ACTA SCIENTIAE

ISSN: 2178-7727
DOI: 10.17648/acta.scientiae.7129

Retas e ângulos que se movimentam, ideias discentes que tocam e somam

Marcos Paulo Henrique [a]
Marcelo Almeida Bairral [b]

[a] Secretaria de Estado de Educação do Rio de Janeiro, Volta Redonda, RJ, Brasil
[b] Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, Brasil

Recebido para publicação 27 abr 2022. Aceito após revisão 16 dez. 2022
Editor designado: Thiago Pedro Pinto

RESUMO

Contexto: A visualização é uma habilidade indispensável para uma variedade de atividades da vida cotidiana e para a construção e o desenvolvimento conceitual. **Objetivos:** Por representar uma parte substancial da Geometria Euclidiana, abordam-se neste texto: o estudo e a análise das relações entre ângulos formados a partir de duas retas paralelas intersectadas por uma transversal; e o papel da visualização na construção e no desenvolvimento dos conceitos geométricos imbricados nas relações matemáticas subjacentes ao tema. **Design**: A abordagem metodológica adotada para o desenvolvimento do estudo foi o *Design Experiments*. **Ambiente e participantes**: Apresenta-se uma situação de ensino na qual estudantes do 8.º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública estadual do Rio de Janeiro, Brasil, realizaram manipulações na tela do *smartphone* durante a realização de uma atividade. **Coleta e análise de dados**: Para análise dessa atividade selecionamos eventos de um vídeo obtidos a partir do *smartphone* utilizado pelos estudantes. **Resultados**: Por meio das interações e manipulações os discentes visualizaram, analisaram e construíram os conceitos de ângulos correspondentes e ângulos colaterais, mediante o estudo de um objeto geométrico na tela do *smartphone* por meio do aplicativo GeoGebra. **Conclusões**: O trabalho geométrico mediado por dispositivos móveis com toques em telas possibilita a reorganização curricular da Geometria, a articulação conceitual e a quebra de hierarquia de conceitos.

Palavras-chave: retas paralelas e transversais; ângulos entre retas; visualização; conceituação; geometria dinâmica; Ensino Fundamental.

Autor correspondente: Marcos Paulo Henrique. Email: marcos.p.henrique@gmail.com

Straight and angles that move, student ideas that touch and add

ABSTRACT

Background: Visualisation is a crucial skill for several everyday life activities and conceptual construction and development. **Objectives:** As it represents a substantial part of Euclidean geometry, this article addresses: the study and analysis of the relationships between angles formed from two parallel lines intersected by a transversal and the role of visualisation in the construction and development of geometric concepts imbricated in the mathematical relationships underlying the theme. **Design:** The methodological approach adopted was Design Experiments. **Settings and participants**: A teaching situation is presented, in which students from the 8th grade of elementary school at a state public school in Rio de Janeiro, Brazil, performed manipulations on the smartphone screen while carrying out an activity. **Data collection and analysis:** To analyse this activity, we selected events from a video obtained from the smartphone used by the students. **Results:** Through interactions and handlings, students visualised, analysed, and built the concepts of corresponding angles and collateral angles by studying a geometric object on the smartphone screen through the GeoGebra application. **Conclusions:** The geometric work mediated by mobile devices with touch screens enables the curricular reorganisation of Geometry and the articulation and the breaking of the hierarchy of concepts.

Keywords: Parallel and transversal lines; Angles between lines; Conceptualisation; Visualisation; Dynamic geometry; Elementary school.

INTRODUÇÃO

As tecnologias digitais móveis, *smartphones* e *tablets*, possibilitam outras formas de se pensar o ensino e a aprendizagem geométrica e oportunizam mudanças qualitativas de ordem didática, com novas metodologias de ensino e na organização curricular, e na dimensão cognitiva (Bairral & Henrique, 2021). Trazendo reflexões sobre possibilidades – didáticas e cognitivas – de inovação, neste artigo abordamos o papel da visualização para a construção e o desenvolvimento conceitual, processos potencializados por ambientes de geometria dinâmica (AGD) em dispositivos móveis com toques em telas (DMcTT), particularmente o aplicativo GeoGebra em *smartphones*.

