ISSN: 2178-7727
DOI: 10.17648/acta.scientiae.8173

O uso de um modelo didático como fonte de reflexão: A identificação de novas categorias de situações-problema do tipo composição envolvendo números fracionários

Danielly Kaspary [a]
Veridiana Rezende [b]

[a] Université des Antilles, INSPE de Martinique
[b] Universidade Estadual do Paraná (Unespar), Programa de Pós-graduação em Educação Matemática (PRPGEM)

RESUMO

Contexto: A tentativa e os impasses em empregar um modelo didático existente são aqui um convite a diversas reflexões de natureza epistemológica sobre os números em situações-problema envolvendo operações aritméticas. **Objetivos**: Dessas reflexões, propõe-se um modelo didático para situações-problema de composição abrangendo números fracionários e não fracionários. **Design**: Trata-se de uma expansão de uma das classes do Campo Conceitual Aditivo, propostas por Gérard Vergnaud, no âmbito da Teoria dos Campos Conceituais. Considerando os números fracionários, o modelo didático aqui apresentado é composto de oito categorias, seis a mais do que aquelas descritas pelo autor. Em um primeiro momento, o modelo foi construído a partir de uma análise essencialmente epistemológica. Ele foi confronta do a dados empíricos oriundos de um protocolo realizado com estudantes brasileiros do Ensino Fundamental. **Ambiente e participantes**: 987 estudantes brasileiros, do 5º ao 9º ano do Ensino Fundamental. **Coleta e análise de dados**: Os estudantes resolveram nove situações-problema, individualmente. A análise dos dados ocorreu por meio das produções escritas dos estudantes. **Resultados**: A constituição de um modelo didático que contempla oito situações-problema de composição de medidas, sendo seis delas envolvendo números fracionários. As situações-problema envolvendo apenas frações possuem uma maior taxa de acerto significativamente superior que àqueles que envolvem a fração de uma medida. **Conclusões**: Três níveis de dificuldades foram identificados dentre as situações-problema de composição para números fracionários e não fracionários. O modelo didático e os níveis de complexidade aqui apresentados podem servir como instrumento para garantir a diversidade das situações-problema propostas em sala de aula e amparar escolhas curriculares ao longo da escolarização.

Palavras-chave: Campo Conceitual Aditivo; Campo Conceitual Multiplicativo; Didática da Matemática; Situações de composição.

Corresponding author: author’s full name. Email: kaspary.d@gmail.com

The use of a Didactic Model as a Source of Reflection: the identification of new categories of problem situations of the composition type involving fractional numbers

ABSTRACT

Background: The attempt and the impasses in employing an existing didactic model are an invitation to various reflections of an epistemological nature on numbers in problem situations involving arithmetic operations. **Objectives**: Dessas reflexões, propõe-se um modelo didático para situações-problema de composição abrangendo números fracionários e não fracionários. **Design**: This is an expansion of one of the classes of the Additive Conceptual Field, proposed by Gérard Vergnaud, within the scope of the Theory of Conceptual Fields. Considering fractional numbers, the didactic model presented here is composed of eight categories, six more than those described by the author. Initially, the model was constructed based on an essentially epistemological analysis. It was compared to empirical data from a protocol carried out with Brazilian elementary school students. **Setting and participants:** 987 Brazilian students, from the 5th to the 9th grade of elementary school. **Data collection and analysis**: The students solved nine problem situations individually. Data analysis was carried out through the students' written productions. **Results**: The creation of a teaching model that includes eight problem situations involving the composition of measurements, six of which involve fractional numbers. **Conclusions**: Three levels of difficulty were identified among the problem situations of composition for fractional and non-fractional numbers. The teaching model and the levels of complexity presented here can serve as an instrument to ensure the diversity of the problem situations proposed in the classroom and support curricular choices throughout schooling.

Keywords: Additive Conceptual Field; Multiplicative Conceptual Field; Didactics of Mathematics; Composition situations.

INTRODUÇÃO

A elaboração de modelos a partir daquilo que se observa empiricamente é um exercício científico comum na prática de pesquisadores de diferentes áreas. Esses modelos têm, entre outros objetivos, o de descrever e produzir informações daquilo que está em estudo, colocando luz em certos aspectos e inevitavelmente gerando sombras em outros. Quando um determinado modelo se mostra insuficiente ao ser aplicado a um conjunto específico de dados, ou seja, quando as sombras que ele produz camufla aspectos considerados importantes para o pesquisador, a evolução desse modelo passa a ser um objetivo de pesquisa. Esse artigo ilustra esse processo científico no campo da Didática da Matemática, especificamente em relação a situações-problema envolvendo números fracionários.

Na Didática da Matemática, nos servimos de *modelos didáticos* para descrever situações e fenômenos próprios da difusão (e da não difusão) dos saberes matemáticos na sociedade. Esses modelos permitem descrever elementos da atividade matemática praticada por uma determinada instituição ou por um determinado grupo de pessoas. Para tanto, as abordagens epistemológica, cognitiva e institucional são, por vezes, combinadas.

No âmbito da Teoria dos Campos Conceituais (TCC), dois modelos didáticos foram e são utilizados em diferentes pesquisas que se interessam pelo ensino e pela aprendizagem das quatro operações aritméticas, são eles: o Campo Conceitual Aditivo e o Campo Conceitual Multiplicativo (Vergnaud, 1990). De acordo com Magina *et. al*. (2001), evidências convincentes da influência desses modelos podem ser encontradas na elaboração dos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (1997). Kaspary (2020) mostra ainda que mudanças nos livros didáticos brasileiros mais recentes comparados aos da década de 1990 revelam uma busca por conformidade com as classes desses modelos. Eles ultrapassaram, portanto, o perímetro da pesquisa e se tornaram também instrumentos para a escolha e a organização curricular.

Ao nos interessarmos particularmente por situações-problema envolvendo números fracionários, buscamos, em um primeiro momento, transpor os dois modelos citados anteriormente. Nesse exercício, fomos levadas a reconhecer a existência de *novas* categorias. Os modelos que dispúnhamos não permitiam, portanto, colocar *luz* em algumas características das situações que, para nós, merecem ser levadas em conta. Nunes *et. al.* (2007) já haviam de algum modo observado essa necessidade:

> L’impact des situations sur le développement des concepts mathématiques mis en avant dans la théorie de Vergnaud (1997) a inspiré de nombreuses recherches. On sait aujourd’hui que la taille des nombres fait varier non seulement le taux de réponses correctes mais également les stratégies pour résoudre le problème (Carpenter & Moser, 1982; Vergnaud, 1982; 1983b). Étonnamment, aucun travail similaire de comparaison systématique n’a été développé dans le domaine des nombres rationnels (Nunes *et. al*., p. 255, 2007).

Neste texto, apresentamos o movimento de identificação de novas categorias com foco na classe de situações-problema do tipo Composição de medidas do Campo Aditivo. Uma análise epistemológica das estruturas das situações-problema e um protocolo de pesquisa com 987 alunos brasileiros são os pilares da abordagem metodológica utilizada.

Quando nos interessamos ao ensino e à aprendizagem de frações, somos levados pela literatura a considerar os *sentidos das frações* (tais como parte-todo, quociente, coeficiente operatório, razão, número abstrato). Trata-se de um modelo amplamente revisitado por diferentes trabalhos: Kieren (1976), Behr *et. al*. (1983), Vergnaud (1983), Allard (2015), e Nunes *et. al*. (2007), entre outros. No entanto, compartilhamos do mesmo ponto de vista de Thompson e Saldanha (2003) quanto ao incômodo em considerar tal modelo no lugar de uma análise epistemológica do número racional e mais especificamente dos números fracionários:

> Kieren (1988; 1993a; 1993b) and the Rational Number Project (Behr et al., 1992, 1993; Lesh et al., 1987) have given the most extensive analyses of rational number meanings. Their approach was to break the concept of rational number into subconstructs—part-whole, quotient, ratio number, operator, and measure—and then describe rational number as an integration of those subconstructs. Our feeling is that their attempt to map systems of complementary meanings into the formal mathematical system of rational numbers will necessarily be unsatisfactory in regard to designing instruction for an integrative understanding of fractions. Each subconstruct is portrayed as a body of meanings, or interpretations, of the "big idea" of rational numbers. Mathematical motivations for developing the rational numbers as a mathematical system, however, did not emerge from meanings or subconstructs. Rather, it emerged from the larger endeavor of arithmetizing the calculus. So, to focus on subconstructs or meanings of the mathematical system of rational numbers ultimately runs the risk of asking students to develop meanings for a big idea that they do not have. Our approach will be to place fraction reasoning squarely within multiplicative reasoning as a core set of conceptual operations (p. 14).

Como explicam os autores, as motivações matemáticas para a criação dos números racionais como um sistema numérico não se baseiam no modelo didático dos sentidos das frações. Com a intenção de colocar a epistemologia dos números no centro da nossa reflexão, assumimos a definição dada por Bezout, datada do século XVIII, e lembrada por Neyret (1995), segundo a qual um número expressa quantas unidades ou partes de unidades compõem uma quantidade. O interesse dessa definição para nós é que ela coloca os números racionais em uma continuidade com os números naturais, permitindo-nos igualmente estabelecer essa continuidade entre as situações descritas por Vergnaud (1990) e as que foram identificadas por nós. Essas e outras reflexões serão detalhadas mais adiante deste texto.

