ISSN: 2178-7727
DOI: 10.17648/acta.scientiae.7192

Socioepistemología de la Existencia y Unicidad en la Ecuación Diferencial de Primer Orden

Fallas-Soto Rodolfo [a]
†Cantoral-Uriza Ricardo [b]

[a] Universidad de Costa Rica, Departamento de Educación Matemática, San José, Costa Rica
[b] Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Departamento de Matemática Educativa, Ciudad de México, México

Presentado para publicación 13 mar. 2022. Aceptado después de la revisión 26 jul. 2022
Editora designada: Claudia Lisete Oliveira Groenwald

RESUMEN

Antecedentes: La enseñanza de las ecuaciones diferenciales está dominada por una tradición analítica excesivamente algebrizada. Por ello, son importantes los estudios que contribuyan a la conceptualización de los objetos matemáticos asociados a la ecuación diferencial, particularmente, el teorema de existencia y unicidad. **Objetivos:** Desde su génesis, el objetivo es analizar la naturaleza de este saber, su epistemología desde las prácticas. Damos cuenta de los argumentos variacionales, es decir, basados en prácticas enfocadas al estudio del cambio, con finalidad predictiva, que permiten obtener el resultado deseado sobre la ecuación diferencial: demostrar la existencia de una solución única. **Diseño:** Se realiza un análisis documental desde la Teoría Socioepistemológica de las obras que marcaron la construcción de este saber matemático. **Entorno y Participantes:** Al ser un estudio de corte documental, no contamos con participantes en sentido estricto. **Recopilación y análisis de datos:** Nuestra unidad de observación incluye trabajos matemáticos como fuentes primarias y secundarias que intervienen en la construcción del teorema: sus postulados, búsqueda de hipótesis y demostraciones. **Resultados:** Se ofrece una reconstrucción del teorema, que a partir de los argumentos se caracterizan algunas prácticas que ayudaron en la construcción de objetos matemáticos. **Conclusiones:** Concluimos que la variación acotada, como una forma particular de utilizar el cambio, contribuyó a la búsqueda o establecimiento de condiciones para la interpretación de la solución de ecuaciones, para obtener una solución única a la ecuación diferencial, aportes que deben ser claves para implementaciones de situaciones de aprendizaje.

Palabras clave: Socioepistemología; variación; ecuación diferencial; existencia; unicidad.

Autor correspondiente: Rodolfo Fallas Soto. Email: rodolfo.fallas@ucr.ac.cr

Socioepistemology of the Existence and Uniqueness Theorem in the First-Order Ordinary Differential Equation

ABSTRACT

Background: The teaching of differential equations is dominated by an excessively algebraised analytic tradition. For this reason, studies that contribute to the conceptualization of mathematical objects associated with the differential equation are important, particularly, the existence and uniqueness theorem. **Objectives**: From its genesis, the objective is to analyse the nature of this knowledge, its epistemology from practice. We give an account of the *variational arguments*, that is, based on practices focused on the study of change, with a predictive purpose, which allow obtaining the desired result on the differential equation: demonstrating the existence of a unique solution. **Design**: A documentary analysis is carried out from the Socioepistemological Theory of the works that marked the construction of this mathematical knowledge. **Setting and Participants**: Being a documentary cut study, we did not have participants *stricto sensu*. **Data collection and analysis**: Our observation unit includes mathematical works as primary and secondary sources involved in the construction of the theorem: its postulations, search for hypotheses and proofs. **Results**: A reconstruction of the theorem is offered, which from the arguments characterizes some practices that helped in the construction of mathematical objects. **Conclusions**: We conclude that the bounded variation, as a particular way of using change, contributed to the search or establishment of conditions for the interpretation of the solution of equations, to obtain a unique solution to the differential equation, contributions that should be key for implementations of learning situations.

Keywords: Socioepistemology; variation; differential equation; existence; uniqueness.

Socioepistemologia do teorema da existência e da unicidade na equação diferencial ordinária de primeira ordem.

RESUMO

Contexto: O ensino de equações diferenciais é dominado por uma tradição analítica excessivamente algebrizada. Por esta razão, estudos que contribuam para a conceituação de objetos matemáticos associados à equação diferencial são importantes, em especial, o teorema da existência e da unicidade. **Objetivos**: A partir de sua gênese, o objetivo é analisar a natureza desse conhecimento, sua epistemologia a partir da prática. Damos conta dos argumentos variacionais, ou seja, baseados em práticas voltadas para o estudo da mudança, com finalidade preditiva, que permitem obter o resultado desejado na equação diferencial: demonstrar a existência de uma solução única. **Design**: É realizada uma análise documental a partir da Teoria Socioepistemológica das obras que marcaram a construção desse conhecimento matemático. **Ambiente e participantes**: Por ser um estudo de recorte documental, não tivemos participantes *stricto sensu*. **Coleta e análise de dados**: Nossa unidade de observação inclui trabalhos matemáticos como fontes primárias e secundárias envolvidas na construção do teorema: suas postulações, busca de hipóteses e provas. **Resultados**: É oferecida uma reconstrução do teorema, que a partir dos argumentos caracteriza algumas práticas que auxiliaram na construção de objetos matemáticos. **Conclusões**: Concluímos que a variação limitada, como uma forma particular de usar a mudança, contribuiu para a busca ou estabelecimento de condições para a interpretação da solução de equações, para obter uma solução única para a equação diferencial, contribuições que devem ser fundamentais para implementações de situações de aprendizagem.

Palavras-chave: Socioepistemologia; variação; equação diferencial; existência; unicidade.

INTRODUCCIÓN

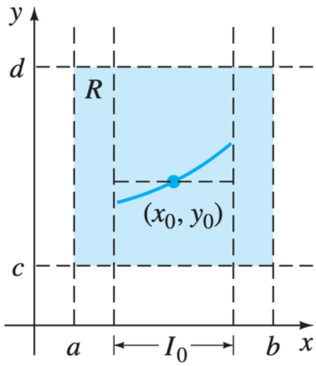
La existencia y unicidad de la solución corresponde a características a estudiar de algún *problema inverso*, tipo de problema conocido por determinar las causas que conducen a la obtención de un resultado en un modelo, o por determinar el modelo en base a una relación “causa-efecto”. (Martínez-Luaces, Fernández-Plaza & Rico, 2019; Korovkin, Chechurin & Hayakawa, 2007; y Ramm, 2005). Los problemas inversos se encuentran en diversas actividades cotidianas de la psicología, medicina, física, economía, matemáticas, entre otras, al indagar sobre las causas o modelo que permitió dar un efecto conocido.

Una revisión de contenido de libros universitarios usados actualmente para enseñar ecuaciones diferenciales (Fallas-Soto, 2015) aborda el teorema de existencia y unicidad solo como un *problema directo*; es decir, redujo el estudio de la existencia y la unicidad a probar hipótesis y algunas técnicas para determinar el intervalo dentro del cual se cumplieron las condiciones necesarias (es decir, se conocen las causas y el modelo para determinar el efecto). Un problema inverso, por el contrario, implica una búsqueda de las condiciones (¿cuán necesarias y suficientes?) que permitan que la solución exista y sea única. Estamos entonces frente a una diferencia que puede no ser considerada en la comprensión y significado de este saber en el campo de la educación.

Por ejemplo, Zill y Cullem (2019) (like Braun (1993), Simmons (1993), Zill (1997)) enuncian el teorema de existencia y unicidad de las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) de primer orden. Esto es: Sea R una region rectangular en el plano xy definio por $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ que contiene el punto (x_0, y_0) en su interior (Figura 1). Si $f(x, y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas sobre R, entonces existe un intervalo I_0: $(x_0 - h, x_0 + h)$, $h > 0$, contenido en $[a, b]$, y una única función $y(x)$, definida sobre I_0, que es solución del problema de valor inicial $\frac{dy}{dx} = f(x,y), y(x_0) = y_0$.