Discutimos aqui algumas questões relacionadas ao ensino e à aprendizagem da Geometria [1], apresentamos algumas singularidades e potencialidades dos AGD e buscamos provocar algumas questões, tais como: o

[1] Usaremos maiúscula quando nos referirmos à área e minúscula quando focarmos em processos de ensino ou de aprendizagem.

aprendizado da Geometria Euclidiana em AGD deve continuar seguindo a forma hierarquizada na qual ela foi organizada para recursos convencionais? Em que diferem a construção e a análise de um objeto geométrico mediadas pelos cliques no *mouse* da mediação dos toques na tela?

Por permitir a abordagem de uma gama de temas relacionados à Geometria Euclidiana, como o estudo de triângulos e quadriláteros, centramos na análise das relações entre ângulos formados a partir de duas retas paralelas intersectadas por uma transversal. Para evidenciar alguns dos nossos resultados, ilustramos uma situação de ensino na qual dois estudantes do 8.º ano do Ensino Fundamental trabalharam na análise das relações entre ângulos correspondentes e ângulos colaterais por meio da manipulação *touchscreen* mediada pelo aplicativo GeoGebra em *smartphones*. Com um olhar para além dos toques, inferimos como os discentes se apropriaram deles para intuir, visualizar e formular suas conjecturas, ao reposicionarem ângulos e retas de objetos geométricos, em direção à construção conceitual. A pesquisa considera a visualização e a conceituação como processos cognitivos imbricados, pois o aprimoramento da habilidade de visualizar compõe a construção e o desenvolvimento conceitual.

VISUALIZAÇÃO E CONCEITUAÇÃO GEOMÉTRICA

Em um contexto mais amplo, a visualização tem origem no latim *visualis*, que é relativo à vista, e podemos entender como o ato ou efeito de ver. A palavra "ver", neste caso, assume não só os objetos que estão diante dos olhos, como um livro impresso ou uma representação gráfica na tela do *smartphone*, mas as imagens mentais que conseguimos formar e manipular – e é para este sentido que nossas reflexões convergem.

O termo "visualização" no contexto geométrico possui concepções distintas, porém, independentemente da perspectiva adotada, a visualização é vista como a habilidade de manipular imagens visuais[2]. Na mesma direção, Zimmermann e Cunningham (1991) apontam o caráter multifacetado da visualização, por possuir perspectivas históricas, filosóficas, pedagógicas e tecnológicas. Os estudiosos ampliam a definição de visualização matemática. Para eles, ela não constitui apenas em manipular uma imagem mental, pois é um processo que envolve a representação de um conceito, sem ou com o auxílio

---

[2] Presmeg (1986, p. 46) define imagem visual como "um esquema mental que descreve informações visuais ou espaciais".

de uma tecnologia, para a compreensão e descobertas matemáticas. Os autores ainda defendem que a visualização implica em um tipo de intuição que dá significado à compreensão, à medida que direciona para construção de ideias criativas, e serve como um guia para resolução de problemas. Para obter esse tipo de intuição, a visualização deve se relacionar com toda a matemática. Portanto, "o pensamento visual e as representações gráficas devem estar ligados a outros modos de pensamento matemático e outras formas de representação." (Zimmermann & Cunningham, 1991, p. 4). No nosso caso, relacionamos visualização, conceituação, construções e representações dinâmicas na tela.

De modo semelhante, Leivas (2009) define visualização como um processo de formar imagens mentais, que implica na construção e comunicação de um conceito matemático, com o intuito de amparar a resolução de problemas, seja de natureza analítica ou geométrica. O autor também acrescenta o caráter intuitivo nesse processo, por considerar que a intuição está relacionada à construção de um conceito matemático a partir das experiências concretas e da análise que o sujeito tem do objeto.