ELEMENTOS DA TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

Para a TCC, situações-problema podem ser organizadas em *classes* $\hat{\mathcal{C}}$ *e categorias* $\mathcal{C}$ ($\mathcal{C} \subset \hat{\mathcal{C}}$), para as quais se espera uma *organização invariante do comportamento* do sujeito quando confrontado com situações de uma mesma classe e, mais especificamente, de uma mesma categoria. Uma organização invariante se constrói em um tempo relativamente longo e é fruto, segundo Vergnaud (2009), das *adaptações* do sujeito ao vivenciar situações tidas por ele como similares.

O reconhecimento de classes e categorias de situações-problema pode, em si, ser um objeto de pesquisa. Quando identificadas, elas se tornam uma hipótese de trabalho para prever e interpretar o comportamento dos sujeitos. De objeto de estudo, elas adquirem, portanto, o status de instrumento para a análise e interpretação de fenômenos.

A identificação de classes é geralmente feita por meio de uma análise discursiva e contextual das situações-problema que podem potencialmente levar o sujeito a se comportar de uma determinada maneira. Por exemplo, nas frases “a urna tem duas bolas azuis e três bolas vermelhas” e “na urna que continha duas bolas azuis foram colocadas três bolas vermelhas”, as imagens que construímos dessas situações podem impactar a maneira como cada uma delas é modelizada pelo sujeito. Caso nos interessemos pela quantidade de bolas contidas na urna, a estratégia utilizada pode ser portanto igualmente impactada em cada um dos casos.

A análise epistemológica das situações-problema tem um papel fundamental na identificação das categorias de uma determinada classe. Nesse sentido, quando duas situações de uma mesma classe podem ser modelizadas por dois modelos matemáticos diferentes, consideramo-las como pertencentes a duas categorias distintas. Assumimos, então, como hipótese de trabalho que o comportamento do sujeito é, mais uma vez, impactado quando ele é confrontado com situações oriundas de duas categorias diferentes. Essa hipótese de trabalho se apoia no argumento de que a natureza epistemológica de uma situação impacta as estratégias eficazes que permitem resolvê-las.

Certas classes de situações, quando conjugadas, podem determinar o que chamamos de *campo conceitual*, no qual podemos observar uma conexão forte entre diferentes conceitos, propriedades, teoremas e representações. Dentre as diversas classes de situações-problema abordadas por Vergnaud (1990), direcionamos nosso estudo para aquelas ligadas às quatro operações aritméticas, para as quais o autor estabelece a constituição de dois campos conceituais: o aditivo e o multiplicativo.

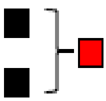
O campo conceitual aditivo abrange seis classes de situações-problema. Neste texto, concentraremos nossa atenção na primeira delas: a composição de medidas. Nessa classe, encontramos situações-problema nas quais duas ou mais medidas se compõem, resultando em uma terceira. A noção de *partes do todo* é intrínseca a essas situações e, por isso, os contextos que as ilustram permitem atribuir uma dimensão estática (não temporal) às medidas das grandezas em jogo.

Quando situações-problema de *composição de medidas* envolvem grandezas discretas, elas podem ser modeladas por meio do seguinte raciocínio conjuntista: se os dois conjuntos A e B, de mesma natureza, não têm elementos em comum (ou seja, $A \cap B = \emptyset$), temos que $n(A) + n(B) = n(A \cup B)$, onde $n(A)$ e $n(B)$ representam o número de elementos dos conjuntos A e B, respectivamente.

Vergnaud (1990) identifica duas categorias relativas a essa classe. A primeira delas consiste em situações em que conhecemos as *partes do todo* e buscamos calcular o *todo*.

Figura 1

Categoria 1, com M_1, M_2 e M_3 números Reais positivos não fracionários (autoras desta pesquisa)



$M_1 + M_2 = M_3$, onde M_3 é desconhecida

- **Exemplo 1:** Na turma do professor Lucas, 22 alunos fazem alguma atividade esportiva e 7 alunos não realizam atividade esportiva. Quantos alunos há na turma do professor Lucas?

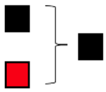
  Segundo Magina *et. al*. (2001),

> São problemas que a maioria das crianças bem novas (crianças com 6 ou mesmo 5 anos) já não apresenta dificuldade em resolver, porque o procedimento requisitado – de juntar as partes para achar o todo – é justamente a primeira situação de adição que a criança compreende, isto é, a primeira representação de adição que ela forma, e sua resolução, em geral, está associada ao processo de contagem (p. 34).

A segunda categoria, identificada por Vergnaud (1990), consiste em encontrar *uma parte do todo*, conhecendo *uma das partes* e o *todo*.

Figura 2

Categoria 2, com M_1, M_2 e M_3 números Reais positivos não fracionários (autoras desta pesquisa)



$M_1 + M_2 = M_3$, onde M_2 é desconhecida

- **Exemplo 2:** Na turma da professora Maria tem 28 alunos. Sabemos que 21 alunos fazem alguma atividade esportiva e o restante não pratica atividade esportiva. Quantos alunos da turma da professora Maria não praticam atividade esportiva?

Ao tentar transpor essas categorias para descrever situações de composição de medidas envolvendo números fracionários, fomos confrontados a algumas reflexões que buscaremos apresentar adiante. O resultado desse exercício nos levou a reconhecer seis outras categorias, que são, aqui, nosso principal objeto de estudo.

SITUAÇÕES DE COMPOSIÇÃO DE MEDIDAS ENVOLVENDO NÚMEROS FRACIONÁRIOS

> A medida de grandezas e a quantificação das relações entre grandezas constituíram-se durante séculos em um fundamento e um motor do avanço da matemática e da construção dos números. As matemáticas atualmente fundamentam-se diretamente nos conjuntos e nos números sem referência às grandezas (Perrin-Glorian, 2002, p. 299, tradução nossa).

Neyret (1995) nos lembra que Bezout propôs a distinção entre número concreto e número abstrato. O primeiro está associado a uma determinada unidade de medida, enquanto o segundo é desprovido dessa característica.

Situações-problema do campo da aritmética, ao convocarem um contexto extramatemático, se apoiam essencialmente em números concretos, estabelecendo a relação incontornável entre as *medidas* e a sua *grandeza medida* : os números presentes no enunciado de uma tal situação são *medidas* de uma determinada *grandeza*, ainda que esta última não seja desta forma explicitada, assim como tampouco sua *unidade de medida*.

> Même s'il y a "évaporation" à un moment donné du nom de l'unité, pour reprendre une expression de Guy Brousseau, ce qui permet de parler de nombre abstrait, la référence implicite sera toujours la comparaison d'une grandeur à une unité (Neyret, 1995, p. 67).

Quando anunciamos a medida de uma grandeza, o fazemos considerando uma determinada quantidade dessa grandeza como *unidade de medida*. Essa *unidade de medida* é, portanto, uma *grandeza unitária* considerada como *referência* para medir todas as outras grandezas que são de mesma natureza que aquela utilizada para medir.

Medir é, portanto, um ato de comparação. Chambris (2007) explica a relação entres esses conceitos da seguinte maneira:

> Considérons des objets tous dotés d'une qualité donnée. Deux objets « égaux » du point de vue de cette qualité ont même grandeur. La classe d'équivalence des objets de même grandeur est alors une grandeur. Nous appelons mesure d'un objet ou d'une grandeur, un nombre (caractérisé diversement selon les théories). Pour une qualité donnée, un objet a plusieurs mesures alors qu'il n'a qu'une seule grandeur (p. 11).

Nos dois exemplos tratados anteriormente, a unidade de medida em questão é 'um(a) aluno(a)'. Com essa unidade de medida, atribuímos números que permitem indicar a medida das grandezas 'turma da professora Maria', 'turma do professor Lucas', 'alunos que praticam uma atividade esportiva', 'alunos que não praticam atividade esportiva' e etc. Com essa mesma unidade de medida não podemos, no entanto, medir a quantidade de "membros da família da professora Maria", por exemplo. Essa unidade de medida permite, portanto, medir grandezas cuja qualidade de interesse é a *quantidade de alunos*. E é por essa mesma razão que os professores não são contabilizados como partes do *todo* nos exemplos 1 e 2.

> To conceive of a measured quantity is to imagine the measured attribute as segmented (Minskaya, 1975; Steffe, 1991b) or in terms of a coordination of segmented quantities (Piaget, 1970; Schwartz, 1988; P. W. Thompson, 1994). The idea of ratio is at the heart of measurement. To conceive of an object as measured means to conceive of some attribute of it as segmented, and that segmentation is in comparison to some standard amount of that attribute (Thompson & Saldanha, 2003, p. 15).

Utilizando o exemplo 2 apresentado anteriormente[1], se afirmarmos que "$\frac{3}{4}$ da turma da professora Maria faz atividade esportiva", como devemos considerar, conceitualmente, o número $\frac{3}{4}$ nessa frase? Seria ele também uma medida da grandeza "turma da professora Maria"? Se sim, em relação a qual unidade de medida?

Notemos que a ação de anunciarmos um outro valor numérico aos praticantes de esporte da turma da professora Maria não faz desse grupo menor ou maior do que ele é de fato (sabemos que $\frac{3}{4}$ de 28 alunos, corresponde a 21 alunos).

