ISSN: 2178-7727
DOI: 10.17648/acta.scientiae.7328

Validación de una escala para evaluar la reversibilidad del pensamiento en problemas aritmético verbales

Beatriz Sánchez-Barbero [a]
María José Cáceres [a]
José María Chamoso [a]
[a] Universidad de Salamanca, Salamanca, España

Recibido para publicación 27 jul. 2022. Aceptado tras revisión 10 ago. 2022
Editora designada: Claudia Lisete Oliveira Groenwald

RESUMEN

Contexto: La reversibilidad es un concepto clave para la comprensión y desarrollo del pensamiento matemático. Existe acuerdo en que resolver problemas es una parte fundamental de la competencia matemática, y algunos autores consideran el pensamiento reversible como un requisito exigible para ello. **Objetivos**: Se quiere validar un instrumento que valore la reversibilidad del pensamiento cuando se resuelven problemas aritmético-verbales que involucran diversas operaciones, estructuras semánticas y proximidad de la información situacional. **Diseño**: Se realizó un estudio cualitativo a partir de los datos obtenidos por jueces expertos y un estudio cuantitativo para determinar la validez y fiabilidad del instrumento. **Contexto y Participantes**: Participaron 318 estudiantes de diferentes colegios españoles de toda la etapa de Educación Primaria (6 a 12 años). **Recolección y análisis de los datos:** los participantes realizaron 180 tareas matemáticas distribuidas en tres escalas teóricas, dos operaciones y cuatro configuraciones semánticas. **Resultados:** Para determinar la consistencia de los datos se realizó un análisis de fiabilidad de forma global y en cada una de las escalas, siendo todos los valores superiores a .90. Se realizó un Análisis Factorial Exploratorio que dio como resultado tres factores y que explicaban más del 70%. Para analizar la validez del instrumento, se realizó un Análisis Factorial Confirmatorio cuyos índices mostraron un ajuste de los modelos. **Conclusiones**: Se considera que el instrumento diseñado es suficientemente robusto para valorar la reversibilidad de las operaciones básicas de adición y sustracción y, además, para analizar la discriminación de los problemas aritmético-verbales según la estructura semántica y el contexto situacional de estos.

Palabras clave: reversibilidad; pensamiento matemático; análisis factorial; validez de constructo; educación primaria.

Autora correspondiente: Maria José Cáceres. Email: majocac@usal.es

Validação de uma escala para avaliar a reversibilidade do pensamento em problemas de aritmética verbal

RESUMO

Contexto: A reversibilidade é um conceito chave para a compreensão e desenvolvimento do pensamento matemático. Há consenso de que a resolução de problemas é parte fundamental da competência matemática e alguns autores consideram o pensamento reversível como um dos seus requisitos. **Objetivos**: Pretende-se validar um instrumento que avalie a reversibilidade do pensamento na resolução de problemas aritmético-verbais envolvendo diversas operações, estruturas semânticas e proximidade de informações situacionais. **Desenho:** Foi realizado um estudo qualitativo com base nos dados obtidos por especialistas e um estudo quantitativo para determinar a validade e confiabilidade do instrumento. **Ambiente e participantes**: participaram 318 alunos de diferentes escolas espanholas do Ensino Fundamental (6 a 12 anos). **Coleta e análise de dados**: os participantes realizaram 180 tarefas matemáticas distribuídas em três escalas teóricas, duas operações e quatro configurações semânticas. **Resultados**: Para determinar a consistência dos dados, foi realizada uma análise de confiabilidade globalmente e em cada uma das escalas, sendo todos os valores superiores a 0,90. Foi realizada uma Análise Fatorial Exploratória, resultando em três fatores que explicaram mais de 70%. Para analisar a validade do instrumento, foi realizada uma Análise Fatorial Confirmatória, cujos índices mostraram um ajuste dos modelos. **Conclusões**: Considera-se que o instrumento projetado é suficientemente robusto para avaliar a reversibilidade das operações básicas de adição e subtração e, ainda, para analisar a discriminação de problemas aritmético-verbais de acordo com sua estrutura semântica e contexto situacional.

Palavras-chave: reversibilidade; pensamento matemático; resolução de problemas; análise fatorial; validade do constructo; educação primária.

INTRODUCCIÓN

La reversibilidad es un proceso mental que consiste en la construcción de una correlación bidireccional entre una condición inicial y un resultado, y entre el resultado y la condición inicial. Este concepto es un aspecto clave en el desarrollo de la competencia matemática. Algunos autores consideran que el pensamiento reversible es el requisito principal para resolver problemas matemáticos, sin embargo, la reversibilidad suele ser un problema para los estudiantes (Fitmawati et al., 2019).

Las investigaciones sobre resolución de problemas matemáticos son constantes desde hace varias décadas. Autores como Kilpatrick (1978) o Kulm (1979) estudiaron las variables dependientes e independientes que deben ser consideradas en la enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas. Clasificaron las variables independientes en: variables del sujeto, como aquellas que describen o miden cualidades propias de los que resuelven; de la tarea, que se refieren a las características de los problemas; y de situación, que especifican las peculiaridades del entorno físico, psicológico o social en los que se produce la resolución del problema. A su vez, las variables de la tarea se pueden clasificar en: variables de estructura, relacionadas con la estructura matemática del problema; de formato, vinculadas a la estructura sintáctica del enunciado; y de contexto, referidas a la información situacional que se ofrece, su estructura semántica y el conocimiento del campo semántico (Puig y Cerdán, 1988).

Uno de los tipos de problemas más utilizados en la enseñanza de las matemáticas es el problema aritmético verbal (en adelante PAV) entendido como la "descripción verbal de situaciones problemáticas de las que surgen una o más preguntas cuya respuesta puede obtenerse mediante la aplicación de operaciones matemáticas a los datos numéricos presentes en el enunciado" (Verschaffel, et al., 2014, p. 641). En este trabajo se quiere validar un instrumento que evalúe la reversibilidad del pensamiento según la operación de resolución, la estructura semántica del PAV y la proximidad de la información situacional para quien lo resuelve. Los motivos que llevan a la validación de este instrumento son, tanto la importancia del conocimiento sobre el desarrollo la reversibilidad del pensamiento, como la influencia que pueden tener las variables de la tarea de los PAV en su desarrollo.

El estudio de la reversibilidad del pensamiento se inicia con el estudio del desarrollo cognitivo de los niños de Piaget, quien establece cuatro etapas: etapa sensorio-motora, etapa pre-operacional; etapa de operaciones concretas y etapa de operaciones formales. Sitúa la tercera de ellas entre los 7 y 11 años y sugiere que los niños, durante este periodo, comienzan el pensamiento lógico operativo. Es en esta etapa cuando se desarrollan los principios de conservación y reversibilidad. A partir de los 8 años comienzan a resolver problemas complejos (Babakr et al., 2019). Piaget (1970) definió los objetos matemáticos como productos de acciones mentales coordinadas. En particular, las acciones (operaciones) lógico-matemáticas se caracterizan por su componibilidad y reversibilidad. La componibilidad potencia el razonamiento matemático con la posibilidad de combinar cadenas de acciones mentales. Por ejemplo, los estudiantes que conocen las operaciones pueden combinar resultados obtenidos en una de ellas con otras para obtener nuevos resultados. Relacionada con estas acciones, la reversibilidad del pensamiento fue inicialmente definida, de manera amplia, por Piaget como la comprensión estructural de las operaciones que permite acciones reversibles (Norton y Boyce, 2015).

Una de las formas más simples de reversibilidad del pensamiento consiste en comprender cómo la resta se relaciona inversamente con la suma. De hecho, los investigadores en educación matemática han estudiado la reversibilidad como un aspecto crítico del desarrollo del razonamiento matemático de los estudiantes (Greer, 2011; Hackenberg y Lee, 2015; Simon et al., 2016). Al invertir acciones mentales, como las que implican las operaciones de sumar y restar, los estudiantes pueden comprobar el resultado. Pero la reversibilidad del pensamiento se puede estudiar tanto en las propias estructuras matemáticas de las operaciones aditivas como en los PAV que utilizan dichas estructuras matemáticas. Las habilidades matemáticas relacionadas con el éxito en la resolución de problemas son la reversibilidad y flexibilidad. La reversibilidad se puede explicar en función de la estructura matemática, como el planteamiento, el proceso y el resultado de las operaciones involucradas (Rohimah y Prabawanto, 2019).

