado, concluyendo q en la huerta de don José, pero siguieron usando el argumento de que dan más naranjas por menos dinero (Figura 25). A pesar, de que las deducciones en la comparación de razones son correctas (menor precio, misma cantidad de naranjas), se evidencia la falta de compresión lectora y las dificultades en los procesos aritméticos que realizaron.

E4: *Aquí es más barata* [señala la situación de la huerta de don José].

E4: *Porque te dan más naranjas…*

E3: *Por menos precio pues.*

**Figura 25**

*Respuesta final de los estudiantes caso II, categoría 2 (Elaboración de los estudiantes caso II).*



En la siguiente figura se esquematiza el proceso seguido por los estudiantes del caso II en la comparación de razones con igual unidad de medida. Se enfatiza que las flechas indican que los estudiantes lograron ese nivel en su proceso de comprensión y el grosor de la línea representa el desarrollo del proceso de comprensión.

**Figura 26**

*Estructura de conocimiento del caso II, para comparar las razones (Elaboración propia de los autores).*



Como se observa, el caso II alcanzó un nivel menor en el proceso de comprensión de acuerdo a Pirie y Kirien, esto debido a las dificultades que tuvieron desde el principio para la identificación de datos y cálculos aritméticos, en consecuencia, los estudiantes del caso II no lograron formalizar su proceso de comprensión en la comparación de razones.

Lo que podría explicar las diferencias en el proceso de comprensión entre los casos, sería que los estudiantes del caso II, aún se encuentra en el proceso de lograr primeramente una comprensión conceptual del concepto de razón y de algunos otros procesos matemáticos, puesto que sus antecedentes académicos lo reflejan. En relación al modelo teórico los estudiantes para llegar a comprender el concepto, deberían por lo menos haber alcanzado el nivel de *Formalising*. Por tanto, su proceso de comprensión fue bajo.

Ahora, es claro que los estudiantes a pesar de presentar rendimientos académicos diferentes, ambos casos realizaron el mismo proceder en su proceso de comprensión al momento de establecer comparaciones de razones matemáticas. Pero la diferencia, se encuentran en las dificultades que manifestaron los estudiantes del caso II, en relación a los del caso I. Como fueron, dificultad para comprender y relacionar los datos con un objeto matemático y la dificultad en las estrategias implementadas (representación pictórica y simbólica, algoritmo de la división, cálculo del porcentaje).

**CONCLUSIONES**

En esta investigación se analizó el proceso de comprensión que tienen cuatro estudiantes de educación básica de sexto grado sobre el concepto de razón, al resolver una tarea que demanda elegir la razón matemática para decidir la situación óptima en dónde comprar al mejor precio. El modelo teórico de Pirie y Kieren (1994) demostró que la comprensión del conocimiento no se presentó de manera lineal (del nivel inferior a nivel superior), sino que es una construcción iterativa del proceso, lo que implica ciclos adelante-atrás atrás para avanzar a un nivel superior (*folding back*), esto permitió a los estudiantes reexaminar y avanzar en el proceso de comprensión de una forma enriquecida en conocimientos y habilidades.

Desde el concepto de comprensión que manifiesta el modelo teórico, se logró establecer que los casos de estudio, no lograron formalizar el objeto matemático razón, puesto que, la comprensión es un proceso que se construye a partir de sus experiencias y fue evidente que también tuvieron dificultades en las estrategias utilizadas al resolver la tarea. En la tarea, se esperaba que los estudiantes lograran identificar que ambas situaciones presentaban la misma unidad de partida, por tanto, podían realizar una comparación de razones y elegir la mejor situación donde comprar el kilo de naranjas, pero ambos casos no alcanzaron establecer dicha relación, lo que confirmar que los estudiantes no logran interpretar o decidir cuál es la unidad de medida en juego en una comparación de razones matemáticas.