> A conceptual breakthrough underlying students' understanding of unit substitutions is their realization that the magnitude of a quantity (its "amount") as determined in relation to a unit does not change even with a substitution of unit. Wildi (1991) emphasized this point by making two distinctions. The first was between a quantity's measure and its magnitude. A quantity's magnitude (it's "amount of stuff" or its "intensity of stuff") is independent of the unit in which you measure it. […] A change of unit does not change the quantity's magnitude—making the unit 1/4 as large makes the measure 4 times as large,

1 Exemplo 2: Na turma da professora Maria tem 28 alunos. Sabemos que 21 alunos fazem alguma atividade esportiva e o restante não pratica atividade esportiva. Quantos alunos da turma da professora Maria não praticam atividade esportiva?

leaving the quantity's magnitude unchanged (Thompson & Saldanha, 2003, pp. 16-17).

Dito isso, consideramos que $\frac{3}{4}$ é uma medida "da turma da professora Maria" referente aos alunos que fazem atividade esportiva. Ela é dada a partir da unidade de medida "turma da professora Maria". Notemos que essa unidade de medida não pode ser utilizada *diretamente* para medir uma *proporção* de um grupo de alunos qualquer – o que é possível de se fazer com a unidade de medida "um(a) aluno(a)". Nesse mesmo sentido, sabendo que a medida da "turma do professor Lucas" não é "*1* turma da professora Maria", o valor numérico $\frac{3}{4}$, em cada um dos exemplos 1 e 2, não corresponde à mesma grandeza. É por essa razão que no mundo de grandezas e medidas, temos $\frac{3}{4}$ *maiores* ou *menores* que outros, da mesma forma como temos 2 *maiores* ou *menores* que outros (como 2 ovos ou 2 dúzias de ovos), em função da unidade de medida utilizada.

A questão que se coloca é, por exemplo, se a situação-problema do exemplo 3, apresentado a seguir, deva ser considerada ou não da mesma categoria que a situação-problema do exemplo 1[2]:

- **Exemplo 3:** Na turma do professor João, $\frac{3}{7}$ dos alunos fazem somente vôlei, $\frac{2}{7}$ dos alunos fazem somente judô e o restante deles não pratica atividade esportiva. Qual fração de alunos da turma do professor João pratica atividade esportiva, ou seja, que fazem vôlei ou judô?

A partir dos argumentos apresentados anteriormente, não nos resta dúvidas que se trata de dois problemas de composição de medidas. Notemos, no entanto, que no caso do exemplo 1 a unidade de medida escolhida não deriva de uma qualidade exclusiva do objeto medido. O *todo* procurado *T'* (união das partes), nesse caso, é dado por $T' = \varphi u$ ($\varphi \in \mathbb{Q}$), onde u é uma unidade de medida facilmente empregável para medir outras grandezas de mesma natureza. No caso do exemplo 3, duas espécies de *todo* coexistem: o *todo* resultante da união de duas partes *T'* (a medida desconhecida no problema) e o *todo* utilizado como unidade de medida *T* (a turma do professor João), onde *T'*

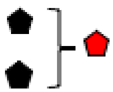
2 Exemplo 1: Na turma do professor Lucas, 22 alunos fazem alguma atividade esportiva e 7 alunos não realizam atividade esportiva. Quantos alunos há na turma do professor Lucas?

$= \varphi T$ ($\varphi \in \mathbb{Q}$), com u = T. Ou seja, no segundo caso, o objeto medido é ele mesmo sua unidade de medida.

Desse modo, somos levadas a considerar que a mudança de unidade de medida, nos dois casos estudados, não produz somente uma mudança numérica, mas impacta fortemente os conhecimentos e os esquemas[3] em jogo em cada uma das situações. Por essa razão, decidimos considerar duas novas categorias que são de algum modo simétricas àquelas que já haviam sido identificadas por Vergnaud (1990) :

Figura 3

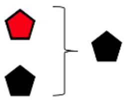
Categoria 3, $\{a, b, c, d, e, f\} \subset \mathbb{N}$ *; b ≠ 0, d ≠ 0 e f ≠ 0 (autoras desta pesquisa)*



$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} + \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}} = \frac{\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{f}}$, onde $\frac{\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{f}}$ é desconhecida

Figura 4

Categoria 4, $\{a, b, c, d, e, f\} \subset \mathbb{N}$ *; b ≠ 0, d ≠ 0 e f ≠ 0 (autoras desta pesquisa)*



$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} + \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}} = \frac{\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{f}}$, onde $\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}}$ é desconhecida

O exemplo 3 é, portanto, modelizado pelo esquema sagital e a equação matemática presentes na Figura 3. Da mesma forma, o exemplo 4, descrito a seguir, ilustra a categoria apresentada pela Figura 4.

- **Exemplo 4:** Na turma do professor Jorge, $\frac{7}{9}$ fazem alguma atividade esportiva. Sabemos que $\frac{3}{9}$ dos alunos praticam somente futebol e o

---

[3] Organização invariante da conduta pelo sujeito (Vergnaud, 1990).

restante pratica somente basquete. Qual fração de alunos da turma do professor Jorge pratica basquete?

Chamamos atenção, neste momento, para outro fenômeno próprio das situações de composição de medidas envolvendo números fracionários: a *evaporação* da unidade de medida, comentada anteriormente, permite dar origem a problemas contendo apenas um dado numérico explicitamente fornecido no enunciado, como no exemplo 5.

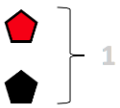
- **Exemplo 5:** Na turma da professora Beatriz, $\frac{4}{5}$ dos alunos fazem alguma atividade esportiva e o restante não pratica atividade esportiva. Qual fração de alunos da turma da professora Beatriz não pratica atividade esportiva?

Stella Baruk (2019), no dicionário de Matemática Elementar que propõe, fala das dificuldades históricas em considerar o "*um*" como um número, tal como o consideramos atualmente. Isso se deve a desnecessidade de contar frente a um só objeto. Os diferentes "uns" implícitos nas expressões matemáticas (ex.: $x = 1x^1$) podem igualmente estar ligados a esse aspecto. Consideramos, portanto, que esse "*1*" que serve de *unidade de medida*, pode se constituir um obstáculo epistemológico na aprendizagem de situações envolvendo frações. A correspondência entre um "todo" e o número "1", bem como a igualdade "$1 = \frac{b}{b}, com\ b\ \in \mathbb{N}^*$", são, portanto, elementos que não devem ser desprezados pelas instituições de ensino, nem tampouco pelas pesquisas que se interessam pela difusão desses saberes.

Consideramos, então, que o exemplo 3 merece ser contemplado por uma outra categoria à parte das duas já identificadas anteriormente. Por isso, propomos de introduzir a categoria 5, modelizada da seguinte forma:

Figura 5

Categoria 5, $\{a, b, c, d, e, f\} \subset \mathbb{N}$ *; b ≠ 0, d ≠ 0 e f ≠ 0 (autoras da pesquisa)*



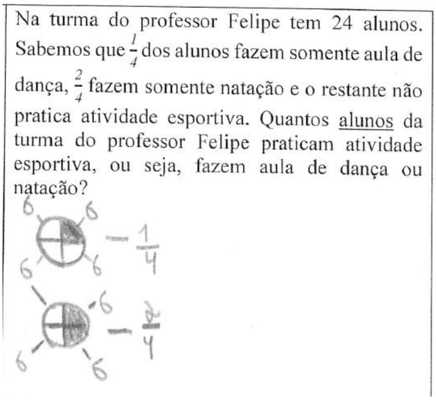
$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = 1$, onde $\frac{c}{d}$ é desconhecida e "1" é implícito

Em algumas situações-problema encontradas em materiais didáticos ou vivenciadas no nosso dia a dia, nos deparamos também com medidas que derivam de uma multiplicidade de unidades de medida. O exemplo 6 ilustra esse fato.

- **Exemplo 6:** Na turma do professor Felipe tem 24 alunos. Sabemos que $\frac{1}{4}$ dos alunos fazem somente aula de dança, $\frac{2}{4}$ fazem somente natação e o restante não pratica atividade esportiva. Quantos alunos da turma do professor Felipe praticam atividade esportiva, ou seja, fazem aula de dança ou de natação?

Figura 6

Produção de um(a) aluno(a) referente ao exemplo 6 (dados da pesquisa)



Em situações desse tipo, observamos a superposição de diferentes unidades de medida que permitem descrever uma mesma grandeza de formas distintas. Nesse caso, citamos as seguintes unidades de medida (em vermelho) e suas respectivas medidas (em verde):

$$1 \times 1 \text{ turma do professor Felipe}$$
$$24 \times 1 \text{ aluno(a)}$$
$$4 \times \frac{1}{4} \text{ da turma do professor Felipe}$$
$$4 \times 6 \text{ alunos(as) da turma do professor Felipe}$$

Notemos que a partir da unidade de medida “$\frac{1}{4}$ da turma do professor Felipe”, temos que “a turma do professor Felipe” mede 4. Esse resultado é simbolizado na produção do(a) aluno(a) (Figura 6), pelas 4 partes do disco que compõem o todo. Uma interpretação matemática – não necessariamente assim formatizada pelo(a) aluno(a) – é dada por Chambris (2020) sobre o assunto:

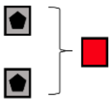
> [...] pour penser que $\frac{1}{3}$ est une unité, il faut penser que c'est un nombre qui mesure des nombres et son rapport à 1 : $\frac{1}{3}$ est l'unité avec laquelle 1 mesure 3, $3\left(\frac{1}{3}\right) = 1$ [...] » (p. 190).