Los PAV se clasifican según su estructura matemática en PAV de estructura aditiva o multiplicativa. En concreto, PAV de estructura aditiva son aquellos que se resuelven mediante el planteamiento y resolución de una operación de adición o sustracción. En el caso de los problemas aditivos simples, en función de la estructura sintáctica utilizada en su redacción, se pueden encontrar seis sentencias abiertas para la adición y otras 6 para la sustracción en función de dónde se encuentre el término desconocido (Tabla 1; Castro et al., 1995).

Tabla 1

Tipos y configuraciones de sentencias abiertas de adición y sustracción

Configuraciones	Para la adición	Para la sustracción
Directa	$a + b = ?$	$a - b = ?$
Semidirecta 1	$a + ? = c$ $c = a + ?$	$a - ? = c$ $c = a - ?$
Semidirecta 2	$? + b = c$ $c = ? + b$	$? - b = c$ $? = a - b$
Indirecta	$? = a + b$	$c = ? - b$

En los libros de texto españoles abundan los PAV de estructura aditiva. Estos problemas pueden ser considerados como auténticas entidades discursivas (Orrantia et al., 2005), lo que ha permitido estudios en profundidad de sus estructuras semánticas. Muchos autores se han interesado por este aspecto y se han establecido diferentes esquemas de clasificación (Carpenter y Moser, 1982; Riley y Greeno, 1988; Vergnaud, 1982). Los PAV de una etapa son aquellos que se expresan mediante estructuras semánticas simples y se resuelven con una única operación aritmética. Describen situaciones que se pueden referir al aumento o disminución de una cantidad (Cambio), la combinación de dos cantidades (Combinación) o la comparación de dos cantidades (Comparación). Los problemas de Combinación y Comparación describen situaciones estáticas, mientras que los de Cambio representan acciones en situaciones dinámicas. Los problemas de Igualación combinan características de Cambio y Comparación y son menos comunes. Otros PAV utilizan estructuras semánticas compuestas, que son combinaciones de estructuras simples con un número de etapas determinado para llegar a su solución (Rodríguez et al., 2019).

Los PAV de una etapa involucran tres conjuntos de datos, de los cuales se desconoce uno. Para los problemas de Comparación, estos conjuntos se denominan conjuntos de referencia, diferencia y comparación (Stern, 1993). Sus equivalentes en situaciones dinámicas son el inicio, el cambio y los de resultados (Gabler y Ufer, 2021). En función del conjunto desconocido, el problema responde a diferentes estructuras matemáticas que no dependen de la estructura semántica del problema. Es decir, diferentes formas de redacción del problema pueden determinar la misma estructura matemática. En la Tabla 2 se muestran ejemplos de problemas con diferente estructura semántica que dan lugar a la misma estructura matemática “4+3=?”.

Tabla 2

Problemas con diferentes estructuras semánticas y la misma estructura matemática

Estructura semántica	Problema
Cambio	Santiago tiene 4 gusanos de seda y Ana le da otros 3. ¿Cuántos gusanos tiene ahora Santiago?
Combinación	Santiago tiene 4 gusanos de seda y Ana tiene 3.

	¿Cuántos gusanos tienen entre los dos?
Comparación	Santiago tiene 4 gusanos de seda y Ana tiene 3 más que Santiago. ¿Cuántos gusanos tiene Ana?
Igualación	Santiago tiene 4 gusanos de seda. Si tuviera 3 gusanos más, tendría tantos como Ana. ¿Cuántos gusanos tiene Ana?

En relación con la estructura semántica de los PAV de una etapa, Fuson et al. (1988) distinguieron entre redacción aditiva y sustractiva. De manera que algunas variaciones en la redacción de un problema también pueden conectar con la reversibilidad del pensamiento al conducir a la misma estructura matemática aditiva o sustractiva. Lingüísticamente, las relaciones en los problemas de Comparación se pueden expresar mediante términos relacionales como "más", "más grande" (redacción aditiva) o "menos", "más pequeño" (redacción sustractiva). Por ejemplo, "Ana tiene 3 gusanos de seda más que Santiago" también se puede expresar con palabras sustractivas: "Santiago tiene 3 gusanos de seda menos que Ana". De manera similar, los problemas verbales dinámicos se pueden expresar con verbos de acción que se refieren a sumar (redacción aditiva, por ejemplo, 'obtener', 'comprar',) o eliminar una cantidad (redacción sustractiva, por ejemplo, 'regalar', 'vender').

La resolución de los PAV de una etapa consiste en relacionar dos cantidades conocidas mediante una operación aritmética para obtener una cantidad desconocida, según Verschaffel et al. (2000) esto se puede hacer de forma genuina o superficial. La resolución de forma genuina exige la comprensión tanto de la situación propuesta como de la estructura matemática. En cambio, la forma superficial consiste en una traducción ordenada del enunciado al lenguaje matemático independientemente de la información situacional. Solo los problemas que tratan contextos situacionales que requieren un bajo nivel de comprensión pueden resolverse de forma superficial (Vicente et al., 2018, Vicente et al. 2020). La proximidad (cercanía o lejanía) de la información situacional a la realidad cotidiana de quien trata de resolver el problema influye en el nivel de abstracción requerido y, por tanto, a su comprensión (Conejo y Ortega, 2013, Vicente y Manchado, 2017).

Estudios previos establecen que complejidad de los problemas depende tanto de la estructura matemática que se debe afrontar como de proximidad de la información situacional. Por ejemplo, Castro et al. (1995) afirman que las sentencias matemáticas de configuración directa son las que presentan menor dificultad. Además, las sentencias de sustracción suelen generar más dificultades que las de adición, donde "? - b = c", es significativamente más difícil que las otras cinco. Sin embargo, no se encuentran diferencias entre la dificultad de las sentencias semidirectas "a +? = c", "? + b = c" y "a - ? = c". En general, las sentencias con la operación al lado derecho del signo igual son significativamente más difíciles que las otras. Trabajos como los de Daroczy et al. (2015) o Stern (1993) muestran que los PAV con un conjunto de referencia/inicio desconocido (correspondientes a las estructuras matemáticas indirectas) son más difíciles que aquellos con un conjunto de comparación /resultado desconocido (correspondientes a las estructuras matemáticas indirectas). Por otro lado, Conejo y Ortega, (2013) manifiestan que la información situacional y el vocabulario que se utiliza en su presentación también determinan la complejidad en la resolución, de manera que los problemas que involucran conceptos que resultan lejanos por tener un uso poco habitual, implican mayor dificultad que los que utilizan conceptos cercanos y conocidos por su uso habitual.

Investigaciones recientes cuestionan diversos aspectos de la teoría de Piaget (1970), entre ellos, muestran la evidencia de que, los niños, en la etapa de las operaciones concretas, no pueden comprender la relación entre aquellas cosas que no existen en el mundo físico, como la relación entre números; que no todos los niños alcanzan la etapa de las operaciones formales o la influencia de los contextos sociales en el desarrollo cognitivo (Babakr et al., 2019). La validación de este instrumento pretende avanzar en la comprensión del desarrollo de la reversibilidad en los niños de 6 a 12 años.

METODOLOGÍA

Población y muestra

La población de este trabajo son alumnos de colegios públicos, privados y concertados de Educación Primaria de España. Se obtuvo una muestra por disponibilidad de centros educativos formada por 318 alumnos[1]

[1] Los alumnos fueron informados de su participación en la investigación y dieron su aceptación de forma implícita, al rellenar el cuestionario, resguardando su identidad. Los autores asumen toda responsabilidad y eximen a Acta Scientiae de cualquier acción que de ello se produzca, incluida la plena asistencia y la posible indemnización a cualquier daño que resulte para cualquiera de los participantes en la investigación, de conformidad con la Resolución 510, de 7 de abril de 2016, del Consejo Nacional de Salud de Brasil.

(150 hombres y 168 mujeres) de dos comunidades autónomas (Castilla y León y Extremadura), con rango de edad de 5 a 12 años que abarcaban toda la etapa de Educación Primaria (de 1º a 6º de Educación Primaria). Todos los sujetos que participan en las pruebas conocen y practican la resolución de los algoritmos de adición y sustracción.

Respecto al tamaño de la muestra, por un lado, recomendaciones clásicas consideran que una muestra de entre 200 y 300 sujetos es suficiente; y, por otro lado, recomendaciones actuales sugieren que el tamaño de la muestra interactúa con otros factores como pueden ser las comunalidades de los ítems, considerando una muestra de entre 200 y 250 como suficiente (Beavers et al., 2013; Fernando y Anguiano-Carrasco, 2010). Por todo ello, se creyó conveniente y suficiente realizar la validación con esta muestra.