De acuerdo al modelo teórico y al desarrollo de las actividades por parte de los estudiantes, el proceso de comprensión relacionado con el concepto de razón queda descrito como sigue: primero asocian el concepto de razón con una imagen (*IM*) o inmediatamente la crean y representan (*IH*). Las representaciones claves en su proceso de comprensión fueron la pictórica y simbólica, en donde presentan errores para establecerlas. Siendo la representación simbólica (fracción) con la que primero relacionaron las situaciones de la tarea. Posteriormente, los estudiantes en su proceso de comprensión, se les facilitó trabajar en la imagen que poseen (*PN*), por ejemplo, usan el algoritmo de la división para comparar razones matemáticas, proceso en el que los estudiantes del caso 2 presentaron errores. Luego, tratan de abstraer una hipótesis de los resultados obtenidos de las estrategias implementadas y, es así como logran alcanzar su mayor nivel de comprensión (*PN*). Sin embargo, faltó que los estudiantes lograran desvincularse de la imagen que crearon del objeto matemático y es por ello, que no lograron formalizar el concepto de razón como un objeto formal (*F*).

En el proceso de comprensión se evidenciaron las dificultades siguientes: no identificación de la unidad de partida en una comparación de razones matemáticas, manifestando la endeble comprensión lectora e interpretación de los datos; dificultad para traducir de un lenguaje verbal a uno simbólico, manifestado durante el desarrollo de la actividad; para realizar operaciones aritméticas con fracciones, evidenciado en los estudiantes de caso II que no lograron desarrollar divisiones sencillas; dificultad para comparar razones matemáticas, los estudiantes se limitaron a establecer la comparación por el resultado de sus procesos aritméticos, que para el caso II fue incorrecto y; dificultad para identificar y trabajar con razones matemáticas, los estudiantes no lograron establecer la relación entre las magnitudes del numerador y denominador en una razón matemática.

En este sentido, el modelo teórico permitió conocer las dificultades que los estudiantes manifiestan en su proceso de comprensión, cuando resuelven tareas que aluden al concepto de razón. Lo que, facilita a los docentes implementar en sus prácticas de enseñanzas, estrategias que permitan a sus estudiantes superar tales dificultades que les imposibilita el buen proceso de comprensión del concepto de razón. Dado que es necesario continuar con estudios empíricos que informan sobre el proceso de comprensión de los estudiantes al resolver tareas relacionadas al concepto de razón, investigaciones futuras podrían centrarse en seguir profundizando esta interpretación con un mayor número de participantes, para lograr una generalización de los resultados obtenidos en el estudio de caso de esta investigación.

**DECLARACIÓN DE LA CONTRIBUCIÓN DE LOS AUTORES**

JAAP y FMRV concibieron la idea presentada y desarrollaron la teoría. JAAP adaptó la metodología para la investigación, elaboró las actividades, y colectó los datos. FMRV and JAAP analizaron los datos. Todos los autores participaron activamente en la discusión de resultados, revisaron y aprobaron la versión final del trabajo.

**DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS**

Los datos que respaldan los resultados de este estudio serán puestos a disposición por el autor correspondiente, [JAAP], previa solicitud razonable.

**REFERENCIAS**

Buforn, A., Llinares, S., & Fernández, C. (2018). Características del conocimiento de los estudiantes para maestro españoles en relación con la fracción, razón y proporción. *Revista mexicana de investigación educativa*, México, *23*(76), 229-251.

Caballero, A., Martínez, L., & Bernandez, J. (1970). *Matemáticas, tercer curso*. Esfinge S.A.

Çalişici, H. (2018). Middle school students' learning difficulties in the ratio-proportion topic and a suggested solution: envelope technique. *Universal Journal of Educational Research*, 6(8), 1848-1855. <http://dx.doi.org/10.13189/ujer.2018.060830>

Delgado, M., Codes, M., Monterrubio, M., & González, M. (2014). El concepto de serie numérica. Un estudio a través del modelo de Pirie y Kieren centrado en el mecanismo “folding back”. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *6*, 25 – 44.