O uso de frações unitárias como unidades de medidas convida e é um importante recurso do raciocínio proporcional. Observamos com isso que o Campo Multiplicativo se impõe em situações que combinam medidas que sejam do tipo "$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$**(M)**, com $\{a, b, \} \subset \mathbb{N}$, *$b \neq 0$ e $M \in \mathbb{R}^*$* não fracionário".

Dessa reflexão, consideramos três outras classes, descritas a seguir.

Figura 7

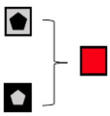
Categoria 6, $\{a, b, c, d\} \subset \mathbb{N}$; $b \neq 0$ e $d \neq 0$; M_α, M_β e $M_3 \in \mathbb{R}^*$ não fracionário; M_3 desconhecida (autoras desta pesquisa)



$$\left[\frac{a}{b}(M_\alpha)\right] + \left[\frac{c}{d}(M_\beta)\right] = \mathbf{M_3}$$

Figura 8

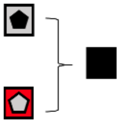
Categoria 7, $\{a, b\} \subset \mathbb{N}$; $b \neq 0$ e $d \neq 0$; M_2 e $M_3 \in \mathbb{R}^*$ não fracionário; com M_3 desconhecida (autoras desta pesquisa)



$$\left[\frac{a}{b}(\mathbf{M_3})\right] + \mathbf{M_2} = \mathbf{M_3}, \text{ com } \mathbf{M_2} = \frac{c}{b}(\mathbf{M_3})$$

Figura 9

Categoria 7, $\{a, b\} \subset \mathbb{N}$; $b \neq 0$; M_2 *e* $M_3 \in \mathbb{R}^*$ *não fracionário;* M_3 *desconhecida (autoras desta pesquisa)*



$$\left[\frac{a}{b}(M_3)\right] + M_2 = M_3\text{, com } M_2 = \frac{c}{d}(M_3)$$

O exemplo 6 é portanto modelizado pelo esquema sagital e a equação matemática presentes na Figura 7. Da mesma forma, os exemplos 8 e 9, descritos a seguir, ilustram as categorias apresentadas pelas Figura 8 e 9.

Exemplo 7: Na turma da professora Fernanda, $\frac{2}{5}$ dos alunos praticam atividade esportiva e 15 alunos não praticam atividade esportiva. Quantos alunos há na turma da professora Fernanda?

Exemplo 8: Na turma da professora Ana tem 32 alunos. Sabemos que $\frac{5}{8}$ fazem alguma atividade esportiva e o restante não pratica atividade esportiva. Quantos alunos da turma da professora Ana não praticam atividade esportiva?

As situações que contemplam mais de uma relação aditiva e/ou multiplicativa, Vergnaud (2009) denomina de problemas complexos. Especificamente, os problemas complexos que envolvem as operações de adição (ou subtração) e de multiplicação (ou divisão) são denominados por Vergnaud (2009) como problemas mistos. As situações-problema mencionadas acima se caracterizam, então, como problemas mistos: eles ultrapassam a fronteira do Campo Aditivo, ainda que suas estruturas primárias sejam do tipo “composição de medidas”.

Na seção a seguir, propomos uma apresentação condensada das diferentes classes de composição de medidas identificadas pela nossa análise.

UM MODELO PARA SITUAÇÕES DE COMPOSIÇÃO ENVOLVENDO NÚMEROS FRACIONÁRIOS E NÃO FRACIONÁRIOS

As novas categorias que identificamos decorre de um trabalho longo de idas e vindas de análise epistemológica. O resultado do modelo de situações do tipo composição de medidas envolvendo números fracionários é apresentado no quadro 2; para a sua leitura, propomos a seguinte legenda:

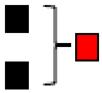
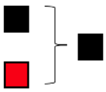
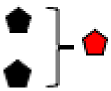
Quadro 1

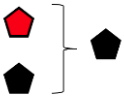
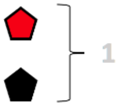
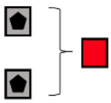
Legenda para a leitura dos esquemas sagitais e equações (autoras desta pesquisa)

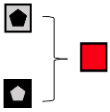
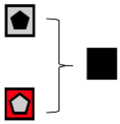
<table>
<tr><th colspan="3">Quanto às cores presentes nos esquemas sagitais e nas equações</th></tr>
<tr><th>Preto</th><th>Vermelho</th><th>Cinza</th></tr>
<tr><td>Dado fornecido no enunciado do problema</td><td>Dado a ser calculado</td><td>Informação não fornecida pelo enunciado do problema, por vezes possível de ser calculada</td></tr>
<tr><th colspan="3">Quanto às formas presentes nos esquemas sagitais</th></tr>
<tr><td>□</td><td>⬠</td><td>$\boxed{⬠}$</td></tr>
<tr><td>Número Real não fracionário</td><td>Número fracionário</td><td>Fração de um número Real</td></tr>
<tr><td>Ex. : 55 km</td><td>Ex. : $\frac{2}{5}$ do trajeto</td><td>Ex. : $\frac{2}{5}$ de 55 km</td></tr>
<tr><th colspan="3">Quanto às letras presentes nas expressões matemáticas</th></tr>
<tr><td>M, $M_\alpha, M_\beta, M_1, M_2$ e M_3</td><td colspan="2">Medida de uma grandeza: número Real não fracionário</td></tr>
<tr><td>$\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ e $\frac{e}{f}$</td><td colspan="2">Representam números fracionários positivos.
$\{a, b, c, d, e, f\} \subset \mathbb{N}$; $b \neq 0$, $d \neq 0$ e $f \neq 0$</td></tr>
</table>

Quadro 2

Categorias de situações-problema de composição (autoras desta pesquisa)

Categoria	Esquema sagital e equação	Exemplo de situação-problema		Modelização e resposta
I	 $\mathbf{M_1 + M_2 = M_3}$	1. Na turma do professor Lucas, 22 alunos fazem alguma atividade esportiva e 7 alunos não realizam atividade esportiva. Quantos alunos há na turma do professor Lucas?		$22 + 7 = ?$ Na turma do professor Lucas há 29 alunos.
II	 $\mathbf{M_1 + M_2 = M_3}$	5. Na turma da professora Maria tem 28 alunos. Sabemos que 17 alunos fazem alguma atividade esportiva e o restante não pratica atividade esportiva. Quantos alunos da turma da professora Maria não praticam atividade esportiva?		$17 + ? = 28$ Na turma da professora Maria, 11 alunos não praticam atividade esportiva.
III	 $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$	2. Na turma do professor João, $\frac{3}{7}$ dos alunos fazem somente vôlei, $\frac{2}{7}$ dos alunos fazem somente judô e o restante deles não pratica atividade esportiva. Qual fração de alunos da turma do professor João pratica atividade esportiva, ou		$\frac{3}{7} + \frac{2}{7} = ?$ Na turma do professor João, $\frac{5}{7}$ de alunos pratica atividade esportiva.

		seja, que fazem vôlei ou judô?		
IV	 $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$	6. Na turma do professor Jorge, $\frac{7}{9}$ fazem alguma atividade esportiva. Sabemos que $\frac{3}{9}$ dos alunos praticam somente futebol e o restante pratica somente basquete. Qual fração de alunos da turma do professor Jorge pratica basquete?		$\frac{3}{9} + \frac{?}{?} = \frac{7}{9}$ A fração de alunos que pratique basquete da turma do professor Jorge é $\frac{4}{9}$.
V	 $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = 1$	7. Na turma da professora Beatriz, $\frac{4}{5}$ dos alunos fazem alguma atividade esportiva e o restante não pratica atividade esportiva. Qual fração de alunos da turma da professora Beatriz não pratica atividade esportiva?		$\frac{4}{5} + \frac{?}{?} = 1$ Na turma da professora Beatriz, $\frac{1}{5}$ dos alunos não pratica atividade esportiva.
VI	 $[\frac{a}{b}(M_{\alpha})] + [\frac{c}{d}(M_{\beta})] = M_3$	3. Na turma do professor Felipe tem 24 alunos. Sabemos que $\frac{1}{4}$ dos alunos fazem somente aula de dança, $\frac{2}{4}$ fazem somente natação e o restante não pratica atividade esportiva. Quantos alunos da turma do		$\frac{1}{4}24 + \frac{2}{4}24 = ?$ Na turma do professor Felipe, 18 alunos praticam atividade esportiva.

		professor Felipe praticam atividade esportiva, ou seja, fazem aula de dança ou de natação?		
VII	 $[\frac{a}{b}(\mathbf{M_3})] + \mathbf{M_2} = \mathbf{M_3}$, com $\mathbf{M_2} = \frac{c}{b}(\mathbf{M_3})$	4. Na turma da professora Fernanda, $\frac{2}{5}$ dos alunos praticam atividade esportiva e 15 alunos não praticam atividade esportiva. Quantos alunos há na turma da professora Fernanda?		$\frac{2}{5}? + 15 = ?$ Na turma da professora Fernanda há 25 alunos.
VIII	 $[\frac{a}{b}(\mathbf{M_3})] + \mathbf{M_2} = \mathbf{M_3}$, com $\mathbf{M_2} = \frac{c}{d}(\mathbf{M_3})$	8. Na turma da professora Ana tem 32 alunos. Sabemos que $\frac{5}{8}$ fazem alguma atividade esportiva e o restante não pratica atividade esportiva. Quantos alunos da turma da professora Ana não praticam atividade esportiva?		$\frac{5}{8}32 + ? = 32$ Na turma da professora Ana, 12 alunos não praticam atividade esportiva.