Ademais, Nacarato e Passos (2003) entendem a representação como um elemento essencial à visualização. Elas alegam que a visualização e a representação são dois entes interligados e desempenham um papel fundamental para o desenvolvimento de conceitos geométricos. Definem a visualização como a habilidade de pensar em termos de imagem mental, representação mental de um objeto ou relação. A representação nesse contexto assume um caráter duplo: é a evocação de uma imagem ou sua apresentação, que, conforme esclarecem as autoras, ocorrem de maneiras diversificadas, ou seja, apresentações gráficas, como um desenho no papel ou uma figura na tela do computador; ou a própria linguagem, e expressam as estratégias dos sujeitos em suas ideias geométricas.

Em sintonia, Hershkowitz (1994) esclarece que a visualização estabelece um papel complexo no processo de desenvolvimento conceitual e atua em duas direções. Assim, não é possível formar a imagem de um conceito e sua classe de figuras sem visualizar seus elementos e, por outro lado, caso os elementos visuais sejam restritos e limitados, podem empobrecer a imagem conceitual.

Tratando-se de visualização, há nuances como raciocínio visual, pensamento visual; e elementos como imaginação, intuição, percepção visual e representação, que se relacionam na elaboração do processo de visualizar. Conforme afirma Gutierrez (1991), esse processo tem como entidade fundamental as representações mentais que fazemos de objetos físicos, de relações, dos conceitos, entre outras.

Embora alguns autores apresentem perspectivas diferentes quanto à definição de visualização, elas se complementam e apontam o papel da visualização para a construção e o desenvolvimento conceitual. Geralmente, estudos que evidenciam a visualização deixam em outro plano a conceituação e vice-versa. Nossa intenção aqui é mostrar que esses processos se relacionam e em certa medida estão imbricados, pois o desenvolvimento da habilidade de visualizar compõe a construção e o desenvolvimento conceitual.

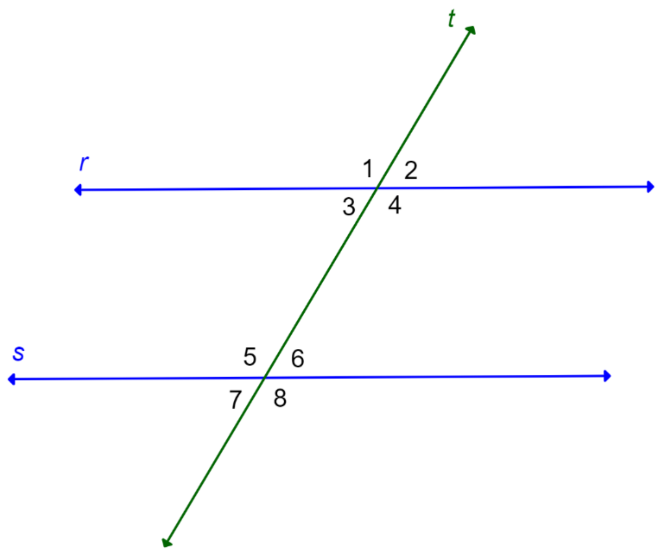
Conceitos são a ponte entre a mente e o mundo (Rosch, 1999). Ainda, de acordo com Rosch, conceitos não são entes isolados e suas categorizações somente existem em situações complexas concretas. A construção e o desenvolvimento conceitual ocorrem quando um sujeito, a partir das suas experiências, consegue elaborar uma imagem mental, visualizar os elementos que abrangem não apenas o caso particular, mas toda uma classe de objetos (Almeida & Lomônaco, 2018; Ferreira, 1963; Fischbein, 1993; Medin, 1989). Nesse âmbito, os conceitos matemáticos são derivados da sua definição, pois ela estabelece um corte entre as instâncias que são exemplos daquele conceito e os que não são (Hershkowitz, 1994), quer dizer, a definição e o conceito se relacionam, sendo a primeira os limites do segundo. Além do mais, o âmbito conceitual é contextual (Oliveira & Oliveira, 1999), metaforicamente rico (Henrique & Bairral, 2020; Lakoff & Johnson, 2001) e permite ao sujeito desenvolver suas complexas aptidões analógicas e inferenciais (Wolf, 2019).