Fernández, A., Figueras, O., Monzó, O., & Puig, L. (2009). *Competencias en razón y proporción en la escuela primaria*. Universidad de Valencia. PUV.

Fernández, C., & Llinares, S. (2010). Relaciones entre el pensamiento aditivo y multiplicativo en estudiantes de educación primaria. El caso de la construcción de la idea de razón. *Horizontes Educacionales*, 15(1), 11-22.

Gairín, J., & Oller, A. (2012). Análisis histórico sobre la enseñanza de la razón y la proporción. En: *Investigación en Educación Matemática XVI.* (pp 249–259). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Instituto Nacional Para La Evaluación De La Educación (INEE). (2015). Resultados nacionales 2015. Área: Matemáticas. Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes (PLANEA). <http://www.inee.edu.mx/images/stories/2015/planea/final/fasciculosfinales/resultadosPlanea-3011.pdf>

Lamon, S. (2020). *Teaching fractions and ratios for understanding. Essential content knowledge and instructional strategies for teachers.* Routledge.

Lamon, S. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. En: *Second handbook of research on mathematics teaching and learning.* (pp. 629-667). National council of teachers of mathematics.

Mcmillan, J., & Schumacher, S. (2005). *Investigación educativa: Una introducción conceptual*. Pearson educación S. A.

MEEL, D. (2003). Models and theories of mathematical understanding: Comparing Pirie and Kieren's model of the growth of mathematical understanding and APOS theory. En*: Researche in collegiate Mathematics Educativo*. (pp. 132-181). Issues in mathematics education.

Monteiro, C. (2003). Prospective Elementary Teachers’ Misunderstandings in Solving Ratio and Proportion Problems. Artículo presentado en la 27a Conferencia del Grupo Internacional de Psicología de la Educación Matemática. 25a Conferencia PME-NA, 3, p. 317-324. <https://eric.ed.gov/?id=ED501033>

Organización Para La Cooperación y El Desarrollo Económico (OCDE). (2016). Informe de resultados de México en la evaluación 2015 de PISA. Creative Commons. <https://www.oecd.org/pisa/PISA-2015-Mexico-ESP.pdf>

Pirie, S., & Kieren, T. (1989). A recursive theory of mathematical understanding. *For the learning of mathematics*, 9(3), 7-11.

Pirie, S.; Kieren, T. (1994). Growth in mathematical understading: how can we characterise it and how can we represent it? *Educational Studies in Mathematics*, *26*, 165-190.

Ramírez, M., & Block, D. (2009). La razón y la fracción: un vínculo difícil en las matemáticas. *Educación Matemática*, 21(1), 63-90.

Rojas, N. (2010). *Conocimiento para la enseñanza y calidad matemática de la instrucción del concepto de fracción: Estudio de caso de un profesor chileno.* Tesis de Máster en Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, Granada.

Rosales, M., Barrientos, J., Issa, E., López, M., Tovilla, M., & Velázquez, L. (2015). *Desafíos matemáticos. Libro para el maestro. Sexto grado.* Secretaria de Educación Pública.

Autor & Autor (2021). Categories to Assess the Understanding of University Students about a Mathematical Concept. *Acta Scientiae*, 23(1), 102-135. <https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.5892>

Sanchez, E. (2013). Razones, proporciones y proporcionalidad en una situación de reparto: una mirada desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *16*(1), 65-97.

Secretaría De Educación Pública (SEP). (2011). Programas de estudio 2011. Guía para el maestro. Educación básica. Primaria. Sexto grado. Gobierno federal de México. <http://edu.jalisco.gob.mx/cepse/sites/edu.jalisco.gob.mx.cepse/files/sep_2011_programas_de_estudio_2011.guia_para_el_maestrosexto_grado.pdf>