Em relação às categorias que tratam apenas de frações, sem realizar um estudo exaustivo, observamos ser mais comum situações-problema que resultem em uma soma inferior ou igual a 1. Acreditamos que ao menos dois fatores podem explicar essa característica. O primeiro deles é que a união das partes do todo que procuramos é geralmente um sub-todo T' do todo T da situação (T' ⊂ T): como T assume a função de unidade de medida, T' tem como medida um número inferior à 1. Um segundo fator pode estar ligado ao uso das frações na vida cotidiana, onde notamos que a decomposição aditiva em partes inteiras e fracionárias inferiores a 1 se faz bastante presente em nosso discurso oral. Por exemplo, falamos "2 garrafas de refrigerante e meia" ($2 + \frac{1}{2}$) e muito raramente “5 meios de uma garrafa de refrigerante” ($\frac{5}{2}$). Essa prática linguística tem certamente consequências nas estratégias utilizadas em situações de composição envolvendo frações. No entanto, apesar desses dois fatores, não existem impedimento de natureza epistemológica para a existência de situações-problema de composição cuja soma seja superior a 1.

DO MODELO EPISTEMOLÓGICO À ANÁLISE DE DADOS EMPÍRICOS: O QUE OS ESTUDANTES NOS PERMITEM COMPREENDER

Inspiradas em trabalhados como de Gitirana et al., 2014 e Magina et al. 2008, buscamos estudar a influência das diferentes categorias no desempenho dos(as) alunos(as) na resolução de problemas de composição de medidas. Para tanto, as situações-problema apresentadas neste texto foram aplicadas a 987 estudantes brasileiros, do 5º ao 9º ano do Ensino Fundamental, distribuídos em 37 turmas de 10 escolas públicas localizadas nos estados de Santa Catarina, Paraná, Pernambuco e Paraíba. A distribuição por ano escolar está representada no quadro 3:

Quadro 3

Ano escolar dos participantes da pesquisa

Ano escolar	5º ano	6º ano	7º ano	8º ano	9º ano
Número de alunos	75	195	218	271	228

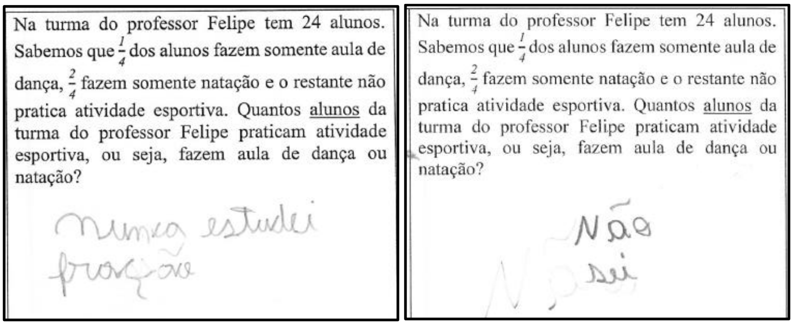
Uma breve análise *a priori* de cada uma das situações-problema é apresentada no Anexo I desse texto, junto com o protocolo e as informações entregues aos professores colaboradores que participaram da produção dos dados.

Quanto à escolha das situações-problema propostas aos estudantes, buscamos criar um protocolo no qual controlamos algumas variáveis didáticas, com o objetivo de identificar uma possível hierarquização de complexidade das diferentes categorias do Quadro 2. Nesse sentido, procuramos reduzir a possibilidade de erros decorrentes do cálculo, propondo, por exemplo, frações com denominadores iguais e operações de adição e subtração sem reservas. Além disso, decidimos manter o mesmo contexto em todas as questões propostas (alunos de uma turma que praticam ou não praticam uma atividade esportiva), para que a grandeza em questão não fosse um facilitador nem causasse dificuldades de uma questão para outra.

Inicialmente, três turmas do 4º ano também participaram do protocolo da pesquisa, mas os dados de resolução desses estudantes se mostraram inconclusivos para inferir sobre a complexidade das situações propostas. Isso ocorreu porque, diante das questões envolvendo números fracionários, os alunos se mostraram desprovidos das ferramentas e esquemas necessários para lidar com a situação. Esse resultado deve-se ao fato de que este é o primeiro ano em que esses alunos são oficialmente apresentados às frações no sistema de ensino brasileiro, não havendo tempo hábil, portanto, para o desenvolvimento de estratégias e uma organização invariante do comportamento. Esse fato pode ser confirmado a partir das respostas dos próprios estudantes, conforme exemplos apresentados na Figura 10.

Figura 10

Respostas apresentadas por estudantes do 4º ano de escolas diferentes (dados da pesquisa)


Na turma do professor Felipe tem 24 alunos. Sabemos que $\frac{1}{4}$ dos alunos fazem somente aula de dança, $\frac{2}{4}$ fazem somente natação e o restante não pratica atividade esportiva. Quantos alunos da turma do professor Felipe praticam atividade esportiva, ou seja, fazem aula de dança ou natação?

nunca estudei frações

Na turma do professor Felipe tem 24 alunos. Sabemos que $\frac{1}{4}$ dos alunos fazem somente aula de dança, $\frac{2}{4}$ fazem somente natação e o restante não pratica atividade esportiva. Quantos alunos da turma do professor Felipe praticam atividade esportiva, ou seja, fazem aula de dança ou natação?

Não sei

ANÁLISE DOS DADOS EMPÍRICOS: A IDENTIFICAÇÃO DE TRÊS NÍVEIS DE COMPLEXIDADE

Uma vez os dados coletados e computados, buscamos identificar a taxa de acerto de cada situação-problema presente no protocolo por ano escolar.

Quadro 4

Classes de situações-problema de composição e taxas de acerto (autoras desta pesquisa)

Categoria/Taxa de acerto	**5º ano**	**6º ano**	**7º ano**	**8º ano**	**9º ano**
Categoria I	≈76%	≈72%	≈79%	≈91%	≈91%
Categoria II	≈96%	≈83%	≈88%	≈96%	≈96%
Categoria III	≈40%	≈42%	≈49%	≈58%	≈60%
Categoria IV	≈33%	≈28%	≈34%	≈51%	≈49%
Categoria V	≈36%	≈31%	≈39%	≈48%	≈53%
Categoria VI	≈15%	≈14%	≈14%	≈28%	≈36%
Categoria VII	≈11%	≈15%	≈15%	≈38%	≈22%
Categoria VIII	≈8%	≈12%	≈16%	≈24%	≈25%

Os dados de que dispomos não permitem indicar uma hierarquia clara entre as categorias, mas nos convidam a considerar a forte influência de como as medidas são descritas no enunciado. Ao reagruparmos os dados, essa influência torna-se facilmente observável:

Quadro 5

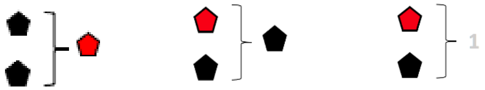
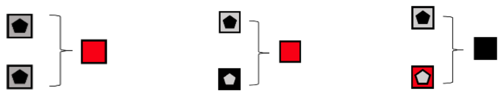
Classes de situações-problema de composição e taxas de acerto (autoras desta pesquisa)

Categoria	Taxa de acerto
Categoria I	≈ 84%
Categoria II	≈ 92%
Categoria III	≈ 52%
Categoria IV	≈ 41%
Categoria V	≈ 43%
Categoria VI	≈ 23%
Categoria VII	≈ 23%
Categoria VIII	≈ 19%

No quadro 3 identificamos três níveis na taxa de acerto: duas categorias com uma alta taxa de acerto, superior a 80%; três categorias com uma com uma taxa de acerto que varia entre 40% a 50%; e três outras categorias que possuem uma baixa taxa de acerto, inferior a 30%. Essas categorias têm em comum, justamente, a maneira como a medida de uma grandeza é enunciada, como mostra o Quadro 6.