Na Geometria outro elemento importante na articulação dos processos que compreendem visualizar e conceituar é o objeto geométrico. Recorremos a Fischbein (1993), que discorre acerca de um estudo que visa compreender o papel do conceito e da imagem na composição do objeto geométrico. Fischbein sustenta que é preciso considerar a definição, a imagem e o conceito figural como categorias de um objeto geométrico. Estabelece conceito figural como a construção tratada pelo raciocínio matemático no domínio da geometria, controlada e manipulada por princípios lógicos de um sistema axiomático.

Conforme esclarece Fischbein (1993), o objeto geométrico depende de uma natureza conceitual e outra figural, e é o equilíbrio entre esses dois componentes que permite a noção exata do objeto. Para o autor, da natureza conceitual deriva a ideia geral que expressa a classe de objetos, enquanto a natureza figural, a imagem mental, é a representação de um objeto ou fenômeno. Para compreender melhor essa relação, é importante destacar que os objetos matemáticos, como ponto, reta, retas paralelas, são modelos ideais de entidades mentais, nas quais somente em um sentido conceitual é possível considerar a perfeição desses objetos. Eles são representações gerais, não existem no mundo real, são abstrações que pertencem ao domínio dos conceitos, acrescenta o autor. Vamos considerar o seguinte postulado apresentado em Alexander e Koeberlein (2013, p. 75): "se duas retas paralelas se cortam por uma transversal, então os ângulos correspondentes são congruentes". Esse objeto geométrico é construído por entidades que são abstrações, e a validade da relação (ângulos correspondentes congruentes), provada por meio de deduções lógicas, pode ser explorada através do AGD e depende de uma manipulação mental para a construção conceitual. Vejamos a Figura 1.

Figura 1

Ângulos correspondentes formados a partir de duas retas paralelas e uma transversal.



Imagine que se possa deslocar a reta *r* de maneira que seja possível sobrepô-la a *s*; dessa forma veremos que os vértices dos ângulos 1 e 5, por exemplo, coincidirão. Como *r* e *s* são retas paralelas, podemos supor que as semirretas (os lados) dos ângulos também coincidirão, de maneira que será verificada a validade da relação. Usando esse mesmo raciocínio, é possível estabelecer outras manipulações, a fim de comprovar a validade dos teoremas correlatos desse postulado (ângulos alternos e ângulos colaterais). Na manipulação mental, temos envolvidos dois tipos de imagens: a do objeto geométrico formado por duas retas paralelas e uma reta transversal e a da operação, manipulada a partir do deslocamento de uma das retas paralelas, com o intuito de verificar a relação matemática.

Fischbein alega que conceitos não se movem, não é possível deslocá-los; tampouco esses objetos existem no mundo real, pois são representações nas quais há uma inter-relação entre o conceitual e o figural. Dessa forma, conforme alega o autor,

> os objetos de investigação e manipulação do raciocínio geométrico são então entidades mentais, denominadas conceitos figurais, que refletem propriedades espaciais (forma, posição, magnitude) e, ao mesmo tempo, possuem qualidades conceituais, como idealidade, abstração, generalidade e perfeição. (Fischbein, 1993, p. 143)