Instrumento

El instrumento está formado 180 tareas matemáticas (Anexo 1), que se agrupan en tres escalas teóricas basadas en los aspectos que pueden influir en la complejidad de un problema aritmético verbal (Adónis, 2006):

- Una primera escala formada por 60 operaciones matemáticas de adición y sustracción con números pequeños, que responden a las diversas estructuras matemáticas y se denominan *Estructuras* (en adelante *ST*). En función del lugar que ocupaba el término desconocido en la sentencia abierta, estas estructuras matemáticas se presentaron en cuatro modalidades de acuerdo con las configuraciones explicadas anteriormente: *Directa* (en adelante *D*), *Semidirecta 1* (en adelante *S1*), *Semidirecta 2* (en adelante *S2*) e *Indirecta* (en adelante *I*).
- Las otras dos escalas están formadas por problemas en las que cambia la proximidad de la información situacional, una con 60 problemas donde la información situacional utiliza conceptos que se consideran cercanos al niño por ser de uso frecuente, denominados *Problemas Próximos* (en adelante *PP*) y, la otra, 60 problemas donde se presentan conceptos que se suponen alejados al niño por ser de uso ocasional, denominados *Problemas Lejanos* (en adelante *PL*). Las tareas propuestas en estas escalas guardan relación con las propuestas en la escala *ST*, tanto en las configuraciones (*D, S1, S2* e *I*) como se ve en la Tabla 3, como

con el orden de aparición en relación con la configuración de la estructura matemática correspondiente (Tabla 4).

Tabla 3

Ejemplos de tareas en los diversos cuestionarios según su configuración

Configuración	Cuestionario Estructuras	Cuestionario Problemas Próximos	Cuestionarios Problemas Lejanos
Directa (D)	$4 + 3 = \square$	Santiago tiene 4 gusanos de seda y Ana tiene 3. ¿Cuántos gusanos tienen entre los dos?	Santiago tiene 4 besugos y Ana tiene 3. ¿Cuántos besugos tienen entre los dos?
Semidirecta 1 (S1)	$4 + \square = 7$	Santiago tiene 4 gusanos de seda. ¿Cuántos tiene Ana, si entre los dos tienen 7?	Santiago tiene 4 besugos. ¿Cuántos tiene Ana, si entre los dos tienen 7?
Semidirecta 2 (S2)	$\square + 3 = 7$	¿Cuántos gusanos de seda tiene Santiago, si Ana tiene 3 y entre los dos tienen 7 gusanos?	¿Cuántos besugos tiene Santiago, si Ana tiene 3 y entre los dos tienen 7 besugos?
Indirecta (I)	$\square = 4 + 3$	¿Cuántos gusanos de seda tienen entre Santiago y Ana, si Santiago tiene 4 y Ana tiene 3?	¿Cuántos besugos tienen entre Santiago y Ana, si Santiago tiene 4 y Ana tiene 3?

La Tabla 4 muestra cómo estaban relacionadas las *ST*, *PP* y *PL*, las configuraciones *D*, *S1*, *S2* e *I* y el tipo de operación (adición o sustracción) en las tres escalas utilizadas (ampliar información en Anexo 1).

Tabla 4

Esquema de tareas de las tres escalas del instrumento

Operación	**Configuración**	**Escalas**
		Nº de ítem de ST, PP, PL
Adición	Directa	7, 8, 11, 13, 25, 37, 51, 52
	Semidirecta 1	38, 39, 42, 45, 47, 50, 54, 55
	Semidirecta 2	6, 9, 23, 28, 30, 35, 40, 41
	Indirecta	3, 15, 17, 19, 21, 24, 31, 32
Sustracción	Directa	1, 2, 5, 22, 36, 49, 57
	Semidirecta 1	44, 46, 48, 53, 56, 58, 59
	Semidirecta 2	4, 12, 18, 20, 33, 34, 43
	Indirecta	10, 14, 16, 26, 27, 29, 60

Cinco expertos en educación matemática realizaron un análisis de los ítems de cada una de las escalas, para cada uno de ellos se consideraron cuatro características: claridad, pertinencia, relevancia y suficiencia (Escobar-Pérez y Cuervo-Martínez, 2008, citados en Marbán y Fernández-Gago, 2021) y se les dio una valoración de 1 (no cumple con el criterio) a 4 (nivel alto de cumplimiento). Inicialmente se contaba con 8 ítems en cada estructura matemática (*D*, *S1*, *S2* e I) de cada una de las escalas (*ST*, *PP* y *PL*) para cada operación (adición y sustracción), y tras acuerdos de los expertos se decidió eliminar un ítem de cada estructura y de cada escala en la operación de sustracción por duplicidad de información, por lo que el instrumento final se compuso por los ítems que figuran en la Tabla 4.

Procedimiento de recogida y análisis de datos

Todos los alumnos que participaron en el estudio realizaron las tareas propuestas en las 3 escalas teóricas. Puesto que el número de tareas era elevado, se optó por llevar a cabo la resolución en tres días diferentes, uno por cada escala, para que el factor cansancio no distorsionara los resultados.

La puntuación de las tareas se realizó en función de la presencia o ausencia de error, de forma que se le asignaba el valor numérico 1 si la respuesta era correcta y 0 si era incorrecta. Para el cálculo de los totales de las configuraciones estudiadas (*D*, *S1*, *S2* e *I*) se sumaron todas las puntuaciones de cada una de estas configuraciones en cada una de las escalas. Se consideraron el *Total de Estructuras Directas* (en adelante *TSTD*), el *Total de Estructuras Semidirectas 1* (en adelante *TSTS1*), el *Total de Estructuras Semidirectas 2* (en adelante *TSTS2*), el *Total de Estructuras Indirectas* (en adelante *TSTI*), el *Total de Problemas Próximos Directos* (en adelante *TPPD*), el *Total de Problemas Próximos Semidirectos 1* (en adelante *TPPS1*), el *Total de Problemas Próximos Semidirectos 2* (en adelante *TPPS2*), el *Total de Problemas Próximos Indirectos* (en adelante *TPPI*), el *Total de Problemas Lejanos Directos* (en adelante *TPLD*), el *Total de Problemas Lejanos Semidirectos 1* (en adelante *TPLS1*), el *Total de Problemas Lejanos Semidirectos 2* (en adelante *TPLS2*) y el *Total de Problemas Lejanos Indirectos* (en adelante *TPLI*).

Para analizar la consistencia interna del instrumento se utilizó el programa IBM SPSS versión 26. Se estudió tanto la fiabilidad de los datos como la validación del constructo. Para la estudiar la fiabilidad de los datos se calculó el Coeficiente de Alfa de Cronbach para cada una de las escalas (*ST*, *PP* y *PL*) con todos sus ítems. Para la validación del constructo, se realizó sobre el cálculo de cada uno de los totales de cada una de las escalas en cada una de las configuraciones (*TSTD*, *TSTS1*, *TSTS2*, *TSTI*, *TPPD*, *TPPS1*, *TPPS2*, *TPPI*, *TPLD*, *TPLS1*, *TPLS2* y *TPLI*):

- Un Análisis de Componentes Principales (en adelante ACP) con la intención de reducir los datos y un Análisis Factorial Exploratorio (en adelante AFE) con el programa IBM SPSS versión 26. Para su aplicación e interpretación se tuvo en cuenta el valor de la medida de adecuación muestral de Kaiser-Meyer-Olkin (en adelante KMO) superior a .70 que indica una interrelación adecuada entre ítems y la prueba de esfericidad de Barlett cuya significatividad indica que las variables pueden compararse entre ellas (Pérez y Medrano, 2010).
- Un Análisis Factorial Confirmatorio (en adelante AFC) con el programa IBM SPSS Amos versión 26. Se utilizó el procedimiento de ajuste de Máxima Verosimilitud y se tuvo en cuenta los indicadores CMIN/DF entre 2 y 5; NFI, NNFI/TLI, IFI y CFI > .90; RMSEA < .08; PRATIO, PCFI, PNFI > .70 (Byrne, 2010; Escobedo et ál, 2016; Hair et al., 2014 y Kline, 2010).

RESULTADOS

Fiabilidad y análisis de los ítems

Para el análisis de la fiabilidad, se tuvo en cuenta el Coeficiente de Alfa de Cronbach que asume que para valores superiores al .70 se considera aceptable la fiabilidad de del instrumento. Los valores de estos coeficientes para el instrumento, de 180 ítems, fue de .97 y para cada una de las escalas *ST*, *PP* y *PL* fueron de .89, .94 y .96 respectivamente, por lo que se verifica, no solo que las escalas son aceptables, sino que son fiables, estables y con una consistencia interna muy alta, calificándose, por ello, con un nivel de fiabilidad excelente (Cronbach, 1951).