Figura 1

Región Rectangular R. (Zill y Cullen, 2019)



La figura anterior es solo una ilustración de una demostración consolidada del teorema. La matemática universitaria –en concreto, la enseñanza de las ecuaciones diferenciales– está dominada por una tradición analítica excesivamente algebrizada (Barros & Kato, 2016; Dana-Picard & Kidron, 2008; Moreno, 2006). Por otra parte, si como docentes pudiéramos plantearnos una conceptualización del enfoque geométrico en el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales y su solución, afrontar las dificultades inherentes a la realización de predicciones a largo plazo, y evidenciar el papel que juegan los valores iniciales, entre otros elementos (Karimi Fardinpour & Gooya, 2017), podríamos favorecer al aprendizaje de este saber en nuestros estudiantes. La literatura ha reportado que, así como considerar las matemáticas procedimentales para resolver ecuaciones diferenciales, la conceptualización de los objetos matemáticos asociados a la ecuación como modelo, también debe cobrar importancia en la lección (Artigue, 1992; Buendía y Cordero, 2013; Camacho- Machín y Guerrero-Ortiz, 2015; Fallas-Soto y Cantoral, 2016; Morales y Cordero, 2016; Rasmussen, Zandiech, King y Tepo, 2009; Stephan y Rasmussen, 2002).

Las ecuaciones diferenciales surgieron y se desarrollaron principalmente como modelos predictivos del comportamiento de ciertos fenómenos del movimiento físico, con el objetivo de matematizar la naturaleza en el sentido de Galileo. La *variación* y el *cambio* juegan papeles importantes en el estudio de este fenómeno como lo hacen en su matematización: la variación engloba una cuantificación del cambio en las variables de un fenómeno [pero] no cualquier variable [solo] aquellas que están causalmente relacionadas (Cantoral, Moreno y Caballero, 2018).

A partir de la génesis de este problema inverso, el objetivo es analizar la naturaleza de este conocimiento, su epistemología (basada en las prácticas). Aceptando que el conocimiento matemático escolar es relativo, aseguramos que los resultados obtenidos contribuirán a la comprensión de esta materia para su enseñanza y aprendizaje. Damos cuenta de los *argumentos variacionales*, es decir, basados en prácticas enfocadas al estudio del cambio, con finalidad predictiva, que permiten obtener el resultado deseado sobre la ecuación diferencial: demostrar la existencia de una solución única.

Esto nos llevó a realizar un análisis documental de las ideas de los trabajos matemáticos originales que dieron origen al teorema. Consideramos un conjunto de reflexiones sobre la esencia de este saber a partir de la evolución de sus resultados y la recopilación de anécdotas a lo largo del tiempo que explican la naturaleza de sus prácticas, su construcción social (oportunidades y restricciones que emergen al responder cuándo, dónde, quién). y por qué aparecen en la construcción de ese conocimiento), y su difusión institucional como conocimiento matemático especializado.

Otro aporte de este trabajo y que defenderemos durante el desarrollo de la lectura, es que para estudiar la existencia y unicidad de la solución de ecuaciones diferenciales, se amerita una nueva noción que hace uso específico de la variación estableciendo condiciones como acotaciones, sobre el cambio en las variables funcionales con respecto al tiempo. A esto lo llamamos *variación acotada*.

ELEMENTOS TEÓRICOS

Mientras el término "constructivismo" tiene una amplia gama de significados, en los círculos educativos se considera que tiene un efecto positivo en el aprendizaje de los estudiantes. Se reconocen al menos dos tipos principales de constructivismo: cognitivo (Piaget, 1976) y social (Vygotsky, 1986). Si bien ambos son de naturaleza constructivista, el concepto principal que nos interesa analizar considera una combinación de los dos; es decir, que las ideas se construyen cooperativamente a través de las experiencias de un individuo en y sobre el entorno. En este sentido, nuestro trabajo se basa en principios de cognición (es decir, las acciones interiorizadas del individuo expuesto a una situación) y social (es decir, actividades interiorizadas como la coordinación racional de las acciones de un individuo en respuesta a situaciones). La Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME) sostiene que estos elementos se organizan a través de prácticas socialmente compartidas en la comprensión de usos y significados compartidos (que posibilitan el objetivo del grupo al afrontar una tarea, como eslabón más básico en esta explicación teórica, ya que está normada y mantenida socialmente, y comprende la racionalidad de los pares) (Cantoral, 2019), es decir, una epistemología de las prácticas.

La organización de las prácticas pasa por una norma, es precisamente cuando un grupo crea un lenguaje y se comunica por sí mismo. De acuerdo con Cantoral (2019), esta es una práctica socialmente compartida, donde se investigan las relaciones entre el discurso y el conocimiento ubicado temporalmente, tratando así de encontrar cómo en cada práctica se constituyen el sujeto y el objeto del conocimiento (visión de la norma según a Foucault, tomado de (Escolar, 2004)).

Por tanto, no analizamos la demostración del teorema en una obra, sino que incorporamos, además, las relaciones entre las personas en cada época y bajo determinadas circunstancias. Como señaló Cantoral (2019) respecto a este tipo de problemas de investigación, se requiere una doble descentración *–del objeto y de sus modelos didácticos–* para focalizar la atención en las prácticas que ayudaron a su construcción. Hablando metafóricamente, el objetivo es centrar la atención en el proceso de matematización, más que en el resultado o producto matemático.

Comenzamos considerando los cuatro principios teóricos sobre los que actúa la TSME, siempre de manera articulada, para la construcción social del conocimiento (Cantoral, 2019; Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini, 2015):

- La *racionalidad contextualizada* alude a la noción de que la relación con el conocimiento es una función contextual. Este principio nos permite reconocer, privilegiar y potenciar diversos tipos de racionalidad relacionados con la realidad en la que se encuentra un ente en un momento dado y en cada lugar desde el cual se construirá el conocimiento.

- El *relativismo epistemológico* reconoce que la validez del conocimiento es relativa a la entidad en su grupo cultural. Las matemáticas escolares pueden ser percibidas de muchas maneras, como trabajadas, construidas o desarrolladas, concibiendo que la validez del conocimiento es relativa a la entidad en el grupo cultural del que emerge a partir de la racionalidad contextualizada que posee.
- La *resignificación progresiva* sostiene que el significado no es estático, sino relativo, funcional y contextual. La interacción con contextos diversos y la evolución de la vida de un individuo o grupo, resignificarán el conocimiento construido hasta ese momento y lo enriquecerán con nuevos significados.
- La *normatividad de la práctica social* es el principio que permite alcanzar el significado de las matemáticas a través del uso, propuesto en una organización de prácticas socialmente compartidas (la tríada de acciones, actividades, prácticas) que son reguladas y normadas, respectivamente, por prácticas de referencia y práctica social.

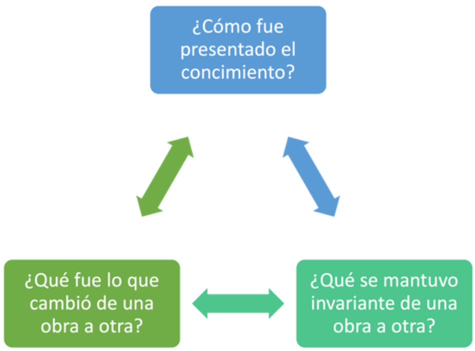
Otro elemento teórico que considerar es la *problematización del conocimiento matemático*, caracterizado por la *historización*; es decir, conectar con una epistemología situada en el tiempo y estudio de una historia social que la constituye, y *dialectización* en la confrontación necesaria para comprender sentidos y racionalidades alternativas en lo que se asume como un saber construido. La historización "incluye la investigación sobre el contexto sociocultural del autor en el momento en que se desarrolló el conocimiento, las preocupaciones del autor sobre el problema que se estaba resolviendo, el trabajo matemático y una reconstrucción de ese trabajo" (Hinojos-Ramos, Farfán y Orozco del Castillo, 2020, p.1163). La dialéctica discute y dialoga para identificar un relativismo y racionalidad de los saberes, significados, al evidenciar diferencias entre saberes académicos matemáticos y diferentes escenarios ya sean técnicos, populares o científicos, aceptando contradicciones y confrontaciones de ideas. De hecho, este trabajo corresponde a una problematización del conocimiento matemático con miras a seguir creciendo.