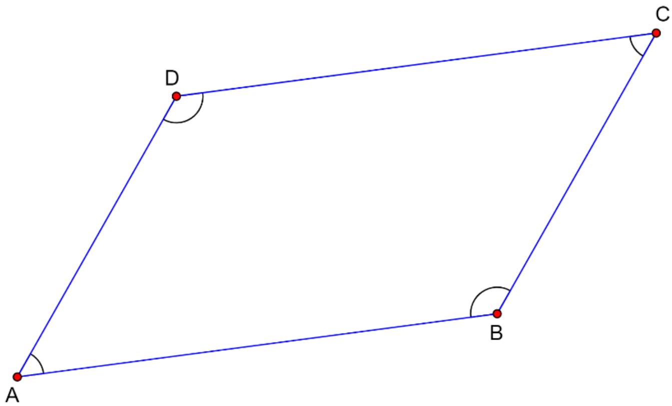
Por outro lado, esse processo exige a habilidade de manipular uma entidade mental, a visualização. Corroborando tais constatações, é possível inferir que a construção e o desenvolvimento conceitual são processos que se relacionam com a visualização a partir da análise do objeto, que possui duas componentes: uma figural e outra conceitual. Vejamos um exemplo que ajuda a elucidar a afirmação: considere o quadrilátero ABCD, cujos lados opostos são paralelos (Figura 2). Qual a relação entre ∠DAB e ∠BCD?

Como todos os lados são paralelos, podemos deduzir que ∠DAB e o ângulo externo adjacente ao ∠ABC são congruentes, pois são correspondentes. Esse processo pode ser visualizado pelo deslocamento do segmento DA sobre as retas suportes que contêm DC e AB. Uma conclusão imediata é que ∠DAB e ∠ABC são colaterais internos. Desta observação resulta que ∠DAB e ∠ABC são suplementares, e, em conclusão, ∠DAB e ∠BCD são congruentes.

A proposta de um problema que envolve o desenho de um objeto geométrico parte de questões teóricas atreladas ao objeto, mas a solução representa suposições, pois se trata de um caso particular, um desenho. Laborde e Capponi (1994) distinguem desenho geométrico de objeto geométrico. Para os autores, a passagem do primeiro para o segundo depende das experiências prévias do sujeito, do contexto e do sentido formado. Figura geométrica remete à relação entre objeto geométrico e todas as suas representações possíveis (Laborde, 1998). Dessa forma, podemos definir o desenho de um objeto geométrico como um caso particular cuja representação está associada ao conceito que o sujeito possui da teoria tomada como referência. Quando trabalhamos em AGD, construímos uma figura, e não um desenho.

Figura 2

Exemplificação de visualização na análise de um objeto geométrico.



Outrossim, percebemos que o estudo da Geometria desempenha um papel importante para o desenvolvimento cognitivo (lógico-matemático) e social. Potencializa a imaginação, a intuição e a visualização, o que contribui para a construção e o desenvolvimento conceitual.

A presente pesquisa aborda a visualização como um processo cognitivo importante retroalimentado pelas representações dinâmicas e pelos conceitos e propriedades emergentes na tela de um AGD. Portanto, os conceitos são construídos e ressignificados ao longo do processo interativo estabelecido sujeito(s) e dispositivo, e entre estudantes, professor e as tarefas propostas.

ÂNGULOS ENTRE RETAS, AGD E DMcTT

Valemo-nos da importância da Geometria e destacamos a visualização como habilidade necessária ao desenvolvimento cognitivo e algumas implicações teóricas, didáticas e pedagógicas imbricadas aos processos de construção e desenvolvimento conceitual. Em nossa investigação, por representar uma parte substancial da Geometria Euclidiana, centralizamos no estudo e na análise das relações entre ângulos formados a partir de duas retas paralelas intersectadas por uma transversal.

A Geometria Euclidiana segue uma estrutura composta a partir de entes primitivos, como ponto, reta e plano; axiomas ou postulados, verdades que se estabelecem por si mesmas; e definições. Por meio da combinação desses elementos, lançando mão de uma sequência lógica de raciocínio, constroem-se os teoremas (Kaleff, 1994). Mas para aprender Geometria é necessário seguir essa hierarquização?

Partindo do estudo de retas paralelas cortadas por uma transversal, podem-se abordar teoremas relacionados ao estudo dos triângulos (teorema do ângulo externo[3] e a soma dos ângulos internos[4]) e a relações existentes em alguns quadriláteros, como a relação entre ângulos opostos ou ângulos adjacentes de um paralelogramo[5]; pode-se também utilizar as propriedades como alicerce para abordar outros conceitos, como o teorema de Tales[6] e o aprofundamento do próprio tema, por exemplo, a relação entre os ângulos formados por linhas poligonais entre duas paralelas.