Quadro 6

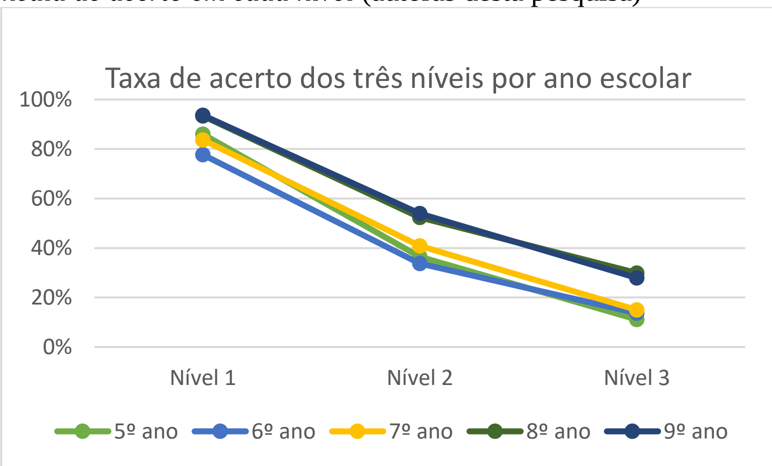
Esquemas sagitais e categorias relativos aos níveis (autoras desta pesquisa)

Níveis	Esquemas sagitais e Categorias
Nível I	 I II
Nível II	 III IV V
Nível III	 VI VII VIII

Uma vez que a população observada não é uniforme, buscamos analisar se esse resultado se confirma por ano escolar. Após essa análise, constatamos que a taxa de desempenho dos estudantes diminui significativamente de um ano para outro, em todos os anos escolares, em função dos três níveis identificados:

Figura 11

Taxa média de acerto em cada nível (autoras desta pesquisa)

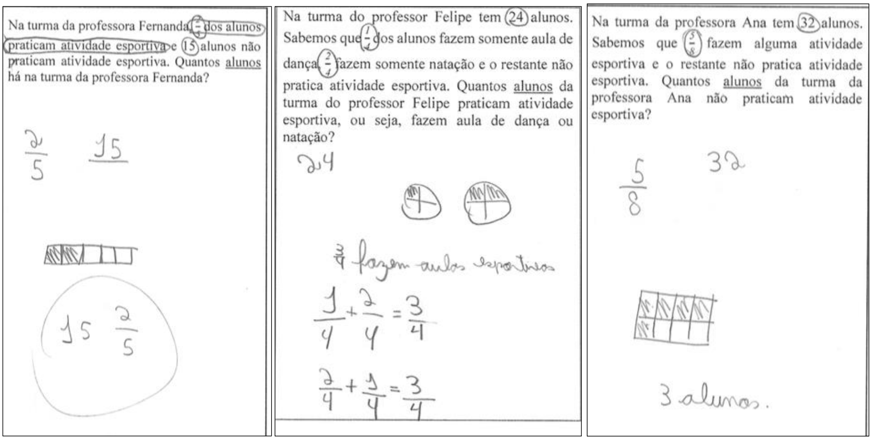


Os resultados das amostras por ano escolar corroboram a existência dos três níveis observados anteriormente. Apesar de observarmos avanços no desempenho dos estudantes de um ano para o outro, percebemos que as dificuldades próprias de cada nível de complexidade se mantêm ao longo dos cinco anos escolares analisados.

Esses resultados nos levam à conclusão de que situações-problema envolvendo apenas frações possuem uma maior taxa de acerto significativamente superior que àqueles que envolvem a fração de uma medida. A diferença no número de operações aritméticas e a complexidade em gerenciar diferentes unidades de medida podem explicar essa variação. Nesse sentido, observamos que os estudantes que possuem ferramentas de modelização que permitem representar e manipular informações como “$\frac{4}{5}$ da turma de alunos”, nem sempre conseguem tratar informações do tipo “$\frac{4}{5}$ da turma de 24 alunos”, como ilustra a Figura 12.

Figura 12

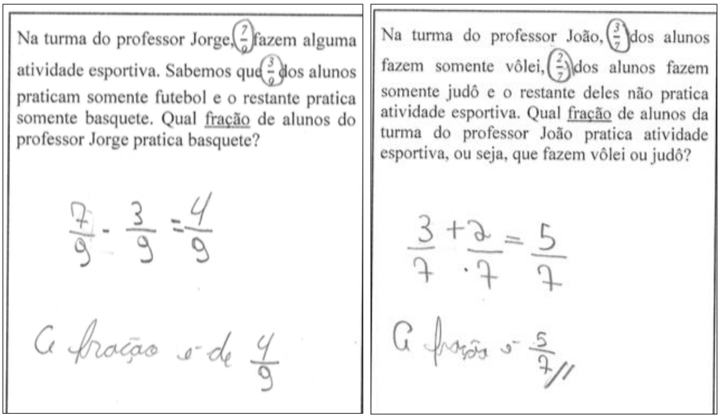
Exemplo de uma produção do estudante A do 9º ano (dados da pesquisa)



Diante dos três enunciados, o estudante modeliza corretamente os dados das situações-problema no que diz respeito à fração da grandeza em jogo, seja por meio de representações figurais (disco e representação retangular), seja por meio de modelos matemáticos (expressões numéricas). No entanto, nota-se que ele não integra aos modelos que dispõe a informação numérica da medida da grandeza, pois lhe faltam esquemas para encontrar o valor da fração de uma medida. As modelizações utilizadas pelo estudante são adequadas para resolver situações-problema do nível II, mas não permitem alcançar a solução para situações-problema do nível III, como podemos confirmar na Figura 13.

Figura 13

Exemplo de uma produção do estudante A do 9º ano (dados da pesquisa)



Na turma do professor Jorge, $\frac{7}{9}$ fazem alguma atividade esportiva. Sabemos que $\frac{3}{9}$ dos alunos praticam somente futebol e o restante pratica somente basquete. Qual fração de alunos do professor Jorge pratica basquete?

$\frac{7}{9} - \frac{3}{9} = \frac{4}{9}$

a fração é de $\frac{4}{9}$

Na turma do professor João, $\frac{3}{7}$ dos alunos fazem somente vôlei, $\frac{2}{7}$ dos alunos fazem somente judô e o restante deles não pratica atividade esportiva. Qual fração de alunos da turma do professor João pratica atividade esportiva, ou seja, que fazem vôlei ou judô?

$\frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$

a fração é $\frac{5}{7}$

Os três níveis identificados de situações-problema de composição para números fracionários e não fracionários revelam a importância de se explorar os diferentes tipos de situações-problema em sala de aula. Se defendemos um ensino de Matemática ancorado na resolução de situações-problema, o currículo prescrito e praticado pelas instituições escolares deve levar em conta a pluralidade de categorias, assim como a complexidade cognitiva e os obstáculos epistemológicos que elas envolvem. O modelo didático e os níveis de complexidade aqui apresentados podem, portanto, servir como instrumento para garantir essa diversidade e amparar escolhas curriculares ao longo da escolarização.

Apesar de termos utilizado as situações de composição como estudo de caso, acreditamos que se trata de um resultado passível de ser observado nas demais classes do Campo Aditivo.

CONCLUSÕES

> Dans leurs recherches, les mathématiciens sont confrontés à des problèmes que personne sait résoudre. Une part importante de leur activité consiste à poser des questions et résoudre des problèmes. Pour ce faire, ils sont amenés à créer des *outils* conceptuels […]. Pour les besoin de la transmission à la

> communauté scientifique, les concepts ainsi crées sont décontextualisés, formulés de la façon la plus générale possible. Ils s'intègrent dès lors au corps des connaissances déjà constituées pour les étendre ou se substituer à certaines d'entre elles. Ils acquièrent le statut d'*objet*. Il arrive que des chercheurs créent directement des objets pour mieux organiser une branche des mathématiques, pour mettre de l'ordre dans les pensées ou pour les besoins de l'exposition. Ainsi, nous disons qu'un concept est *outil* lorsque nous focalisons notre intérêt sur l'usage qui en fait pour résoudre un problème. Un même outil peut être *adapté* à plusieurs problèmes, plusieurs outils peuvent être adaptés à un même problème. Par *objet*, nous entendons l'objet culturel ayant sa place dans un édifice plus large qui est le savoir savant à un moment donné, reconnu socialement (Douady, 1986, p. 09).

Inspiradas na atividade matemática descrita por Douady (1986), podemos afirmar que os modelos científicos da atividade de pesquisa também possuem um duplo status: o de objeto e o de ferramenta. Ao longo deste texto, foi o status de objeto que buscamos atribuir ao modelo didático apresentado. Na gênese deste trabalho, encontra-se um problema de natureza metodológica: a insuficiência dos modelos que utilizávamos para descrever situações-problema envolvendo números fracionários. É na ausência de uma ferramenta adequada que surge a necessidade do nosso novo objeto.

O modelo didático em questão foi elaborado por meio de uma dialética entre análise epistemológica e análise de dados empíricos. Nesse sentido, é importante frisar que a linearidade utilizada neste artigo para a apresentação dessas duas análises não deve ser confundida com a trajetória metodológica do trabalho realizado. Essa linearidade é, como quase sempre, uma ilusão textual; o trabalho do pesquisador é frequentemente realizado por ajustes e desajustes, com idas e vindas às suas diferentes fontes de reflexão, como foi o nosso caso. Categorias foram incluídas após o protocolo piloto, e uma foi excluída após a análise dos dados da última versão do protocolo. Isso evidencia o interesse em combinar diferentes abordagens metodológicas.

Sobre os limites do estudo realizado, sublinhamos que diferentes variáveis didáticas, de forte impacto na taxa de acerto, não foram intencionalmente consideradas no protocolo de pesquisa. Não estudamos, por exemplo, o papel das grandezas em situações-problema envolvendo frações, nem tampouco o impacto de propor frações cujos denominadores são diferentes. Essas e tantas outras variáveis didáticas são igualmente importantes e devem ser consideradas por aqueles que se interessam pelo ensino e pela aprendizagem de frações.