Análisis de Componentes Principales (ACP) y Análisis Factorial Exploratorio (AFE)

Para el análisis de la variabilidad de los datos y posible reducción de su dimensionalidad, se realizó un ACP con rotación Varimax en cada una de las escalas utilizadas en el estudio (*ST*, *PP* y *PL*).

Tabla 5

Valores del KMO y prueba de esfericidad de Barlett en las tres escalas

	KMO	**Prueba de esfericidad de Barlett (χ^2)**	**Sig.**
TST	.84	7057.76	.000
TPP	.89	9311.46	.000
TPL	.92	10461.70	.000

Los resultados arrojaron valores que señalaban la posibilidad de una correcta interpretación del AFE, con valores de KMO muy próximo al uno (Tabla 5). Además, puesto que la prueba de esfericidad de Barlett fue significativa en todas las escalas, se puede considerar un modelo adecuado que permite comparar todas las variables entre sí (Pérez y Medrano, 2010).

El AFE se realizó sobre los totales de cada configuración y en cada una de las escalas utilizadas para comprobar si los factores se disponían según el modelo propuesto teórico del que partíamos. Este análisis arrojó valores que señalaban la posibilidad de una interpretación del análisis factorial (KMO

= .82; χ^2 = 2585.87; p = .00; Marín-Díaz, et al., 2016). La varianza explicada, fue de un 70.77% y mediante una rotación Varimax se obtuvieron tres factores que se correspondían con las configuraciones *D, S1, S2* e *I,* teniendo en cuenta las tres escalas de *ST*, *PP* y *PL* utilizadas (Tabla 6).

Tabla 6

Matriz de factores rotados sobre los totales

	Factores		
	1	**2**	**3**
TPPS2	.91		
TPPS1	.86		
TPLS2	.82		
TPLS1	.76		
TPLI		.88	
TPLD		.88	
TPPI		.67	
TPPD		.61	
TSTS1			.82
TSTD			.74
TSTI			.66
TSTS2			.61

Por tanto, las escalas y configuraciones que le corresponde a cada uno de los factores rotados no se corresponden con el modelo teórico propuesto inicialmente, por lo que tendríamos un modelo alternativo al modelo teórico inicial, quedando la distribución de estos nuevos factores así:

- Al primer factor: los *Problemas Próximos* y *Problemas Lejanos* con configuraciones *Semidirecta 1* y *Semidirecta 2,* factor que denominaremos *Semidirectas.*
- Al segundo factor: los *Problemas Próximos* y *Problemas Lejanos* con configuraciones *Directa* e *Indirecta,* factor que denominaremos *Directas – Indirectas.*
- Al tercer factor: las *Estructuras* con configuraciones *Directa, Semidirecta 1*, *Semidirecta 2* e *Indirecta*, factor que denominaremos *Estructuras*.

Validez del constructo (Análisis Factorial Confirmatorio)

Puesto que la disposición de factores del AFE no coincidía con lo inicialmente propuesto a nivel teórico y, a la vista de las configuraciones de los tres factores que resultaron del método de extracción de factores a través del ACP con rotación Varimax (Tabla 6), se realizó el AFC mediante modelos de ecuaciones estructurales. Esta es una técnica multivariante robusta, que combina con aspectos de regresión múltiple (Cerón et al., 2020), para analizar las relaciones existentes entre las variables y los dos modelos: el modelo teórico propuesto inicialmente y el modelo alternativo que recoge el AFE realizado (León y Fernández-Díaz, 2019). De esta forma se comprueba si el constructo tiene validez para ambos modelos.

AFC según la propuesta teórica inicial

Para comprobar si la propuesta teórica inicial ajustaba correctamente, se realizó un AFC. Este modelo inicial está formado por 3 variables latentes (*Estructura*, *Problemas Próximos* y *Problemas Lejanos*), 12 variables observadas (desde *TSTD* hasta *TPLI*), 12 términos de error (desde *ESTD* hasta *EPLI*), 12 cargas factoriales entre los factores y las variables observadas correspondientes, 12 pesos de regresión entre los errores y las variables observadas asociadas y 3 correlaciones entre los factores latentes teóricos.

Tabla 7

Índices de ajuste del modelo teórico inicial y ajustado

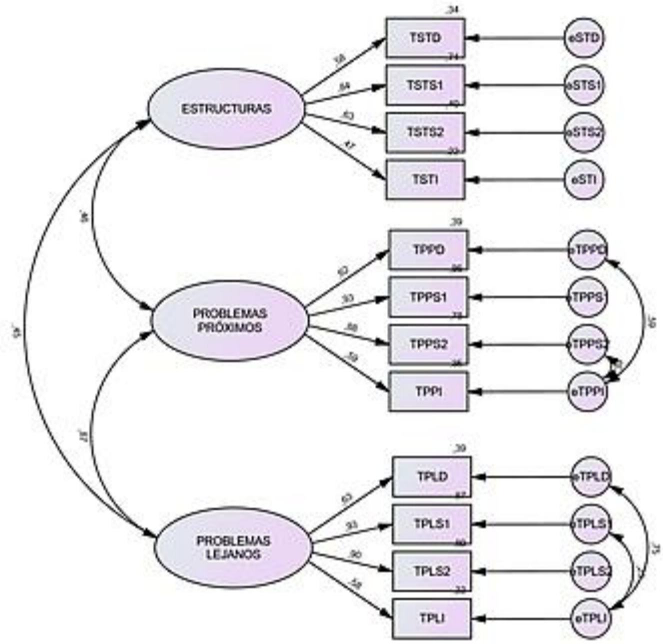
Medida	Nivel de ajuste recomendado	Modelo teórico inicial	Modelo teórico inicial ajustado
Medidas de ajuste absoluto			
Chi cuadrado	p > .05	p = .00	p = .00
CMIN/DF	2-5	14.10	5.12
RMSEA	< .080	.20	0.11
Medidas de ajuste incremental			
CFI	>.90	.74	.92
TLI	>.90	.60	.88*
NFI	>.90	.73	.91
IFI	>.90	.74	.93

Medidas de ajuste de parsimonia			
PRATIO	>.70	.65	.61*
PCFI	a>valor>parsimonia	.48	.56
PNFI	a<valor>ajuste	.48	.55

Los resultados obtenidos del modelo teórico inicial no ajustaban correctamente (ver Tabla 7), por lo que se procedió a realizar las modificaciones oportunas, obteniendo un modelo teórico inicial ajustado que, añade 4 correlaciones entre los errores al modelo inicial, acorde a los índices de modificación, lo que hace que se obtenga una reducción del valor del estadístico (Medrano u Muñoz-Navarro, 2017). Se evidencia que las saturaciones oscilan entre .47 y .93 en las tres escalas (Figura 1).

Figura 1

Modelo teórico inicial ajustado



Las medidas de ajuste absoluto e incrementales de este modelo teórico inicial ajustado verifican las consideraciones de autores citados anteriormente, luego el modelo ajusta. Por ello, se puede afirmar que este instrumento de medición es adecuado y bastante robusto.

AFC según el AFE resultante

Puesto que al realizar el AFE el modelo no coincidía con el modelo teórico inicial, pues solo mantenía la configuración en uno de sus factores de las variables latentes *Estructura*, siendo otro factor formado por las configuraciones *Directa* e *Indirecta* de los dos tipos de problemas y el tercer, y último factor, formado por la configuración *Semidirecta* de ambos tipos de problema, se realizó un AFC para comprobar si la propuesta resultante del AFE ajustaba correctamente. El modelo inicial según AFE está formado por 3 variables latentes (*Estructura*, *Directas – Indirectas* y *Semidirectas*); 12 variables observadas (desde *TSTD* hasta *TPLS1*); 12 términos de error (desde *ESTD* hasta *ESTI*); 12 cargas factoriales entre los factores y las variables observadas correspondientes; 12 pesos de regresión entre los errores y las variables observadas asociadas y 3 correlaciones entre los factores latentes según el AFE.