METODOLOGÍA

Se realiza un análisis documental de los trabajos matemáticos que fueron construyendo este teorema, demostrando conjeturas. Cada texto analizado es un producto con una historia (la llamada historia social) que emerge al explorar críticamente el contexto en el que fue creado, viéndolo como un objeto de difusión considerando el público al que iba dirigido, ponderando una cierta intencionalidad didáctica; y concibiéndola como parte de una expresión intelectual más global respecto a cómo influyó en otros contextos (Espinoza-Ramírez, Vergara-Gómez, Valenzuela-Zuñiga, 2018). También realizamos una comparación de los trabajos más cercanos al teorema para responder las siguientes preguntas (Figura 2).

Figura 2

Comparación de los trabajos matemáticos



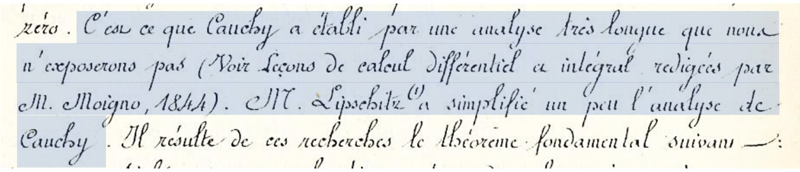
Para la pregunta "¿cómo fue presentado el conocimiento?", describimos las secciones que preceden y siguen al teorema en los trabajos matemáticos relevantes. Para las preguntas planteadas, fue importante ubicar y analizar los elementos que se mantuvieron y los que cambiaron en cada texto –o reediciones– para identificar similitudes y diferencias en sus respectivas evoluciones conceptuales.

Por lo tanto, se proporciona una reconstrucción del teorema de existencia y unicidad respaldada por la visualización de argumentos. Las demostraciones se presentan como problemas directos ya que se muestran como productos terminados, pero la racionalidad y la forma en que evolucionó el teorema revelan características como problemas inversos al buscar el mínimo número de condiciones suficientes, pero no necesarias, que aseguren la existencia y unicidad de la resolución de ecuaciones diferenciales.

Sobre la búsqueda de fuentes, Picard (1886) menciona un importante antecedente que establecieron Cauchy y Moigno (1844) con respecto al teorema, posteriormente simplificado por Lipschitz (1880) (Figura 3).

Figura 3

Recomendación de Picard. (Picard, 1886, p. 293)[1]


zéro. C'est ce que Cauchy a établi par une analyse très longue que nous n'exposerons pas (Voir Leçons de calcul différentiel et intégral rédigées par M. Moigno, 1844). M. Lipschitz(1) a simplifié un peu l'analyse de Cauchy. Il résulte de ces recherches le théorème fondamental suivant :

También examinamos el trabajo de Peano ya que su nombre aparece en los libros de texto universitarios en relación con el teorema de existencia. Los textos que formaron parte de nuestro material de trabajo, o unidad de estudio, incluyen las siguientes fuentes primarias y libros de texto:

- *Cauchy and Moigno (1844), Leçons de Calcul Différentiel et de Calcul Integral*
- Lipschitz (1880), *Lehrbuch der Analysis: Differential und integralrechnun*
- Lipschitz (1868), *Disamina della possibilità d'integrare completamente un dato sistema di equazioni differenziali ordinarie*
- Peano (1886), *Sull' integrabilità delle equazioni differenziali di primo ordine*

Los principios de la Teoría Socioepistemológica se manifiestan en cada etapa de la problematización del conocimiento matemático. Lograr una

[1] Traducción propia: Es que Cauchy establece un análisis muy amplio que no expondremos acá (ver lecciones de cálculo diferencial e integral realizada por M. Moigno, 1844). Sr. Lipschitz simplifica un poco el análisis de Cauchy.

orientación adecuada al analizar textos de épocas anteriores requiere contemplar el contexto que brindan los detalles de la época en que aparecieron y se desarrollaron para comprender la racionalidad de los autores que crearon y utilizaron esos escritos (racionalidad contextualizada). Esto exige además reconocer y aceptar la relatividad del conocimiento –contrario al absolutismo de las verdades únicas– como una interpretación de las matemáticas con respecto a lo que sabemos hoy (relativismo epistemológico). Durante nuestro examen de estas obras, apoyados en la visualización, desarrollamos una dialéctica para enfrentar la evolución (antes-después), y reflexionamos sobre los argumentos que explican tanto el uso como el significado del conocimiento (resignificación progresiva) que, al final, ayudan a inferir prácticas en la construcción del conocimiento (normatividad de la práctica).

RESULTADOS Y ANÁLISIS

Racionalidad y contexto de los textos

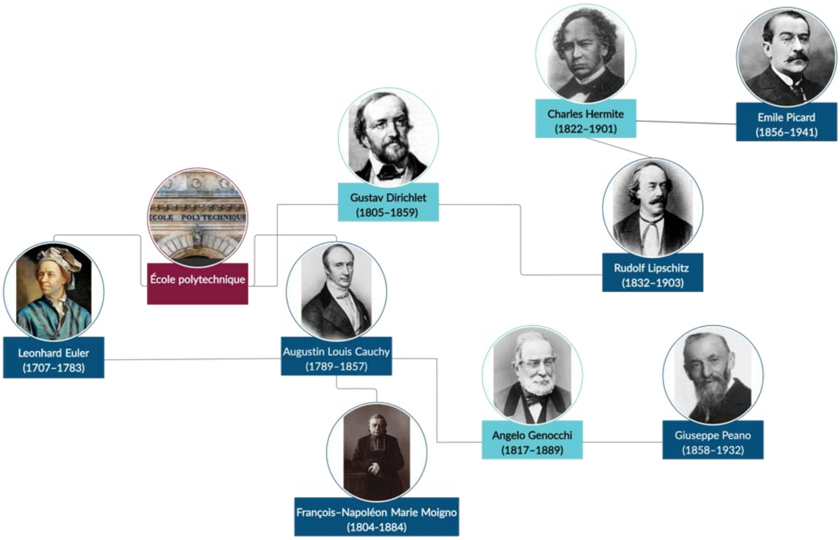
Detrás de cada obra que analizamos, hay una red de aportes e influencias de otras personas y sus textos que impactaron en el legado del saber; es decir, cada texto está vinculado a una red muy amplia. La Figura 4 destaca a los autores que influyeron directamente en los textos que examinamos y desempeñaron un papel clave en el desarrollo del resultado (es decir, la postulación y demostración del teorema), para identificar este tejido conceptual.

Como es bien sabido, Cauchy no solo escribió libros de matemáticas; sino también, sobre la Revolución Francesa, de los movimientos sociopolíticos de la Francia de la década de 1830 y, en cierta medida, de sus principios jesuitas (que lo llevaron al sacerdote, periodista y matemático, Moigno, con quien escribió algunos libros). Esto último le obligaron a abandonar el país y exiliarse tras negarse a jurar fidelidad a Luis Felipe I. Esto, sin embargo, no le impidió seguir desarrollando su obra. Su exilio lo llevó a Italia, concretamente a la Universidad de Turín, donde el matemático Genocchi (profesor de Peano, quien no solo fue su alumno, sino también su ayudante y discípulo) incorporó ideas de sus trabajos a sus cursos de análisis matemático.

La construcción del análisis matemático propuesto por Cauchy respondió a las inquietudes matemáticas de la Academia Alemana. Ciertos rasgos de su obra revelan su declarada intención de abstenerse de toda referencia histórica (interesándose únicamente por la obra de Euler) y de evitar ejemplos geométricos y el apoyo de analogías de carácter fenomenológico en sus procedimientos (Dhombres, 1985). El enfoque de Cauchy reformuló la racionalidad de los trabajos matemáticos del tipo del llamado Análisis Clásico, claramente basado en fenómenos físicos de la naturaleza y argumentos geométricos. Esto contrasta con la práctica actual donde predomina el análisis algebraico. En los libros de Análisis Clásico, la matematización de la naturaleza cedió su lugar a una algebrización de funciones y de los infinitesimales que surgieron como útiles para la formalización.