Os níveis de complexidade aqui apresentados merecem também ser colocados em correlação com as práticas institucionais do sistema educativo brasileiro, para melhor entender os resultados que obtivemos. Em outras palavras, a diferença significativa entre os níveis de complexidade observada pelos dados desta pesquisa, especialmente no que diz respeito aos níveis II e III, pode ser igualmente explicada por uma análise curricular daquilo que é prescrito e realizado em sala de aula. Reconhecer as condições e restrições institucionais que impactam a difusão dos saberes matemáticos nos convida a repensar o currículo vigente e, nesse sentido, a vislumbrar outras formas de ensino que poderiam ter um efeito na taxa de acerto dos estudantes. Nesse contexto, podemos até nos perguntar se seria possível existir um currículo que tornaria obsoletos os níveis de complexidade aqui identificados.

Além de contribuir para o estudo de diferentes questões de pesquisa, o uso do modelo de situações de composição como ferramenta permitirá sua constante validação e eventual evolução, diante dos limites que ele possa apresentar. Afinal, a estabilidade de um modelo científico é uma fantasia do presente.

DECLARAÇÃO DE CONTRIBUIÇÃO DE AUTORIA

A investigação aqui apresentada foi desenvolvida pelas duas autoras. A primeira autora desenvolveu o modelo didático que contempla oito situações-problema do tipo composição, sendo seis delas envolvendo números fracionários. Esse modelo foi desenvolvido durante seu trabalho como pesquisadora na Université Grenoble Alpes, no âmbito do projeto francês “Pégase - Pôle pilote de formation des enseignants et de recherche pour l’éducation”. A segunda autora contribuiu principalmente para a produção dos dados junto a 987 estudantes, das regiões sul e nordeste do Brasil.

DECLARAÇÃO DE DISPONIBILIDADE DE DADOS

Os dados que sustentam o desenvolvimento empírico desta pesquisa estão armazenados junto às pesquisadoras, respeitando princípios éticos.

REFERÊNCIAS

ALLARD, C. *Etude du processus d'Institutionnalisation dans les pratiques de fin d'école primaire:* le cas de l'enseignement des fractions. Thése de l'Université de Paris 7, 2015.

BARUK, S. *Dictionnaire de mathématiques élémentaires*. Editions du Seuil. IBN 978-2-02-143655-6. 2019.

BEHR, M. L., R., POS,T., SILVER, E. Rational Number Concepts. In R.LESH & M.Landau (Eds) *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes,* pp. 91-125. New York: Academic Press, 1983

BRASIL, Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular:* Educação é a base. Brasília, DF: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação. *Parâmetros Curriculares Nacionais:* Matemática. Brasília, 1997.

CHAMBRIS, C. Petite histoire des rapports entre grandeurs et numérique dans les programmes de l'école primaire. *Repères-IREM*, v. 69, p. 5-31, 2007.

CHAMBRIS, C. Raisons d'être des grandeurs : le cas de l'arithmétique à l'école élémentaire. In: CHAACHOUA, H.; et al. (Eds.). *Actes de la XXe École d'été de didactique des mathématiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage, 2020.

DOUADY, R. . Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 7(2), 5–31, 1986.

KASPARY, D. *La noosphère, un lieu de tension pour le curriculum.* Étude didactique de la mise en place d'um système d'évaluation de manuels scolaires sur l'étude du champ additif à l'école primaire. Thèse des universités UFMS (Brésil) et UGA (France), 2020.

KIEREN, T. E. (1976) On the mathematical, cognitive and instructional foundations of rational numbers.' In R. LESH (ed.), *Number and Measurement* (pp 101-144). Columbus, OH: ERIC/SMEAC.

MAGINA, S. *et al*. *Repensando Adição e Subtração:* Contribuições da Teoria dos Campos Conceituais. São Paulo: PROEM, 2001.

NEYRET, Robert. *Contraintes et déterminations des processus de formation des enseignants : nombres décimaux, rationnels et réels dans les Instituts Universitaires de Formation des Maîtres*. 1995. 2 v. Thèse (Doctorat en didactique des mathématiques) — Université de Grenoble, Grenoble, 1995.

NUNES, T., BRYANT, P., PRETZLIK, U., BELL, D., EVANS, D., e WADE, J. *La compréhension des fractions chez les enfants.* Activité humaine et conceptualisation. pp. 225-262, 2007.

VERGNAUD, G.. *A Criança, a Matemática e a Realidade.* Trad. Maria Lucia Faria Moro. Curitiba: Editora UFPR, 2009.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. *Recherche en Didactique des Mathématiques.* Grenoble: La Pensée Sauvage, vol. 10, n. 2.3, pp. 133 a 170, 1990.

VERGNAUD, G. . Multiplicative Structures. In Lesh R., Landau M. (Ed.). *Acquisition of mathematics concepts and processes,* New York: Academic Press., pp. 127-174, 1983.

THOMPSON, P. W.; SALDANHA, L. Fractions and multiplicative reasoning. In: *Research Companion to the NCTM Standards*. [S.l.]: [s.n.], 2003.

PERRIN-GLORIAN, Marie-Jeanne. Problèmes didactiques liés à l'enseignement des grandeurs. Le cas des aires. In : DORIER, J-L. et al. (eds.). Actes de la XIe Ecole d'été de didactique des mathématiques, Corps, 21-30 Août 2001, Grenoble: La Pensée Sauvage, 2002.

ACTA SCIENTIAE

ISSN: 2178-7727
DOI: 10.17648/acta.scientiae.8173

Anexo I

Mensagem à professora colaboradora e ao professor colaborador:
Professora, Professor,

Sua contribuição nessa pesquisa é muito valiosa para nós. Agradecemos imensamente em ter encontrado um momento para realizar essa ficha de questões em sua turma e o tempo que utilizou para nos enviar os resultados que obteve.

Pode acontecer de os(as) alunos(as) encontrarem dificuldades em responder algumas questões. Mas isso não trará prejuízo algum para a pesquisa, para o(a) aluno(a) ou para a escola. Estamos interessadas em estudar os erros e as diferentes estratégias que eles(elas) colocam em prática para resolver problemas aritméticos. Por essa razão, é importante que os(as) alunos(as) resolvam individualmente cada questão. Também pedimos, por favor, para que não os ajude a resolvê-las. Em caso de dificuldade, tranquilize-os(as) dizendo não ter problema se a resposta estiver errada ou se ele(a) não souber respondê-la. Ele(a) pode, se quiser, indicar por escrito "não sei resolver". Se desejar, você pode realizar uma correção com os alunos após recolher as fichas de questões.

Essa pesquisa será realizada do 4º ao 9º ano do Ensino Fundamental com alunos de diferentes cidades e regiões brasileiras. Os dados serão utilizados para fins científicos. Nenhum dado da escola, dos(as) alunos(as) e do professor(a) serão utilizados. Para que guardemos o total anonimato dos participantes, pedimos que o(a) aluno(a) coloque um nome fictício que deseja. Isso permite mostrar ao(à) aluno(a) que ele(a) não será avaliado(a) e que seu anonimato é de fato resguardado. Você pode, antes de começar a experiência, explicar que eles estão participando de uma pesquisa científica.

Para envio das produções dos(as) alunos(as) : favor enviar as fotos (ou scanner) das produções para os seguintes números de WhatsApp XXXX. Se preferir, as cópias também poderão ser enviadas por correio para a pesquisadora brasileira, com despesa custeada pelas pesquisadoras.

Esses números podem ser utilizados em caso de dúvidas.

Agradecemos a contribuição à pesquisa brasileira em Educação Matemática.
Profa. Dra. XXXX, pesquisadora XXXX (França) e Profa. Dra. XXX, pesquisadora XXXX (Brasil)

Corresponding author: author's full name. Email: kaspary.d@gmail.com

Nome fictício do(a) aluno(a): Ano escolar: Idade do(a) aluno(a): Data:

Em uma escola, foi realizada uma pesquisa sobre as práticas esportivas dos alunos. A seguir, você encontrará informações dos alunos de nove turmas diferentes. Responda às questões a seguir sobre cada uma dessas nove turmas. Você pode resolvê-las do modo que considerar mais conveniente. Pedimos o favor de deixar registrado toda a sua resolução.

Na turma do professor Lucas, 22 alunos fazem alguma atividade esportiva e 7 alunos não realizam atividade esportiva. Quantos <u>alunos</u> há na turma do professor Lucas?	Na turma da professora Maria tem 28 alunos. Sabemos que 17 alunos fazem alguma atividade esportiva e o restante não pratica atividade esportiva. Quantos <u>alunos</u> da turma da professora Maria não praticam atividade esportiva?	Na turma do professor Felipe tem 24 alunos. Sabemos que $\frac{1}{4}$ dos alunos fazem somente aula de dança, $\frac{2}{4}$ fazem somente natação e o restante não pratica atividade esportiva. Quantos <u>alunos</u> da turma do professor Felipe praticam atividade esportiva, ou seja, fazem aula de dança ou natação?
Categoria I	Categoria II	Categoria VI
<u>Modelo Matemático Subjacente:</u> $M_1 + M_2 = M_3$ <u>Estrutura aditiva:</u> • Dados conhecidos: duas medidas M_1 e M_2, tal que $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ (*partes do todo*).	<u>Modelo Matemático Subjacente:</u> $M_1 + M_2 = M_3$ <u>Estrutura aditiva:</u> • Dados conhecidos: duas medidas M_1 e M_3, tal que $M_1 \subset M_3$ (uma *parte do todo* e o *todo*).	<u>Modelo Matemático Subjacente:</u> $[\frac{a}{b}(M_\alpha)] + [\frac{c}{d}(M_\beta)] = M_3$ <u>Estrutura aditiva:</u> • Dados conhecidos: dois valores fracionários de uma grandeza cuja medida é conhecida.