Tabla 8

Índices de ajuste del modelo según AFE inicial y ajustado

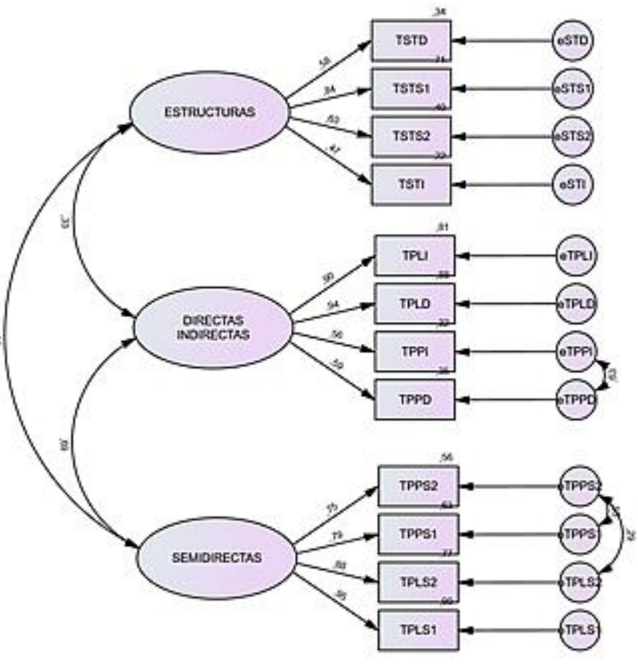
Medida	Nivel de ajuste recomendado	Modelo según AFE inicial	Modelo según AFE ajustado
Medidas de ajuste absoluto			
Chi cuadrado	p > .05	p = .00	p = .00
CMIN/DF	2-5	10.80	6.07
RMSEA	< .08	.18	.13
Medidas de ajuste incremental			
CFI	>.90	.81	.91
TLI	>.90	.70	.85*
NFI	>.90	.79	.89*
IFI	>.90	.81	.91
Medidas de ajuste de parsimonia			
PRATIO	>.70	.65	.62*

PCFI	a>valor>parsimonia	.53	.56
PNFI	a<valor>ajuste	.52	.55

Puesto que el modelo inicial según AFE no ajustaba correctamente (ver Tabla 8), se procedió a realizar las modificaciones oportunas, obteniendo un modelo según AFE ajustado, que añade al modelo inicial según AFE tres correlaciones entre los errores acorde a los índices de modificación (Figura 2). En este caso, se evidencia que las saturaciones oscilan entre .47 y .95 en las tres escalas. En este modelo según AFE ajustado, las medidas de ajuste son válidas, por lo que, de nuevo, se puede afirmar que el modelo es adecuado.

Figura 2.

Modelo según el AFE ajustado



El hecho de que ambos modelos (teórico inicial ajustado y según AFE ajustado) resulten válidos, sugiere que quizás algún factor externo interviene en el funcionamiento cognitivo de los sujetos a la hora de enfrentarse a las tareas. No obstante, esto también indica que, independientemente de que se utilice el instrumento teniendo en cuenta los factores teóricos o teniendo en cuenta los factores según AFE, el instrumento es suficientemente robusto y válido para medir el desarrollo de la reversibilidad cuando se resuelven PAV de una etapa y establecer la discriminación entre las variables de la tarea de los diversos problemas.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Es indiscutible el interés sobre las variables que se han de considerar en la enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas. Está demostrado que existen diferentes factores que pueden alterar la relación entre el sujeto y una correcta resolución de estos problemas (Kilpatrick, 1978; Kulm, 1979).

La revisión de la literatura permite afirmar que una característica principal de las operaciones básicas es la reversibilidad (Piaget, 1970). Existen diferentes configuraciones para las operaciones de adición y sustracción (*Directa, Semidirecta 1, Semidirecta 2* e *Inversa*) que se reflejan en los PAV a nivel semántico (Castro et al., 1995). Además, la proximidad de la información situacional de un problema aritmético verbal respecto a las vivencias cotidianas de las personas que resuelven el p influye en la adquisición de una abstracción matemática completa (Conejo y Ortega, 2013).

Por todo ello, se elaboró el instrumento que se ha validado, con la intención de que mida la discriminación con respecto a la reversibilidad de los algoritmos de adición y sustracción, así como de los PAV en función de cuál es la estructura semántica utilizada y la proximidad de la información situacional.

Cada una de las escalas utilizadas (*ST*, *PP* y *PL*) contenían 60 tareas de naturaleza dicotómica (presencia de error – ausencia de error) que los participantes en la experimentación resolvieron. Además, por un lado, los ítems de la escala *ST* contenían diferentes configuraciones de sentencia abierta de adición o sustracción, *D*, *SD1*, *SD2* e *I*, dependiendo de dónde estaba ubicada en la operación la incógnita a calcular; por otro lado, los ítems de las escalas *PP* y *PL* contenían diferentes PAV con información situación próxima (*PP*) y lejana (*PL*) al alumno.

Con índices de .90 en adelante, las escalas mostraban una consistencia interna muy alta con un nivel de fiabilidad excelente. Los valores KMO fueron muy próximos al uno y la esfericidad de Barlett fue significativa, lo que permitió realizar un AFE que mostró la existencia de tres factores que explican el 70.77%, que, si bien no coincidían con el modelo teórico inicial, tenían lógica teórica. El primer factor, *Semidirectas*, reúne los *Problemas Próximos* y *Problemas Lejanos* con configuraciones *Semidirectas* (*Semidirecta 1* y *Semidirecta 2*); el segundo factor, *Directas – Indirectas*, reúne los *Problemas Próximos* y *Problemas Lejanos* con configuraciones *Directas* e *Indirectas*; y el tercer factor, *Estructura*, reúne las *Estructuras* con todas las configuraciones *Directa, Semidirecta 1, Semidirecta 2* e *Indirecta*.

Para comprobar las estructuras factoriales, respecto al modelo teórico inicial y al modelo según el AFE ajustado, se llevó a cabo un AFC mediante el método de máxima verosimilitud, pues permite obtener un estimador de categoría y con alta eficiencia (Correa y Carmona, 2015), teniendo en cuenta que el tamaño de la muestra cumplía las recomendaciones tanto clásicas como actuales (Anguiano-Carrasco, 2010; Beavers et al., 2013). En ambos modelos, tanto el teórico inicial, como el ajustado según AFE, los índices de ajuste incremental exhibieron valores por encima de .90; así mismo, los índices de ajuste parsimonia podían dejar ver un correcto ajuste; en cambio, aunque los índices de ajuste absoluto no cumplieron la idoneidad, se aproximaban y serían interpretables, puesto que, aunque no se puede asegurar un ajuste totalmente satisfactorio, se puede afirmar que estos valores no desajustarían el modelo resultante. El hecho de que ambos modelos ajusten sugiere la presencia de factores transversales ajenos al propio instrumento que pueden alterar el funcionamiento cognitivo de los sujetos en la resolución de las tareas.

Por todo ello, los resultados permiten afirmar que el instrumento diseñado es suficientemente robusto y permite discriminar respecto a la reversibilidad de las operaciones de adición y sustracción, así como para discriminar los PAV en función de la estructura semántica utiliza y la proximidad de la información situacional a quien lo resuelve.

La concentración de sujetos únicamente en dos comunidades autónomas, puede ser una limitación de este estudio, esta variable debería ser considerada para el análisis de los resultados. La cantidad de tareas por escalas puede parecer excesiva pero todas ellas eran necesarias para poder validar correctamente el instrumento. Se espera realizar un correcto uso del instrumento, para, en investigaciones futuras poder analizar dónde se cometen los errores, un aspecto relevante en el planteamiento correcto de la formación de docentes, mediante, por ejemplo, la solicitud de creación de tareas matemáticas adecuadas para el desarrollo de la reversibilidad.

AGRADECIMIENTOS

Este artículo es un producto derivado del proyecto SA050G19 financiado por la Consejería de Educación como apoyo a los GIR de las universidades públicas de Castilla y León

DECLARACIÓN DE CONTRIBUCIÓN DE LOS AUTORES

BSB concibió la idea de la investigación presentada y recolectó los datos. MSB y MJC analizaron los datos. Todos los autores participaron activamente en la discusión de los resultados y la formulación de conclusiones. Entre todos revisaron y aprobaron la versión final del artículo.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos que respaldan los resultados de esta investigación estarán disponibles por el autor de correspondencia, MJC, previa solicitud razonable.

REFERENCIAS

Adónis Barata, M. D. (2006). *As dimensoes da “geometría do pensamento”: uma heurística positiva para um programa de investigaçao científica*. [Tesis doctoral, Universidad Pontificia de Salamanca]. Repositorio institucional.