Figura 4

Esquema que representa las relaciones entre los matemáticos



Según el informe de Youschkevitch (1981), no fue fácil presentar nuevas ideas, formas de razonamiento o formas de proponer problemas de existencia en el Consejo de Instrucción Pública de Francia. Una contribución innovadora del curso de Cauchy es que fue el primero en incluir un teorema de la existencia de la solución de ecuaciones diferenciales generales de primer orden, desarrollado en las lecciones 26 y 27 en (Cauchy & Moigno, 1844).

Mientras tanto, Dirichlet (profesor de Lipschitz), trabajando en la convergencia de las series bajo la supervisión de Fourier, presentó sutiles desafíos a la demostración de Cauchy (Lakatos, 1980). Su obra quizás refleje problemas heredados por los matemáticos alemanes de la Escuela Francesa de Matemáticas. Dirichlet también se desempeñó como asesor en la disertación doctoral presentada por Lipschitz, quien luego retoma el teorema de existencia y unicidad de Cauchy.

Finalmente, Hermite, el suegro de Picard que vivía en la frontera franco-alemana, era muy amigo de Lipschitz, y ambos mantuvieron una intensa correspondencia compuesta por 148 cartas y 9 postales entre el 19 de agosto de 1877 y el 14 de julio de 1900, un pocos meses antes de la muerte de Hermite (Goldstein, 2018). En esas misivas, Lipschitz compartió su trabajo titulado Lehrbuch der Analysis al que Picard se refirió más tarde. Esta breve historia nos permite inferir la existencia de una red de colaboraciones, debates y, finalmente, precisiones, respecto al teorema que nos interesa. En la siguiente sección, presentamos una reconstrucción racional de esta red de significados y procedimientos.

Aportaciones de Cauchy y Moigno

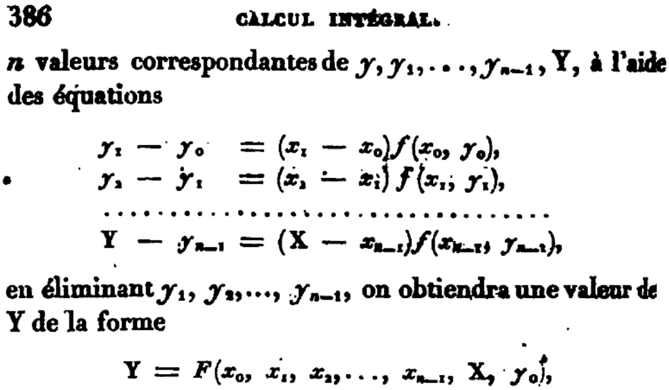
Primero, Cauchy y Moigno (1844) consideran la ecuación $y' = f(x,y)$ con el valor inicial (x_0, y_0). Sus hipótesis fueron que las funciones $f(x,y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ fueran continuas en un vecindario del valor inicial. Este aspecto requiere un análisis de su racionalidad para dar mayor claridad a su afirmación. La demostración de la existencia de la solución comienza con el método que Euler utilizó para determinar la solución de ecuaciones diferenciales mediante aproximaciones poligonales a una solución (Figura 5).

Las dos prácticas que predominaron en ese caso fueron la *aproximación* –para determinar valores numéricos que se acerquen a la solución de la ecuación– y la *comparación* entre un estado y otro posterior como se puede apreciar a continuación. La atención se centró en la forma de articular la *aproximación* con la *comparación* para visualizar el significado en la demostración del teorema. El problema de la continuidad en la hipótesis, sin embargo, exige un análisis técnico aún más detallado.

La ecuación diferencial $y' = f(x,y)$ representa la pendiente de la recta tangente en cualquier punto de la solución, partiendo de un valor inicial (x_0, y_0). Usando estos valores y pendientes $f(x_0, y_0)$ nos permite determinar la ecuación de la recta tangente de la solución que pasa por dicho punto (Figura 6).

Figura 5

Método de Euler. (Cauchy, Moigno, 1844, p. 386)



386 CALCUL INTÉGRAL.

n valeurs correspondantes de $y, y_1, \ldots, y_{n-1}$, Y, à l'aide des équations

$$\begin{aligned} y_1 - y_0 &= (x_1 - x_0) f(x_0, y_0), \\ y_2 - y_1 &= (x_2 - x_1) f(x_1, y_1), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Y - y_{n-1} &= (X - x_{n-1}) f(x_{n-1}, y_{n-1}), \end{aligned}$$

en éliminant $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$, on obtiendra une valeur de Y de la forme

$$Y = F(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, X, y_0),$$

Figura 6

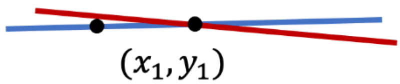
Primera iteración del método de Euler

$$y - y_0 = (x - x_0) f(x_0, y_0)$$

Figura 7

Segunda iteración del método de Euler

$$y - y_1 = (x - x_1) f(x_1, y_1)$$

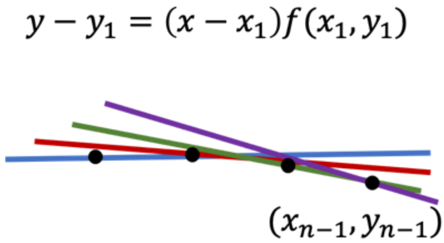


Esta recta tangente representa, en el sentido de Lagrange, la función lineal que mejor aproxima la curva en el punto de solución, considerando este valor inicial. Luego, el Segundo punto (x_1, y_1) se escoge sobre esta recta, uno que también está muy cerca de (x_0, y_0). Una vez más, la ecuación diferencial es usada con ese punto para determinar la recta que pasa por (x_1, y_1) con pendiente $f(x_1, y_1)$ (Figura 7).

Siguiendo con este método se obtienen tantos puntos como se requieran. Lo que se obtiene, de hecho, es una aproximación discreta de la solución de ecuaciones diferenciales si las diferencias son finitas (como en la figura 8), pero continúa si las diferencias son infinitamente pequeñas. La predicción entra en juego en esta estrategia al preguntarse qué ocurrirá en un futuro próximo, aunque en este momento no existe una reflexión sobre la unicidad de la solución, al menos no de forma explícita. Si los valores convergen, entonces el límite es una función que es la solución de la ecuación. En consecuencia, si los valores no convergen, esto no implica nada sobre la existencia de la solución, por lo que podría haber una solución para la ecuación y no una convergencia con el método.

Figura 8

n-esima iteración del método de Euler

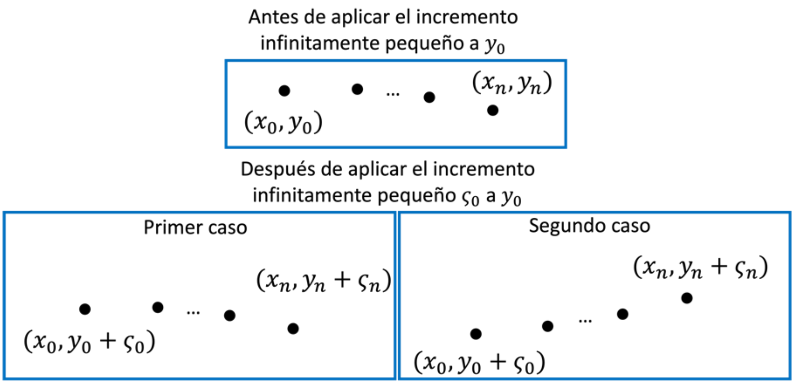


De la convergencia de los valores obtenidos dependerá garantizar la existencia de la solución. Cauchy y Moigno (1844) utilizaron el incremento infinitamente pequeño (infinitesimal) de la siguiente manera: si se realiza un incremento infinitamente pequeño ς_0 a y_0, entonces y_n tendrá un incremento ς_n. Esto para converger a la solución deseada, este último aumento debe ser tan pequeño como ς_0 y la finura comienza en la *variación acotada.* Por el contrario, si el cambio infinitamente pequeño, ς_0, es aplicado para y_0 y el cambio, ς_n, en

y_n no es igualmente pequeño como ς_0, entonces Cauchy y Moigno (1844) afirmaron que no convergería con la solución ofrecida por el método (ver Figura 9). Esto evidencia el papel de la *pequeña variación* en el análisis de la convergencia de la aproximación como, por ejemplo, el uso del incremento infinitamente pequeño en sus diferentes órdenes.