• Dado M_3 procurado: conjunto união de M_1 et M_2 (o *todo*). <u>Estratégias e dificuldades possíveis:</u> • Operação de adição: ○ algoritmo armado; sobrecontagem com recurso pictórico, gestual, oral ou mental; cálculo mental. ➢ uma resposta incorreta decorre do cálculo realizado. • Operação diferente da adição: ➢ incompreensão da estrutura do problema; ➢ dificuldade acentuada nas demais situações.	• Dado procurado: M_2, o complementar de M_1 em M_3 (uma *parte do todo*). <u>Estratégias e dificuldades possíveis:</u> • Operação de adição: ○ sobrecontagem com recurso pictórico, gestual, oral ou mental; cálculo mental. ➢ uma resposta incorreta decorre do cálculo realizado. • Operação de subtração: ○ algoritmo armado; cálculo mental; ➢ uma resposta incorreta decorre do cálculo realizado. • Outra operação aritmética: ➢ incompreensão da estrutura do problema; ➢ dificuldade acentuada nas demais situações.	• Dado procurado: o conjunto união de duas medidas (o *todo*). <u>Estratégias e dificuldades possíveis:</u> • Operação de adição e campo multiplicativo ○ cálculo de $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$ e cálculo de $\frac{e}{f}(M) = M_3$. ○ cálculo de $\frac{a}{b}(M) = M_1$ e $\frac{c}{d}(M) = M_2$ e cálculo de $M_1 + M_2 = M_3$. ➢ erro ao operar com números fracionários, por exemplo, $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$. ➢ dificuldade em calcular a fração de uma medida. • Outra operação aritmética: ➢ incompreensão da estrutura do problema.

Na turma do professor João, $\frac{3}{7}$ dos alunos fazem somente vôlei, $\frac{2}{7}$ dos alunos fazem somente judô e o restante deles não pratica atividade esportiva. Qual <u>fração</u> de alunos da turma do professor João pratica atividade esportiva, ou seja, que fazem vôlei ou judô?	Na turma da professora Bianca tem 30 alunos. Sabemos que 23 alunos praticam alguma atividade esportiva. Qual <u>fração</u> de alunos da turma da professora Bianca não pratica atividade esportiva?	Na turma da professora Beatriz, $\frac{4}{5}$ dos alunos fazem alguma atividade esportiva e o restante não pratica atividade esportiva. Qual <u>fração</u> de alunos da turma da professora Beatriz não pratica atividade esportiva?
Categoria III	Não categorizada	Categoria V
<u>Modelo Matemático Subjacente:</u> $\frac{a}{b}$(M) + $\frac{c}{d}$(M) = $\frac{e}{f}$(M) <u>Estrutura aditiva:</u> • Dados conhecidos: dois valores fracionários de uma grandeza cuja medida é desconhecida (*partes do todo*). • Dado procurado: valor fracionário união de uma grandeza cuja medida é desconhecida (o *todo*) <u>Estratégias e dificuldades possíveis:</u> • Operação de adição:	<u>Modelo Matemático Subjacente:</u> $\frac{a}{b}$(M_1) + $\frac{c}{b}$(M_2) = $\frac{d}{b}$(M_3) <u>Estrutura aditiva:</u> • Dados conhecidos: duas medidas M_1 e M_3, tal que $M_1 \subset M_3$ (uma *parte do todo* e o *todo*). • Dado procurado: valores fracionários de uma grandeza cuja medida é conhecida (uma fração da *parte do todo*)	<u>Modelo Matemático Subjacente:</u> $\frac{a}{b}$ (M_3) + $\frac{c}{d}$ (M_3) = 1 ou $\frac{a}{b}$ (M) + $\frac{c}{d}$ (M) = $\frac{e}{e}$(M) <u>Estrutura aditiva:</u> • Dados conhecidos: um valor fracionário de uma grandeza cuja medida é desconhecida (uma *parte do todo*) • Dado procurado: um valor fracionário de uma grandeza cuja medida é desconhecida (uma *parte do todo*) • Dado implícito: o *todo*, a unidade.

○ com recurso pictórico; cálculo mental; sobrecontagem dos numeradores; modelo matemático. ➢ erro ao operar com números fracionários, por exemplo, $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$. • Atribuição de uma medida fictícia à M: ➢ dificuldade em atribuir um valor estratégico, múltiplo dos denominadores; ➢ passagem pelo campo multiplicativo. • Outra operação aritmética: ➢ incompreensão da estrutura do problema; dificuldade acentuada nas demais situações.	Apesar de fazer parte do protocolo, situações-problema desse tipo não constitui uma classe no modelo proposto nesse artigo. Notemos que o problema pode ser resolvido de duas maneiras: - 30 – 23 = 7, logo $\frac{7}{30}$ - $\frac{30}{30}$ - $\frac{23}{30}$= $\frac{7}{30}$ Podemos observar que trata-se de um problema misto e que em cada uma dessas estratégias a estrutura de composição em jogo já é descrita pelas outras classes do modelo: classes I et VII, respectivamente.	<u>Estratégias e dificuldades possíveis:</u> ➢ ausência de modelos para representar o *todo*. . • Operação de adição: ○ cálculo mental; sobrecontagem dos numeradores. ➢ erro ao operar com números fracionários. • Operação de subtração: ○ com recurso pictórico; cálculo mental; modelo matemático. ➢ erro ao operar com números fracionários. Atribuição de uma medida fictícia à M: ➢ dificuldade em atribuir um valor estratégico, múltiplo dos denominadores; ➢ passagem pelo campo multiplicativo.

Na turma do professor Jorge, $\frac{7}{9}$ fazem alguma atividade esportiva. Sabemos que $\frac{3}{9}$ dos alunos praticam somente futebol e o restante pratica somente	Na turma da professora Ana tem 32 alunos. Sabemos que $\frac{5}{8}$ fazem alguma atividade esportiva e o restante não pratica atividade esportiva. Quantos	Na turma da professora Fernanda, $\frac{2}{5}$ dos alunos praticam atividade esportiva e 15 alunos não praticam

basquete. Qual <u>fração</u> de alunos do professor Jorge pratica basquete?	<u>alunos</u> da turma da professora Ana não praticam atividade esportiva?	atividade esportiva. Quantos <u>alunos</u> há na turma da professora Fernanda?
Categoria IV	Categoria VIII	Classe VII
<u>Modelo Matemático Subjacente:</u> $\frac{a}{b}(M) + \frac{c}{d}(M) = \frac{e}{f}(M)$ <u>Estrutura aditiva:</u> • Dados conhecidos: dois valores fracionários de uma grandeza cuja medida é desconhecida (uma *parte do todo* e o *todo*) • Dado procurado: valor fracionário de uma grandeza cuja medida é desconhecida (uma *parte do todo*). <u>Estratégias e dificuldades possíveis:</u> • Operação de adição: ○ cálculo mental; sobrecontagem dos numeradores. • Operação de subtração: ○ com recurso pictórico; cálculo mental; modelo matemático.	<u>Modelo Matemático Subjacente:</u> $[\frac{a}{b}(M_3)] + M_2 = M_3$, com $M_2 = \frac{c}{b}(M_3)$ <u>Estrutura aditiva:</u> • Dados conhecidos: um valor fracionário de uma grandeza cuja medida é conhecida e o valor de uma medida (uma *parte do todo* e o *todo*) • Dado procurado: valor de uma medida (uma *parte do todo*). <u>Estratégias e dificuldades possíveis:</u> • Operação com números não fracionários: ○ cálculo de $\frac{a}{b}$ (M_3) e cálculo da diferença entre M_3 e M_2. • Operação com números fracionários: ○ cálculo de $\frac{b-a}{b} = \frac{c}{b}$ e cálculo de $\frac{c}{b}(M_3)$.	<u>Modelo Matemático Subjacente:</u> $[\frac{a}{b}(M_3)] + M_2 = M_3$, com $M_2 = \frac{c}{b}(M_3)$ <u>Estrutura aditiva:</u> • Dados conhecidos: um valor fracionário de uma grandeza cuja medida é desconhecida e o valor de uma medida (*partes do todo*) • Dado procurado: conjunto união de duas medidas (o *todo*) <u>Estratégias e dificuldades possíveis:</u> ➢ ausência de modelos para representar o *todo* . • encontrar a fração $\frac{b-a}{b}$ e realizar o cálculo proporcional passando pela fração unitária $\frac{1}{b}$ e em seguida calcular a soma de duas medidas relativas a $\frac{a}{b}(M_3)$ e $\frac{c}{b}(M_3)$.

➢ erro ao operar com números fracionários. Atribuição de uma medida fictícia à M: ➢ dificuldade em atribuir um valor estratégico, múltiplo dos denominadores; ➢ passagem pelo campo multiplicativo. • Outra operação aritmética: ➢ incompreensão da estrutura do problema; dificuldade acentuada nas demais situações.	➢ erro ao operar com números fracionários. ➢ ausência de modelos para representar o *todo* . • Outra operação aritmética com os dois dados do problema: ➢ incompreensão da estrutura do problema;	• Operações aritméticas com os dois dados do problema . ➢ Incompreensão da estrutura do problema.

Quadro – protocolo e análise a priori das situações-problema propostas aos estudantes
Fonte: Elaborado pelas autoras