Babakr, Z. H., Mohamedamin, P., & Kakamad, K. (2019). Piaget's Cognitive Developmental Theory: Critical Review. *Education Quarterly Reviews, 2*(3), 517-524. https://doi.org/10.31014/aior.1993.02.03.84

Beavers, A. S., Lounsbury, J. W., Richards, J. K., Huck, S. W., Skolits, G. J., & Esquivel, S. L. (2013). Practical Considerations for Using Exploratory Factor Analysis in Educational Research. *Practical Assessment, Research & Evaluation, 18*(6). https://doi.org/10.7275/qv2q-rk76

Byrne, B. M. (2010). *Structural equation modelling with AMOS: Basic concepts, applications, and programming*. Lawrence Erlbaum.

Carpenter, T. P. & Moser J. M. (1982). The development of addition and subtraction problem-solving skills. In T. P. Carpenter, J. M. Moser, & T. A. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (pp. 9-24). Lawrence Erlbaum.

Castro, E., Rico, L., & Castro, E. (1995). *Estructuras aritméticas elementales y su modelización*. Iberoamericana.

Cerón, C., Cossio-Bolaños, Marco, Pezoa-Fuentes, P. & Gómez-Campos, R. (2020). Diseño y validación de un cuestionario para evaluar desempeño docente asociado a las prácticas evaluativas formativas. *Revista Complutense de Educación, 31*(4), 463-472. https://doi.org/10.5209/rced.65512

Conejo, L. & Ortega, T. (2013). Clasificación de los problemas propuestos en aulas de Educación Secundaria Obligatoria. *Educación matemática, 25*(3), 129-158. https://doi.org/10.24844/EM

Correa, J. C., & Carmona, G. P. (2015). Comparación de la regresión Gini con la regresión de Mínimos Cuadrados Ordinarios y otros modelos de regresión lineal robustos. *Comunicaciones en Estadística*, *8*(2), 129-161. https://doi.org/10.15332/s2027-3355.2015.0002.01

Cronbach, L. J. (1951). Coefficient alpha and the internal structure of test. *Psychometrika, 16*, 297-334. https://doi.org/10.1007/BF02310555

Daroczy, G., Wolska, M., Meurers, W. D., & Nuerk, H. C. (2015). Word problems: A review of linguistic and numerical factors contributing to their difficulty. *Frontiers in Psychology, 6*, 1–13. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2015.00348

Escobedo Portillo, M. T., Hernández Gómez, J. A., Estebané Ortega, V., & Martínez Moreno, G. (2016). Modelos de ecuaciones estructurales: Características, fases, construcción, aplicación y resultados. *Ciencia & trabajo*, *18*(55), 16-22. http://dx.doi.org/10.4067/S0718-24492016000100004

Fitmawati, E. E., Siswono, T. Y. E., & Lukito, A. (2019). Student’s Reversibility in Solving Algebraic Problem. *International Journal of Trends in Mathematics Education Research*, *2*(4), 188-192. https://doi.org/10.33122/ijtmer.v2i4.98

Fuson, K. C., Stigler, J. W., & Bartsch, K. (1988). Grade Placement addition and subtraction topics in Japan, mainland China, the Soviet Union, Taiwan and the United States. *Journal of Research in Mathematical Education*, *19*, 449-456. https://doi.org/10.2307/749177

Gabler, L. & Ufer, S. (2021). Gaining flexibility in dealing with arithmetic situations: a qualitative analysis of second graders' development during an intervention. *ZDM–Mathematics Education*, *53*(2), 375-392. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01257-y

Greer, B. (2011). Inversion in mathematical thinking and learning. *Educational Studies in Mathematics*, *79*, 429-438. https://doi.org/10.1007/s10649-011-9317-2

Hackenberg, A. J. & Lee, M. Y. (2015). Relationships Between Students' Fractional Knowledge and Equation Writing. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(2), 196-243. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.46.2.0196

Hair, J. F., Black, W. C., Babin, B. J., & Anderson, R. E. (2014). Multivariate data analysis (7ª ed). Pearson.

Kilpatrick, J. (1978). Variables and methodologies in research on problem-solving. In L. L. Hatfield & D. A. Bradbard (Eds.), *Mathematical problem solving: Papers from a research workshop* (pp. 7–20). ERIC

Kline, R. B. (2010). *Principles and practice of structural equation modeling*. Guilford Press.

Kulm, G. (1979). The classification of problem-solving research variables. En G. A. Golding & C. E. McClintock (Eds.), *Task Variables in Mathematical Problem Solving* (p. 1-12). ERIC.

León, V. & Fernández-Díaz, M. J. (2019). Diseño y validación de una escala para evaluar el funcionamiento de las tutorías en Educación Secundaria. *Revista de Investigación Educativa*, *37*(2), 525-541. https://doi.org/10.6018/rie.37.2.34.5251

Marín-Díaz, V., Sampedro-Requena, B.E., & Vega-Gea, E. (2016). Construcción de una escala para determinar la utilidad de los blogs en la educación superior. *Psychology, Society, & Education*, *8*(3), pp. 217-228.

Medrano, L. A. & Muñoz-Navarro, R. (2017). Aproximación Conceptual y Práctica a los Modelos de Ecuaciones Estructurales. *Revista Digital de Investigación en Docencia Universitaria*, *11*(1), 219-239. doi: http://dx.doi.org/10.19083/ridu.11.486

Norton, A. & Boyce, S. (2015). Provoking the construction of a structure for coordinating n + 1 levels of units. *The Journal of Mathematical Behavior, 40*, 211-232. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.10.006

Orrantia, J., González, LB, & Vicente, S. (2005). Un análisis de los problemas aritméticos en los libros de texto de Educación Primaria. *Infancia y aprendizaje, 28*(4), 429-451. https://doi.org/10.1174/0210370057745189 29

Pérez, E. R. & Medrano, L. (2010). Análisis factorial exploratorio: bases conceptuales y metodológicas. *Revista Argentina de Ciencias del Comportamiento, 2*, 58-66. https://doi.org/10.32348/1852.4206.v2.n1

Piaget, J. (1970). *Psicología y epistemología*. Emecé.

Puig, L., & Cerdán, F. (1988). *Problemas y problemas aritméticos elementales En: Problemas aritméticos escolares*. Síntesis.

Riley, M. S. & Greeno, J. G. (1988). Developmental analysis of understanding language about quantities and solving problems. *Cognition and instruction*, *5*, 49-101. https://doi.org/10.1207/s1532690xci0501_2

Rodríguez, C. A., Navarro, C., Castro, A. N., & García, M. S. (2019). Estructuras semánticas de problemas aditivos de enunciado verbal en libros de texto mexicanos. *Educación Matemática, 31*(2), 75-104. https://doi.org/10.24844/em3102.04

Rohimah, S. M. & Prabawanto, S. (2019). Student's Difficulty Identification in Completing the Problem of Equation and Trigonometry Identities. *International Journal of Trends in Mathematics Education Research, 2*(1), 34-36. https://doi.org/10.33122/ijtmer.v2i1.50

Simon, M. A., Kara, M., Placa, N., & Sandir, H. (2016). Categorizing and promoting reversibility of mathematical concepts. *Educational Studies in Mathematics*, *93*(2), 137-153. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9697-4

Stern, E. (1993). What makes certain arithmetic word problems involving the comparison of sets so difficult for children? *Journal of Educational Psychology*, *85*, 7-23. https://doi.org/10.1037/0022-0663.85.1.7

Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problem. In T. P.

Carpenter, J. M. Moser, & T. A. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (pp. 39-59). Lawrence Erlbaum.

Verschaffel, L., Depaepe, F., & De Corte, E. (2014). Word problems in mathematics education. In A. A. Stephen Lerma (Ed.). *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 641-645). London South Bank University & Springer.

Verschaffel, L., Greer, B.,& De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Swets & Zeitlinger.