Figura 9

Aplicando un incremento infinitamente pequeño al valor inicial



Suponga que con el cambio ς_0 a y_0 el valor de y_1 es afectado por un incremento ς_1. Dos igualdades son obtenidas, una sin el incremento, la otra con el incremento ς_0:

$$y_1 - y_0 = (x_1 - x_0) f(x_0, y_0)$$

$$y_1 + \varsigma_1 - (y_0 + \varsigma_0) = (x_1 - x_0) f(x_0, y_0 + \varsigma_0)$$

La segunda igualdad se resta de la primera para producir:

$$\varsigma_1 - \varsigma_0 = (x_1 - x_0)[f(x_0, y_0 + \varsigma_0) - f(x_0, y_0)]$$

Utilizando la hipótesis de que $\frac{df}{dy}$ es continua en un intervalo cerrado, se asegura que la diferencia está acotada por una constante, M, tal que:

$$[f(x_0, y_0 + \varsigma_0) - f(x_0, y_0)] < M\varsigma_0$$

Es aquí donde se evidencia un estudio específico de la variación, ya que la *variación acotada* aparece como condición en las pendientes de las tangentes para garantizar, en este caso, la convergencia y existencia de la solución. Esto es fundamental para construir la condición de Lipschitz –discutida más adelante– para asegurar la unicidad de la solución. Como resultado de esto, tenemos

$$\varsigma_1 - \varsigma_0 < (x_1 - x_0)M\varsigma_0$$

Por eso

$$\varsigma_1 < \varsigma_0(1 + (x_1 - x_0)M) < \varsigma_0 e^{(x_1 - x_0)M}$$

Donde ς_1 será tan pequeño como sea, dependiendo del valor de la diferencia $(x_1 - x_0)$. De la misma forma se prueba para y_n y se estudian las diferencias $y_m - y_{m-1}$ para m natural entre 1 y n, donde a y_m se le atribuye un crecimiento $\varsigma_m e^{(x - x_m)M}$. Probando la convergencia a una función $y = F(x)$.

Para la prueba de la continuidad, se toman las siguientes igualdades, donde A es un promedio de las $f(x_n, y_n)$ y Θ, θ, θ_1valores entre 0 y 1

$$y_1 - y_0 = (x_1 - x_0)f\big(x_0 + \theta_1(x_1 - x_0), y_0 \pm \Theta A(x_1 - x_0)\big)$$

Por la continuidad de la función f considerando a ε infinitesimal, se tiene

$$f\big(x_0 + \theta_1(x_1 - x_0), y_0 \pm \Theta A(x_1 - x_0)\big) < f(x_0, y_0) + \varepsilon$$

Por lo tanto

$$y_1 - y_0 < (x_1 - x_0)f(x_0, y_0) + (x_1 - x_0)\varepsilon$$

Nuevamente, el resultado depende del valor de la diferencia $x_1 - x_0$. Por último, para comprobar que satisface la ecuación diferencial utiliza la igualdad

$$F(x) = y_0 + (x - x_0)f\big(x_0 + \theta(x - x_0), y_0 \pm \Theta A(x - x_0)\big)$$

donde

$$F(x + h) = y_0 + (x + h - x_0)f\big(x_0 + \theta(x + h - x_0), y_0 \pm \Theta A(x + h - x_0)\big)$$

concluyendo que

$$F(x + h) - F(x) = hf(x_0 + \theta h, y_0 \pm \Theta A h)$$

que es equivalente con

$$F'(x) = f(x, F(x))$$

Por lo tanto, la ecuación diferencial se satisface. En conclusión, el método de Euler garantiza la existencia de la solución continua por medio de la aproximación.

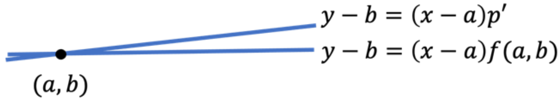
Aportaciones de Peano

Peano (1886) utiliza la pequeña variación, pero en otra dirección, empleando una doble desigualdad. La existencia de una solución se puede probar usando las inecuaciones diferenciales ($y' < f(x, y)$ y $y' > f(x, y)$, con la ayuda de las llamadas super-soluciones y sub-soluciones. La principal propuesta de Peano fue determinar una solución Y_1 que limita superiormente a la solución Y de la ecuación diferencial; con una solución, Y_2, que limita inferiormente a la solución Y. Pero este argumento es insuficiente para garantizar la unicidad de la solución, aunque la acota.

Para la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$, considera la hipótesis de que la función $f(x, y)$ es continúa con el valor inicial (a, b). Al igual que el procedimiento de Cauchy y Moigno (1844), se utilizó el método de Euler, pero en este caso se basó en construir rectas con pendientes mayores (supersoluciones) o menores (subsoluciones) que las rectas tangentes. Para el caso de las supersoluciones, esto supone la existencia de una p' mayor que $f(a, b)$; por lo tanto, se obteniene una recta con una pendiente mayor que la de la recta tangente (ver Figura 10).

Figura 10

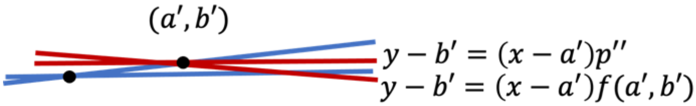
Recta con una pendiente mayor que la recta tangente en el primer punto



Después que, se toma un punto (a', b') sobre la recta con pendiente p' cerca del valor incial. La recta con pendiente $f(a', b')$ es determinada con el nuevo punto, y otro valor, $p'' > f(a', b')$, es considerada para limitar superiormente la aproximación.

Figura 11

Recta con una pendiente mayor a la recta tangente en el segundo punto



Luego, usando la recta con pendiente p'', el punto (a'', b'') es obtenido cerca del punto (a', b'). Este método se repite para asegurar que el mínimo de las supersoluciones corresponda a una función Y_1. Se aplica un procedimiento similar para determinar las subsoluciones, asumiendo valores más bajos para la pendiente $f(a, b)$. Esto permite construir la función Y_2 como el supremo de las subsoluciones. Peano después demuestra que ambas Y_1 y Y_2 son soluciones de la ecuación diferencial. Suponga luego que $Y_1 = F(x)$ y que $f(x_0, F(x_0)) = m$ para x_0, un valor específico de x. Esto muestra que $F'(x)$ es igual a m que satisface la ecuación diferencial. La función $\varphi(x) = F(x_0) + (x - x_0)(m - \varepsilon)$ es construida con un valor positivo ε que es suficientemente pequeño para que la recta $y = b + (x - a)p'$ con $p' > m$, es mayor que $\varphi(x)$ y como Y_1 es la cota inferior de estas rectas se tiene que

$$Y_1 = F(x) > \varphi(x) = F(x_0) + (x - x_0)(m - \varepsilon)$$

Por lo tanto

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} > m - \varepsilon \tag{1}$$

Finalmente, la función $\psi(x) = F(x_0) + \delta + (x - x_0)(m + \varepsilon)$ es construida con δ y un ε que es positivo e infinitamente pequeño. Al realizar la resta $\frac{d\psi}{dx} - f(x, \psi)$ obtenemos

$$m + \varepsilon - f(x, F(x_0) + \delta + (x - x_0)(m + \varepsilon))$$

Que representa una cantidad positiva. Por lo tanto, $\frac{d\psi}{dx} > f(x, \psi)$ y, ya que $F(x)$ es el límite inferior que satisface esa condición, $F(x) < F(x_0) + \delta + (x - x_0)(m + \varepsilon)$; por eso

$$F(x) \leq F(x_0) + (x - x_0)(m + \varepsilon)$$

Que es

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} < m + \varepsilon$$

(2)

Por las condiciones (1) y (2), vemos que $F'(x) = m$ satisface la ecuación diferencial. El mismo procedimiento se sigue análogamente para Y_2.