Todavia, não achamos que seguir essa sequência seja uma condição necessária. É possível (re)visitar outros conceitos: de retas concorrentes, ângulos opostos pelo vértice[7], ângulos suplementares[8], bissetriz[9] e a própria ideia de ângulo[10], por exemplo. Em relação à abordagem dessa temática, vale

---

[3] O ângulo externo de um triângulo é igual à soma dos dois outros ângulos internos não adjacentes.

[4] Resulta em dois ângulos retos.

[5] Em todo paralelogramo os ângulos opostos têm a mesma medida, e a soma dos ângulos adjacentes resulta em dois ângulos retos.

[6] De acordo com o Teorema de Tales, duas retas transversais em um feixe de retas paralelas formam segmentos proporcionais. Dessa forma, considerando as retas paralelas, a razão entre dois segmentos quaisquer de uma reta é igual à razão dos segmentos correspondentes da outra.

[7] São ângulos que têm a mesma medida.

[8] Ângulos cuja soma resulta em dois ângulos retos.

[9] Semirreta interna ao ângulo, com origem no vértice e que o divide em dois ângulos de mesma medida.

[10] Objeto geométrico formado pela união de duas semirretas (não colineares) de mesma origem.

destacar que, tradicionalmente, os livros didáticos enfatizam a apresentação de nomenclaturas e a proposta de questões cujo enfoque está muito mais na resolução de equações do que na análise das relações entre os ângulos, apesar da supervalorização de imagens estáticas, sem uma proposta de recursos dinâmicos.

A forma estática como a Geometria é abordada pode ter implicações didáticas e epistemológicas. Fischbein (1993) destaca a importância de explorar aspectos inerentes às propriedades e às definições, em detrimento de se ater apenas à figura durante a realização de tarefas que envolvam problemas geométricos. Dessa forma, parece-nos mais aceitável que o ensino de geometria seja pautado na manipulação, na exploração e, por conseguinte, na descoberta a partir da formulação de conjecturas.

As tecnologias digitais móveis ampliam as possibilidades de trabalho com a Geometria, pois colocam nas mãos dos estudantes o poder experimental-argumentativo, ao desenvolver uma atividade. Desse modo, o cerne pode estar na descoberta ou na compreensão de relações, propriedades e teoremas. Tais argumentos nos direcionam para a relevância da aprendizagem geométrica mediada pelos AGD que, a nosso ver, rompe a lógica euclidiana, por possibilitar uma abordagem descentralizada da hierarquia (conceito-definição-propriedade-prova) e, inclusive, permitir a construção de novos conceitos.

Da mesma maneira que a investigação a respeito do quinto postulado de Euclides [11] possibilitou o descobrimento de outras geometrias, as investigações em um AGD, inicialmente em computadores e recentemente em DMcTT, como *smartphones* e *tablets*, lançam mão de uma geometria, que possibilita a construção de novos conceitos a partir da análise de velhos entes geométricos. Como alega Bairral (2019), diversos tipos de dispositivos geram diferentes *insights* para nossa aprendizagem. A interação com eles possibilita o desenvolvimento ou a criação de conceitos. A esse respeito, o autor esclarece que é possível criar um conceito matemático. Ele usa como exemplo o caso das operações com medidas de ângulos, como graus, minutos e segundos. Diante da possibilidade de um AGD, esse tipo de operação não faz sentido, mas o que se faz necessário é a construção de novas maneiras de explorar as relações entre ângulos e retas, por exemplo (Bairral, 2019). O AGD permite também dar maior

[11] Em uma linguagem mais atual é possível enunciar o quinto postulado da seguinte maneira: em um mesmo plano, por um ponto exterior a uma reta pode-se passar uma única reta paralela à reta dada.

visibilidade ao estudo dos polígonos não convexos e suas relações, algo pouco valorizado nos livros didáticos.