Vicente, S. & Manchado, E. (2017). Dominios de contenido y autenticidad: un análisis de los problemas aritméticos verbales incluidos en los libros de texto españoles. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, *11*(4), 253-279. https://doi.org/10.30827/pna.v11i4.6242

Vicente, S., Manchado, E., & Verschaffel, L. (2018). Solving arithmetic word problems. An analysis of Spanish textbooks/Resolución de problemas aritmético verbales. Un análisis de los libros de texto españoles. *Cultura y Educación*, *30*(1), 71-104. https://doi.org/10.1080/11356405.2017.1421606

Vicente, S., Sánchez, R., & Verschaffel, L. (2020). Word problem solving approaches in mathematics textbooks: a comparison between Singapore and Spain. *European journal of psychology of education*, 35, 567–587. https://doi.org/10.1007/s10212-019-00447-3

ANEXO 1

ESTRUCTURAS

ST1. $8 - 3 = \square$	ST2. $9 - 2 = \square$	ST3. $\square = 2 + 5$
ST4. $5 - \square = 2$	ST5. $3 - 2 = \square$	ST6. $4 + \square = 7$
ST7. $3 + 2 = \square$	ST8. $4 + 3 = \square$	ST9. $8 + \square = 11$
ST10. $\square = 4 - 3$	ST11. $9 + 2 = \square$	ST12. $8 - \square = 5$
ST13. $8 + 3 = \square$	ST14. $\square = 8 - 3$	ST15. $\square = 4 + 3$
ST16. $\square = 6 - 3$	ST17. $\square = 3 + 2$	ST18. $3 - \square = 1$
ST19. $\square = 6 + 3$	ST20. $7 - \square = 4$	ST21. $\square = 9 + 2$
ST22. $6 - 3 = \square$	ST23. $6 + \square = 9$	ST24. $\square = 8 + 3$
ST25. $6 + 3 = \square$	ST26. $\square = 7 - 3$	ST27. $\square = 3 - 2$
ST28. $9 + \square = 11$	ST29. $\square = 9 - 2$	ST30. $2 + \square = 7$
ST31. $\square = 5 + 3$	ST32. $\square = 7 + 3$	ST33. $6 - \square = 3$
ST34. $9 - \square = 7$	ST35. $7 + \square = 10$	ST36. $7 - 3 = \square$
ST37. $5 + 3 = \square$	ST38. $\square + 3 = 8$	ST39. $\square + 2 = 5$
ST40. $3 + \square = 5$	ST41. $5 + \square = 8$	ST42. $\square + 3 = 9$
ST43. $4 - \square = 1$	ST44. $\square - 3 = 1$	ST45. $\square + 2 = 11$
ST46. $\square - 3 = 5$	ST47. $\square + 3 = 11$	ST48. $\square - 2 = 7$
ST49. $4 - 3 = \square$	ST50. $\square + 3 = 7$	ST51. $2 + 5 = \square$
ST52. $7 + 3 = \square$	ST53. $\square - 2 = 1$	ST54. $\square + 5 = 7$
ST55. $\square + 3 = 10$	ST56. $\square - 3 = 3$	ST57. $5 - 3 = \square$
ST58. $\square - 3 = 4$	ST59. $\square - 3 = 2$	ST60. $\square = 5 - 3$

PROBLEMAS PRÓXIMOS

PP1. Esta mañana tenía 8 caramelos, pero comí 3. ¿Cuántos caramelos me sobraron?
PP2. Tenía 9 canicas, pero perdí 2. ¿Cuántas canicas me quedan?
PP3. ¿Cuántos kilos de naranjas tenemos en casa, si mi madre ayer compró 2 kilos y hoy 5, y nadie comió naranjas?
PP4. En mi jardín esta mañana había 5 flores. ¿Cuántas flores cortó el jardinero esta tarde, si ahora sólo hay 2?
PP5. Tenía 3 muñecas, pero perdí 2. ¿Cuántas muñecas tengo?
PP6. Santiago tiene 4 gusanos de seda. ¿Cuántos tiene a Ana, si entre los dos tienen 7?
PP7. En un armario hay 3 libros y en otro hay 2. ¿Cuántos libros hay en los dos armarios?
PP8. Santiago tiene 4 gusanos de seda y Ana tiene 3. ¿Cuántos bichos tienen entre los dos?
PP9. Si en una casa viven 8 personas, cuántas personas viven en otra casa, sabiendo que entre las dos juntas viven 11 personas.?
PP10. ¿Cuántos caramelos me sobraron, si tenía 4 y di 3?
PP 11. Juan pescó 9 peces y Marco 2. ¿Cuántos peces pescaron entre los dos?
PP 12. Esta mañana tenía 8 caramelos. ¿Cuántos comí si ahora tengo 5?
PP 13. En una casa viven 8 personas y en otra viven 3. ¿Cuántas personas viven en las dos casas?
PP14. ¿Cuántos caramelos me sobraron, si tenía 8 y comí 3?
PP15. ¿Cuántos gusanos de seda tienen entre Santiago y Ana, si Santiago tiene 4 y Ana tiene 3?
PP16. ¿Cuántos litros de vino quedaron en una garrafa, si había 6 litros y quitaron 3?
PP17. ¿Cuántos libros hay en dos armarios, si en uno hay 3 libros y en el otro hay 2?
PP 18. Si tenía 3 muñecas, ¿cuántas perdí si ahora sólo tengo 1 muñeca?
PP19. ¿Cuántos lápices tenemos en el aula, si ayer teníamos 6 y hoy el profesor trajo 3 más?
PP 20. Si la Filipa tenía 7 vasos, ¿cuántos rompió si ahora sólo tiene 4?
PP21. ¿Cuántos peces pescaron juntos Juan y Marco, si Juan pescó 9 y el Marco 2?

PP22.En una garrafa había 6 litros de vino, pero quitamos 3 litros. ¿Cuántos litros quedaron en la garrafa?

PP 23. Si en el aula teníamos 6 lápices, ¿cuántos lápices trajo el profesor si ahora tenemos 9?

PP24. ¿Cuántas personas viven entre las dos casas juntas, si en una viven 8 y en la otra 3?

PP 25. En el aula teníamos 6 lápices y hoy el profesor trajo 3 más. ¿Cuántos lápices tenemos ahora en el aula?

PP25. ¿Cuántos vasos tiene Filipa, se tenía 7 y rompió 3?

PP27. ¿Con cuántas muñecas me quedé, si tenía 3 y perdí 2?

PP 28. Si Juan pescó 9 peces, ¿cuántos pescó Marco si entre los dos pescaron 11 peces?

PP29. ¿Con cuántas canicas me quedé si tenía 9 y perdí 2?

PP30. Mi madre compró ayer 2 kilos de naranjas. ¿Cuántos kilos de naranjas compró hoy, si ahora tenemos 7 kilos?

PP31. ¿Cuántas flechas tiene en total un indio, si tiene 5 flechas rojas y 3 azules?

PP32. ¿Cuántas vacas tiene un vaquero, si tiene 7 vacas negras y 3 blancas?

PP33. Si en una garrafa había 6 litros de vino, ¿cuántos litros hemos quitado de la garrafa si ahora sólo tenemos 3 litros?

PP34. Si tenía 9 canicas, ¿cuántas perdí si ahora sólo tengo 7?

PP35. Un vaquero tiene 7 vacas negras; ¿cuántas vacas blancas tiene si en total tiene 10 vacas?

PP36. Filipa Tenía 7 vasos, rompió 3, ¿cuántos vasos tiene ahora?

PP37. Un indio tiene 5 flechas rojas y 3 azules. ¿Cuántas flechas tiene en total?

PP38. ¿Cuántas flechas rojas tiene un indio, si tiene 3 azules y en total tiene 8 flechas?

PP39. ¿Cuántos libros hay en un armario, si en otro hay 2 libros y entre los dos armarios suman 5 libros?

PP40. Si en un armario hay 3 libros, ¿Cuántos libros hay en otro armario, sabiendo que entre los dos armarios suman 5 libros?

PP41.Si un indio tiene 5 flechas rojas, ¿cuántas flechas azules tiene, si entre los dos colores tiene 8 flechas?

PP42. ¿Cuántos lápices teníamos en el aula, si hoy el profesor trajo 3 lápices y ahora tenemos 9?

PP43. Si tenía 4 caramelos, ¿cuántos día si ahora sólo tengo uno?

PP44. ¿Cuántos caramelos tenía si dí 3 y ahora sólo me queda 1?

PP45. ¿Cuántos peces pescó Juan, si Marco pescó 2 y entre los dos pescaron 11 peces?