Aportaciones de Lipschitz

Las contribuciones de Lipschitz (1868, 1880), la propuesta es que una función$f(x, y)$ satisface la condición

$$|f(h,k) - f(h,l)| < M \cdot |k - l|$$

Donde M se conoce actualmente como la constante de Lipschitz, y la *variación acotada* corresponde a las acotaciones puestas sobre el cambio y lo que implica en el modelo, llegándose a la conclusión de que esta condición es suficiente, pero no necesaria, para garantizar la existencia y unicidad de la solución. Lipschitz contempla esta condición en sus obras (1868, 1880) y profundiza en el método de Cauchy para sistemas de ecuaciones diferenciales. Como se muestra arriba, el método de Euler se utiliza suponiendo que la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ con el valor inicial (x_0, y_0) tiene dos soluciones; por lo tanto, habría dos caminos posibles, pero claramente diferentes, de las rectas tangentes que se están determinando, aunque la condición de Lipschitz restringe esto de modo que solo puede existir un camino para estas tangentes. La solución, entonces, tiene unicidad.

Una interpretación de este problema es que si se aplica un cambio infinitamente pequeño al valor $y_0 = 0$, la diferencia entre las pendientes (antes y después de aplicar el cambio) será acotada. A menudo se utiliza un ejemplo de no unicidad para visualizar el hecho de que la condición de Lipschitz no se cumple. Como dato adicional, considere el siguiente ejemplo, dada la ecuación diferencial $y' = y^{\frac{1}{3}}$ con el valor inicial $x_0 = 0$ y $y_0 = 0$. Se obtienen al menos dos soluciones, cuya expresión analítica es la siguiente:

$$y = 0, \qquad y = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}x^3}$$

Por lo tanto, la solución no es única para este valor inicial. Si aplicamos el método de Euler en un caso concreto, suponiendo una diferencia de 0,001 entre x_m y x_{m+1} (con m entre 0 y n como el número de iteraciones) y considerando el valor inicial (0,0), la solución obtenida es $y = 0$.

Figura 12

Condición de Lipschitz. (Lipschitz, 1880, p.501)

Stetigkeit einer Function einer Variable gemacht wurde; der Kürze halber werde der absolute Werth einer Grösse w durch das Zeichen $[w]$ ausgedrückt. Es sollen der absolute Werth von (2) und von (3) die Eigenschaft haben, falls für eine hinreichend kleine Grösse δ die Ungleichheiten

(4) $$[\Delta x] < \delta,\ [\Delta y] < \delta,\ [\Delta z] < \delta$$

erfüllt sind, immer unter dieselbe beliebig kleine Grösse λ herabzusinken, oder die Ungleichheiten

(5) $$[f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z)] < \lambda,$$

(6) $$[g(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - g(x, y, z)] < \lambda$$

zu befriedigen. Eine andere Voraussetzung, welche ebenfalls bei den erfahrungsmässig vorkommenden Functionen in der Regel erfüllt ist, bezieht sich auf die Differenzen (2) und (3) bei je zwei der Mannigfaltigkeit K angehörenden Werthsystemen, in denen der Werth der Variable x derselbe oder Δx gleich Null ist; sie besteht darin, dass es endliche positive Constanten $c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}$ giebt, für welche die Ungleichheiten

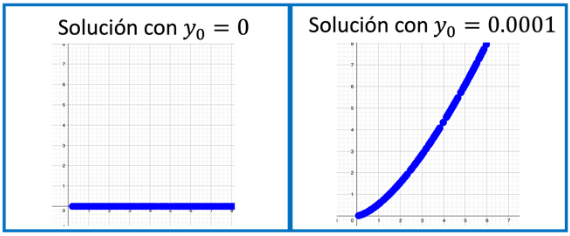
(7) $$[f(x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z)] < c_{11}[\Delta y] + c_{12}[\Delta z],$$

(8) $$[g(x, y + \Delta y, z + \Delta z) - g(x, y, z)] < c_{21}[\Delta y] + c_{22}[\Delta z]$$

En contraste, si se considera el valor inicial $(0{,}0 + \varsigma)$ con ς suficientemente pequeño (para este caso, consideremos ς =0.0001), entonces la solución tiende hacia $y = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}x^3}$ (Figura 13). Por ejemplo, esta ecuación diferencial satisface la hipótesis de Peano, sin embargo, la unicidad no se cumple.

Figura 13

Aproximación numérica de la solución de la ecuación diferencial alrededor de (0,0), dado por el método de Euler



Lo que ocurre aquí es que, desde la primera iteración, se obtienen cambios considerables en la pendiente de la tangente en cada valor aproximado, por lo que no se cumple la propiedad de variación acotada; es decir, para dos condiciones iniciales infinitamente cercanas, el comportamiento de cada solución debe ser prácticamente el mismo, sin singularidades, ya que es parte de la sensibilidad del valor inicial.

Considere, por ejemplo, el punto (x_0, y_0) y otro punto infinitamente cercano (x_0, η_0), tal que $\eta_0 = y_0 + \varsigma_0$, con ς_0 siendo infinitamente pequeño. Usando estos valores iniciales, las líneas se pueden determinar para cada punto (como en la Figura 14):

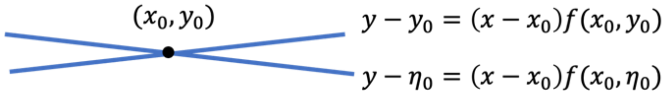
$$y - y_0 = (x - x_0) f(x_0, y_0),$$

$$y - \eta_0 = (x - x_0) f(x_0, \eta_0)$$

Como se muestra en esta representación.

Figura 14

La existencia de dos soluciones para una ecuación



Al estudiar la diferencia entre estas dos rectas valores iniciales, suficientemente cercanos, vemos que difirieren en sus pendientes como $|f(x_0, \eta_0) - f(x_0, y_0)|$. En consecuencia, al satisfacer la condición de Lipschitz, estas diferencias para cada punto determinado quedan acotadas por

$$|f(x_n, \eta_n) - f(x_n, y_n)| < M|\eta_n - y_n|$$

Donde el valor de M puede obtenerse determinando un límite de $\frac{\partial f}{\partial y}$. Si el valor del cambio $\varsigma_n = \eta_n - y_n$ es infinitamente pequeño como ς_0, entonces tenemos que $|f(x_n, \eta_n) - f(x_n, y_n)|$ es infinitamente cercano a cero, condición suficiente para obtener una inclinación única de las líneas para valores muy próximos. Si no se cumple la condición de Lipschitz, no se puede garantizar la unicidad. Con $f(x, y)$, una función Lipschitz continua, la existencia y la unicidad están aseguradas sobre el valor inicial. Este es otro ejemplo del papel que juega el estudio de la variación acotada y podría servir de base para diseños didácticos adecuados para estudiantes universitarios.

Dialéctica entre el conocimiento universitario y el conocimiento en uso en los textos matemáticos analizados

Estudios de este tipo permiten desarrollar la dialéctica entre el conocimiento institucionalizado y el conocimiento situado en un momento determinado de su evolución histórico-conceptual, que en el presente caso corresponde a su génesis. En el conocimiento universitario institucionalizado el teorema se presenta, como hemos mostrado, como un problema directo que consistía en probar una hipótesis. Para el significado del teorema como conocimiento en uso, en cambio, partimos de su génesis, presentándolo como producto del estudio de un problema inverso; es decir, determinar las condiciones para asegurar la existencia y unicidad de la solución. El primer enfoque refleja los esfuerzos por "masificar" la educación superior, donde los conocimientos muchas veces se presentan como terminados, debido a la enorme cantidad de contenidos a estudiar.

La Tabla 1 muestra una síntesis del uso de los objetos matemáticos involucrados en la demostración del teorema de la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ con el valor inicial (x_0, y_0). Una columna muestra el conocimiento universitario, la otra su génesis.

Tabla 1

Dialéctica entre el conocimiento Universitario y el conocimiento en uso en los textos matemáticos analizados

Objeto	Conocimiento universitario	Conocimiento desde su génesis
$\boldsymbol{f(x, y)}$	Expresión analítica que corresponde operacionalmente a la derivada de la solución.	Significado de la derivada de la solución. Cambio, pendiente de la tangente en cada punto de la solución.
Valor inicial $\boldsymbol{(x_0, y_0)}$	Determine una solución específica o el intervalo que satisfaga la hipótesis con el valor inicial.	Aplicación de cambios infinitamente pequeños al valor inicial para comparar las aproximaciones a la solución de valores iniciales que están "muy" cerca.
Condición de Lipschitz o continuidad de las funciones $\boldsymbol{f(x, y)}$ **y** $\boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial y}}$	Corroborar el cumplimiento de las condiciones con las ecuaciones diferenciales dadas y el valor inicial establecido.	Búsqueda de condiciones que aseguren un comportamiento, y la existencia y unicidad de la solución. Contraejemplos para probar la hipótesis (abducción).
Método numérico	Se utiliza el método de las sucesiones iterativas de Picard, que en su	Se utiliza el método de Euler para aproximar la incógnita (solución) a lo

	convergencia ayuda a determinar una expresión analítica de la solución.	conocido (recta construida a partir de un punto y una pendiente).

Tabla 2

El papel de las prácticas en la construcción y demostración del teorema de existencia y unicidad

Práctica	Caracterización	Role en la demostración del teorema
Aproximar	Obtener un resultado lo más cercano que se desee al valor exacto, conservando el control sobre la cercanía.	Esta práctica aparece en el uso del método numérico para aproximar la solución de ecuaciones diferenciales lineales cuando se conoce un valor inicial.
Comparar	Asociado a la acción de establecer diferencias entre estados proximales. Se utilizan al menos dos estados al comparar.	En este caso, aparece como la forma de analizar la solución antes y después de aplicar un cambio infinitamente pequeño desde los valores iniciales.
Conjeturar	Formar juicios de algo con base en la información obtenida, en este caso con fines predictivos construyendo condiciones para obtener un resultado.	Esta práctica surge en el estudio de los límites al cambio, con el objetivo de establecer hipótesis que aseguren la existencia y unicidad de la solución de la ecuación diferencial.
Predecir	Construcción de afirmaciones con racionalidad que indican que ciertos eventos van a ocurrir.	Construcción y demostración del teorema para usarlo como un modelo predictivo, continuando con el descubrimiento sobre el tema.

Este conocimiento, a partir de su génesis y del papel de la visualización en la reconstrucción del teorema, permite identificar prácticas asociadas a la búsqueda de una hipótesis que asegure la existencia y unicidad de la solución de ecuaciones diferenciales, para luego demostrarla. Las prácticas que se muestran en la Tabla 2 no eran evidentes porque estaban bloqueadas u ocultadas por el discurso de las matemáticas escolares.

El presente estudio caracteriza formas específicas de utilizar el cambio, donde es necesario limitar una diferencia de primer orden de variación; es decir, limitar $f(x_0, y_0 + \varsigma_0) - f(x_0, y_0)$, cuando (x_0, y_0) es el valor inicial dado, y ς_0 es el incremento infinitamente pequeño. La variación corresponde a un estudio, interpretación y cuantificación del cambio que va desde la construcción de una ecuación diferencial hasta la determinación de su solución. En el significado, comprensión y uso de la solución, especialmente, se evidencia pequeña variación como el estudio de lo que puede causar un pequeño cambio (desde una visión relativista), y variación acotada como el estudio para establecer límites al cambio y obtener un resultado deseado. resultado o explicar el resultado obtenido.

La pequeña variación ofrece un dinamismo del valor inicial que, en ocasiones, se utiliza únicamente para obtener una solución concreta. La comparación de soluciones específicas proporciona una comprensión global de la familia de soluciones de ecuaciones diferenciales. Este estudio de pequeña variación se contempla dentro de la variación acotada para la construcción y significado de la condición de Lipschitz, como se evidenció en la reconstrucción del teorema. Y, sobre todo, “pequeña variación” es relativa según el contexto que se utilice.

CONCLUSIONES

Este estudio, desde una perspectiva TSME, amplía nuestro conocimiento del teorema de la existencia y unicidad de las ecuaciones diferenciales, y le da un significado plausible que requiere solo ideas de cálculo, pero, sobre todo, muestra el tipo de *prácticas* que entran en juego para justificar eso; por un lado, la existencia, por otro, quizás más complejo, la unicidad. Estos hallazgos son fruto de una adecuada problematización del conocimiento matemático.

Al estudiar el marco conceptual del teorema, reflexionamos sobre la complejidad de realizar investigaciones en la historia de las matemáticas. Muchas veces los hechos se presentan de forma lineal de acuerdo con la cronología, pero particularmente en este estudio bajo el enfoque socio-epistemológico, se evidencia el estudio cuidadoso que conllevan las interacciones sociales hasta convertirlas en patrimonio cultural.

En el campo de la Matemática Educativa, a través de estos trabajos se estudia la historia conceptual, a partir de una construcción social (estudio de las prácticas situadas y compartidas). Esto contribuye a la reflexión sobre la enseñanza y la didáctica de estos temas. No se trata de reproducir la historia, sino de extraer aquellos elementos que, específicamente en este trabajo, se reportan a través de resultados para reflexionar sobre un cambio de relaciones con el saber. El papel del objeto matemático como conocimiento desde su génesis (Tabla 1), y el papel de la práctica en la demostración del teorema (Tabla 2), son características utilizadas para otras actividades del conocimiento humano (popular, técnico, científico) que podrían desarrollarse en varios niveles educativos, no solo en el campo de las ecuaciones diferenciales sino, por ejemplo, en el estudio de la trayectoria de ida y vuelta de los drones, el vaciado de recipientes o situaciones médicas, entre muchos otros.

Estos resultados revelan diversas racionalidades que funcionan en el diseño de situaciones de aprendizaje para ecuaciones diferenciales o, más en general, para el estudio del cambio en problemas inversos. Reconstruir estos significados contribuye a comprender el teorema de la existencia y la unicidad desde una perspectiva variacional –visual, numérica y analítica– además del enfoque algebraico que predomina en los libros de texto universitarios y las obras matemáticas analizadas.

Un resultado fundamental consiste en construir este teorema y demostrarlo como puente entre dos prácticas de referencia: la matematización de la naturaleza y la teorización matemática formalizada, donde se institucionaliza como uno de los teoremas más importantes de las ecuaciones diferenciales. Al respecto, dos hechos que propiciaron y explican la génesis de este problema fueron: (i) buscar una formalización de la demostración del teorema; y (ii) determinar el número mínimo de hipótesis que garanticen la existencia, o incluso la existencia y unicidad.

Un problema bien conocido en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales consiste en pensar en ellas como un conjunto de métodos algebraicos que ayudan a integrar y determinar una solución; es decir, la integración se utiliza como método inverso a la derivación para obtener soluciones. Con la ayuda de la historización, mostramos que la demostración de este teorema se puede abordar a través de variaciones, y que esto es más fácil de entender o más intuitivo. Mostramos además que, a partir de la ecuación es posible obtener argumentos variacionales para determinar su solución, junto con la interpretación visual de la ecuación diferencial como un problema inverso de la tangente a la curva dada, lo que generó más representaciones visuales y argumentos del tipo variacional.

El uso de la visualización con la estructura del problema inverso reveló la importancia del valor inicial en las ecuaciones diferenciales (existencia) al establecer condiciones de cambio para obtener una solución deseada (convergencia de la solución y unicidad). Esa reconstrucción visual mostró el papel que juega el método de Euler en la aproximación a la solución desconocida, y el papel del cambio en los valores iniciales (pequeña variación) para una primera aproximación a la solución. Esto contribuyó a dar sentido a las ecuaciones diferenciales al tratar la derivada como la pendiente de la recta tangente de la solución deseada; lo que podría llamarse la linealización local de la solución.

Por lo tanto, la contribución original de esta investigación radica en el uso de la variación acotada. El estudio del cambio y la variación fue insuficiente para construir la noción de unicidad de la solución. Así, y considerando la problemática de estudiar la naturaleza y epistemología de este conocimiento, probamos que la variación acotada contribuyó a la búsqueda o establecimiento de condiciones para el estudio del cambio y la variación en la interpretación de la solución de ecuaciones diferenciales, para obtener una solución adecuada con un objetivo predictivo –condicional (conjetura)– evitando así la diversidad de posibles soluciones al problema. Un estudio futuro se centrará en probar estas ideas mediante el diseño de una intervención didáctica para estudiantes universitarios. Esto incluirá diseños apropiados de su profesión, donde la naturaleza inversa del problema es el centro del diseño que demostrará el uso de la existencia y unicidad de la solución de ecuaciones diferenciales que caracterizan el fenómeno. Pero esa es otra historia.