PP46. ¿Cuántos caramelos tenía, si comí 3 y ahora tengo 5 caramelos?
PP47. ¿Cuántas personas viven en una casa, si en otra viven 3 personas y entre las dos casas hay 11 personas?
PP48. ¿Cuántas canicas tenía si perdí 2 y ahora tengo 7 canicas?
PP49. Si tenía 4 caramelos y dí 3, ¿cuántos caramelos tengo ahora?
PP50. ¿Cuántos gusanos de seda tiene Santiago, si Ana tiene 3 y entre los dos tiene 7 gusanos?
PP 51. Mi madre compró 2 kilos de naranjas y yo compré 5 kilos. ¿Cuántos kilos de naranja compramos entre los dos?
PP52. Un vaquero tiene 7 vacas negras y 3 blancas, ¿cuántas vacas tiene en total?
PP53. ¿Cuántas canicas tenía si perdí 2 y ahora sólo tengo 1?
PP54. ¿Cuántos kilos de naranjas tenía si mi madre compró hoy 5 kilos y ahora tenemos 7 kilos de naranjas?
PP55. ¿Cuántas vacas negras tiene un vaquero si tiene 3 blancas y en total tiene 10 vacas?
PP56. ¿Cuántos litros de vino había en una garrafa, si tiramos 3 litros y ahora hay 3 litros en la garrafa?
PP57. En el jardín de mi madre había 5 flores, y el jardinero cortó 3. ¿Cuántas flores hay en el jardín?
PP58. ¿Cuántos vasos llevaba Filipa, si rompió 3 y ahora tiene 4 vasos?
PP59. ¿Cuántas flores había en el jardín de mi madre esta mañana, si el jardinero cortó 3 flores y ahora quedan 2 flores en el jardín?
PP60. ¿Cuántas flores quedan en el jardín de mi madre si había 5 flores y el jardinero cortó 3?

PROBLEMAS LEJANOS

PL1. Esta mañana tenía 8 kiwis, pero comí 3. ¿Cuántos kiwis me sobraron?
PL2. Tenía 9 clips, pero perdí 2. ¿Con cuántos me quedé?
PL3. ¿Cuántos kilos de naranjas tenemos en casa, si mi madre ayer compró 2 kilos y hoy 5 y nadie comió naranjas?
PL4. En mi jardín esta mañana había 5 gerberas. ¿Cuántas gerberas cortó el jardinero esta tarde, si ahora sólo hay 2?
PL5. Tenía 3 paralelepípedos, pero perdí 2. ¿Con cuántos me quedé?
PL6. Santiago tiene 4 besugos. ¿Cuántos besugos tiene Ana, si entre los dos tienen 7?

PL7. En un armario hay 3 trenes y en otro hay 2. ¿Cuántos trenes hay en los dos armarios?
PL8. Santiago tiene 4 besugos y Ana tiene 3. ¿Cuántos besugos tienen los dos?
PL9. Si en una casa viven 8 personas, ¿cuántos viven en la otra casa, sabiendo que entre las dos juntas viven 11 personas?
PL10. ¿Cuántas anillas me sobraron, si tenía 4 y di 3?
PL11. Juan pescó 9 rodaballos y Marco 2. ¿Cuántos rodaballos pescaron los dos?
PL12. Si esta mañana tenía 8 kiwis. ¿Cuántas comí si ahora tengo 5?
PL13. En una casa viven 8 personas y en otra viven 3. ¿Cuántas personas viven en las dos casas?
PL14. ¿Cuántos kiwis me sobraron, si tenía 8 y comí 3?
PL15. ¿Cuántos besugos tienen Santiago y Ana, si Santiago tiene 4 y Ana tiene 3?
PL16. ¿Cuántos decímetros cúbicos de vino quedaron en una garrafa, si había 6 decímetros cúbicos y quitaron 3?
PL17. ¿Cuántos trenes hay en dos armarios, si en un hay 3 trenes y en el otro hay 2?
PL18. Si tenía 3 paralelepípedos, ¿cuántos perdí si ahora sólo tengo 1?
PL19. ¿Cuántas losas tenemos en el aula, si ayer teníamos 6 y hoy el profesor trajo 3 más?
PL20. Si Filipa llevaba 7 cántaros, ¿cuántos rompió si ahora sólo lleva 4?
PL21. ¿Cuántos rodaballos pescaron juntos Juan y Marco, si Juan pescó 9 y Marco 2?
PL22. En una garrafa había 6 decímetros cúbicos de vino, pero quitamos 3. ¿Cuántos decímetros cúbicos quedaron en la garrafa?
PL23. Si en el aula teníamos 6 losas, ¿cuántas losas trajo el profesor si ahora tenemos 9?
PL24. ¿Cuántas personas viven en dos casas juntas, si en una viven 8 y en la otra 3?
PL25. En el aula teníamos 6 losas y hoy el profesor trajo 3 más. ¿Cuántas losas tenemos ahora en el aula?
PL26. ¿Cuántos cántaros tiene Filipa, si llevaba 7 y rompió 3?
PL27. ¿Con cuántos paralelepípedos me quedé, si tenía 3 y perdí 2?
PL28. Si Juan pescó 9 rodaballos, ¿cuántos pescó Marco, si los dos pescaron 11 rodaballos?
PL29. ¿Con cuántos clips me quedé, si tenía 9 y perdí 2?
PL30. Mi madre ayer compró 2 kilogramos de naranjas. ¿Cuántos kilogramos de naranjas compró hoy, si ahora tenemos 7 kilogramos?

PL31. ¿Cuántas plumas tiene en total la corona de un indio, si tiene 5 plumas rojas y 3 azules?
PL32. ¿Cuántos rumiantes tiene un vaquero, si tiene 7 rumiantes negros y 3 blancos?
PL33. Si en una garrafa había 6 decímetros cúbicos de vino, ¿cuántos decímetros cúbicos quitamos si ahora sólo tenemos 3?
PL34. Si tenía 9 clips, ¿cuántos perdí si ahora sólo tengo 7?
PL35. Si un vaquero tiene 7 rumiantes negros, ¿cuántos rumiantes blancos tiene, si en total tiene 10?
PL36. Filipa llevaba 7 cántaros, y rompió 3, ¿con cuántos cántaros se quedó?
PL37. Un indio tiene una corona con 5 plumas rojas y 3 azules. ¿Cuántas plumas tiene en total?
PL38. ¿Cuántas plumas rojas tiene la corona de un indio, si tiene 3 azules y en total tiene 8?
PL39. ¿Cuántos trenes hay en un armario, si en otro hay 2 y en los dos armarios hay 5 trenes?
PL40. Si en un armario hay 3 trenes, ¿cuántos trenes existen en el otro armario, sabiendo que en los dos hay 5 trenes?
PL41. Si la corona de un indio tiene 5 plumas rojas, ¿cuántas plumas azules ha si en total tiene 8 plumas?
PL42. ¿Cuántas losas teníamos en el aula, si hoy el profesor trajo 3 y ahora tenemos 9 losas?
PL43. Si tenía 4 anillas, ¿cuántas dí si ahora sólo tengo 1?
PL44. ¿Cuántas anillas tenía, si dí 3 y ahora sólo tengo 1?
PL45. ¿Cuántos rodaballos pescó Juan, si Marco pescó 2 y los dos pescaron 11 rodaballos?
PL46. ¿Cuántos kiwis tenía, si comí 3 y me sobraron 5?
PL47. ¿Cuántas personas viven en una casa, si en otra viven 3 y en las dos juntas viven 11?
PL48. ¿Cuántos clips tenía, si perdí 2 y me sobraron 7?
PL49. Si tenía 4 anillas y dí 3, ¿con cuántas anillas me quedé?
PL50. ¿Cuántos besugos tiene Santiago, si a Ana tiene 3 y los dos tienen 7?
PL51. Mi madre ayer compró 2 kilogramos de naranjas y hoy compró 5 kilogramos. ¿Cuántos kilogramos de naranjas compró en los dos días?
PL52. Un vaquero tiene 7 rumiantes negros y 3 blancos, ¿cuántos rumiantes tiene en total?
PL53. ¿Cuántos paralelepípedos tenía, si perdí 2 y ahora sólo tengo 1?
PL54. ¿Cuántos kilogramos de naranjas compró mi madre ayer, si hoy compró 5 y ahora tenemos 7 kilogramos?

PL55. ¿Cuántos rumiantes negros tiene un vaquero, si tiene 3 blancos y en total tiene 10 rumiantes?

PL56. ¿Cuántos decímetros cúbicos de vino había en una garrafa, si quitamos 3 decímetros cúbicos y ahora sólo tenemos 3?

PL57. En mi jardín esta mañana había 5 gerberas, pero a la tarde el jardinero cortó 3. ¿Cuántas gerberas quedaron en mi jardín?

PL58. ¿Cuántos cántaros llevaba Filipa, si rompió 3 y ahora sólo tiene 4 cántaros?

PL59. ¿Cuántas gerberas cortó el jardinero esta mañana en mi jardín, si estar tarde cortó 3 y ahora sólo quedaron 2 gerberas?

PL60. ¿Cuántas gerberas quedan en el jardín si esta mañana había 5 gerberas y esta tarde el jardinero cortó 3?