DECLARACIONES DE CONTRIBUCIONES DE LOS AUTORES

RFS y RCU concibieron la idea presentada. RFS desarrolló la teoría. RFS y RCU adaptaron la metodología a este contexto, crearon los modelos, realizaron las actividades y recopilaron los datos. RFS analizó los datos. Todos los autores participaron activamente en la discusión de los resultados, revisaron y aprobaron el trabajo.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos que respaldan los resultados de este estudio estarán disponibles por el autor correspondiente, RFS, previa solicitud razonable.

REFERENCIAS

Artigue, M. (1992). Functions from an algebraic and graphical point of view: cognitive difficulties and teaching practices. In *The concept of function: aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 109–132). Mathematical Association of America.

Barros, M., & Kato, L. (2016). O Ensino das Equações Diferenciais em Livros Didáticos Adotados para os Cursos de Engenharia : um estudo à luz das mudanças de domínios e dos registros de representações semióticas. *Revista Ensino de Ciências*, *7*(1), 19–38.

Braun, M. (1993). *Differential Equations and their Applications*. Springer.

Buendía, G., & Cordero, F. (2013). The use of graphs in specific situations of the initial conditions of linear differential equations. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *44*(6), 927–937. https://doi.org/10.1080/0020739X.2013.790501

Camacho-Machín, M., & Guerrero-Ortiz, C. (2015). Identifying and exploring relationships between contextual situations and ordinary differential equations. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *46*(8), 1077–1095. https://doi.org/10.1080/0020739X.2015.1025877

Cantoral, R. (2019). Socioepistemology in Mathematics Education. In *Encyclopedia of Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/978-3-319-77487-9_100041-1

Cantoral, R., Montiel, G., & Reyes-Gasperini, D. (2015). Socioepistemological program of mathematics education research: the Latin Americas case. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, *18*(1), 5–17. http://dx.doi.org/10.12802/relime.13.1810

Cantoral, R., Moreno-Durazo, A., & Caballero-Pérez, M. (2018). Socio-epistemological research on mathematical modelling: An empirical approach to teaching and learning. *ZDM - Mathematics Education, 50*(1–2), 77–89. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0922-8

Cauchy, A., & Moigno. (1844). *Leçons de Calcul Différentiel et de Calcul Integral*. Libraire de École Polytechnique.

Dana-Picard, T., & Kidron, I. (2008). Exploring the Phase Space of a System of Differential Equations : Different Mathematical Registers. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *6*, 695–717. https://doi.org/10.1007/s10763-007-9099-2

Dhombres, J. (1985). The origins of Cauchy's rigorous calculus. *Historia Mathematica*, *12*(1), 86-90. https://doi.org/10.1016/0315-0860(85)90078-3

Escolar, C. (2004). Pensar en/con Foucault. *Cinta Moebio,* (20), 93-100.

Espinoza Ramírez, L., Vergara Gómez, A., & Valenzuela Zúñiga, D. V. (2018). Geometry in everyday practice: the measurement of inaccessible distances in a text of the XVI century. *Revista Latinoamericana de Investigacion En Matematica Educativa*, *21*(3), 247-274. https://doi.org/10.12802/relime.18.2131

Fallas-Soto, R. (2015). *Existencia y unicidad: estudio socioepistemológico de la solución de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden*. [Master dissertation, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional]. https://doi.org/10.13140/RG.2.1.1265.6485

Fallas Soto, R., & Cantoral, R. (2016). Estudio socioepistemológico del teorema de existencia y unicidad em las ecuaciones diferenciales ordinarias. *Histemat*, *2*(3), 256–280.

Goldstein, C. (2018). Hermite and Lipschitz: A Correspondence and Its Echoes. In: Borgato M., Neuenschwander E., Passeron I. (eds) Mathematical Correspondences and Critical Editions. *Trends in the History of Science*. Birkhäuser. https://doi.org/10.1007/978-3-319-73577-1_10

Hinojos-Ramos, J., Farfán, R., & Orozco-del-Castillo, M. (2021). An alternative to broaden the school-promoted meanings of mathematics in electrical sciences from socioepistemology. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *52*(8), 1161-1174. https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1741710

Martinez-Luaces, V., Fernández-Plaza, J. A., & Rico, L. (2019). Inverse Modeling Problems in Task Enrichment for STEM Courses. In K. G. Fomunyam (Ed.), *Theorizing STEM Education in the 21st Century*. IntechOpen. https://doi.org/10.5772/intechopen.89109

KarimiFardinpour, Y., & Gooya, Z. (2017). Comparing Three Methods of Geometrical Approach in Visualizing Differential Equations. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 4*(2), 286–304. https://doi.org/10.1007/s40753-017-0061-6

Korovkin, N. V, Chechurin, V. L., & Hayakawa, M. (2007). *Inverse Problems in Electric Circuits and Electromagnetics*. Springer.

Lakatos, I. 1980. Cauchy and the continuum: the significance of nonstandard analysis for the history of mathematics. In G. C. J. Worall (Ed.), *Mathematics, science, and epistemology*. Cambridge University Press.

Lipschitz, R. (1868). Disamina della pknossibilità d' integrare completamente un dato sistema di equazioni differenziali ordinarie. *Annali Di Matematica Pura Ed Applicata, 2*(2), 288–302.

Lipschitz, R. (1880). *Lehrbuch der Analysis*. Von Max Cohen & Sohn.

Morales, A., & Cordero, F. (2016). La graficación - modelación y la Serie de Taylor. Una socioepistemología del Cálculo. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa, 17*(3), 319–345. https://doi.org/10.12802/relime.13.1733

Moreno, J. (2006). *Articulation Des Registres Graphique et Symbolique Pour l' Etude des Equations Differentielles avec Cabri Geometre. Analyse des difficultés des étudiants et du rôle du logiciel*. [Doctor dissertation, Université Joseph Fourier, Grenoble I]. HAL. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00203681

Peano, G. (1886). Sull' integrabilità delle equazioni differenziali di primo ordine. *Atti Della Reale Accademia Delle Scienze Di Torino, 21*, 437–445.

Piaget J. (1976) Piaget's Theory. In: Inhelder B., Chipman H.H., Zwingmann C. (eds) *Piaget and His School*. Springer Study Edition. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-46323-5_2

Picard, E. (1886). *Cours D' Analyse*. Faculté des Sciences de Paris.

Ramm, A. G. (2005). Inverse problems: Mathematical and analytical techniques with applications to engineering. In A. Jeffrey (Ed.), *Inverse Problems: Mathematical and Analytical Techniques with Applications to Engineering.* Springer. https://doi.org/10.1007/b100958

Rasmussen, C., Zandieh, M., King, K., & Teppo, A. (2009). Mathematical thinking and learning advancing mathematical activity: a practice-oriented view of advanced mathematical thinking. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(1), 51–73. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0701

Simmons, G. (1993). *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones y Notas Historicas*. Mc Graw Hill.

Stephan, M., & Rasmussen, C. (2002). Classroom mathematical practices in differential equations. *Journal of Mathematical Behavior*, *21*(4), 459–490. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(02)00145-1

Vigotsky, L. (1986). Though and Language. MIT Press.

Youschkevitch, A. P. (1981). Sur les origines de la « méthode de Cauchy-Lipschitz » dans la théorie des équations différentielles ordinaires. *Revue d'histoire Des Sciences, 34*(3-4), 209-215. https://doi.org/10.3406/rhs.1981.1766

Zill, D. (1997). *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones*. Iberoamérica.

Zill, D., & Cullen, M. (2019). *Differential Equations with Boundary-Value Problems*. Brooks/Cole Cengage Learning. https://doi.org/10.1017/CBO9781107415324.004