Por acreditarmos no potencial dessa geometria para a construção e o desenvolvimento conceitual, faremos uma pequena explanação de algumas singularidades de um AGD e das particularidades dos AGD em DMcTT. Muitos autores têm destacado as características e as potencialidades de um AGD[12]. Por exemplo, Gravina (2001) alega que tais ambientes oferecem recursos digitais em que é possível a construção de objetos geométricos a partir das propriedades definidoras. Em complemento, Laborde (1998) destaca a ação biunívoca que a experimentação com um AGD proporciona. Ao variar os elementos de um objeto geométrico, o sujeito obtém o *feedback* do aplicativo, pois esse recurso permite a retroação para elaboração de conjecturas, algo que não acontece em uma dinâmica com lápis e papel.

Também Arzarello et al. (2002) destacam a possibilidade de experimentações variadas na construção em um AGD, que, além de permitir uma visão mais ampla de um mesmo objeto, pode contribuir para o processo de prova de uma conjectura, por dar ao usuário a possibilidade de explicá-la, a fim de identificar propriedades. Os autores também argumentam que os estudantes se apropriam das diferentes modalidades de manuseio (arrastamento) com finalidades distintas, como explorar, formular e validar conjecturas.

Pode-se, por meio do próprio GeoGebra, explorar a validade das relações e dos teoremas. Além do mais, na verificação em um AGD é possível suscitar no aprendiz uma nova curiosidade, questionando-o a respeito da validade de um resultado e desafiando-o a outras funções desempenhadas pela demonstração: explicação, descoberta, verificação, desafio intelectual e sistematização (De Villiers, 2001).

Laborde e Capponi (1994) ressaltam que os conhecimentos matemáticos apresentados em um AGD, em função das limitações do *software* ou do dispositivo, têm um funcionamento peculiar e, em alguns casos, distintos daquele conhecimento utilizado como referência. Em relação a esse fato, exemplificaremos. É recorrente, em análises envolvendo ângulos colaterais internos, os estudantes apresentarem dificuldades em supor a relação matemática envolvida (ângulos suplementares), no caso de uma análise

---

[12] As características que apresentamos são universais, contempladas por boa parte dos AGD, tanto nas versões *desktop* quanto para DMcTT (*tablet* ou *smartphone*). Contudo, nossa análise está voltada para o aplicativo GeoGebra na versão geometria para *smartphones*.

aritmética, dada uma particularidade e limitação do GeoGebra quanto ao número de casas decimais, o que impossibilita, com frequência, que a soma dos ângulos seja dois ângulos retos.

Além dessas características, em um AGD é possível transitar entre o particular e o geral, pois ele permite construir uma classe de figuras (Arzarello et al., 2002). Vale destacar também que em um AGD, uma vez que as construções não são estáticas, há novas alternativas diante de um objeto geométrico, como modificar ou arrastar, o que pode enriquecer o processo de elaboração e manipulação de uma imagem mental e, por conseguinte, contribuir para o desenvolvimento da visualização (Henrique, 2017).

Destacamos apenas algumas características do AGD em ambientes informatizados e, embora elas sejam universais, tocar em uma tela é diferente de clicar com o mouse? De acordo com Bairral (2020), as manipulações *touchscreen* estabelecem e inauguram um campo de manifestação da linguagem e da cognição. Os movimentos dos dedos e das mãos compõem e moldam o nosso pensamento. O autor destaca que, embora alguns toques se assemelhem a ações realizadas aos movimentos de clique ou arrasto realizadas em um AGD, em *desktop*, eles possuem diferenças em termos de orientação. Enquanto por meio do clique a ação é mediada por uma ferramenta, no DMcTT a ação se dá a partir de um ato contínuo, aproximando objeto-sujeito.

As manipulações em tela constituem diferentes tipos de toques, tais como: toque simples, duplo, pressionar, deslizar, mover, ampliar, reduzir etc. Tocar em uma tela *touchscreen* e clicar em um mouse são ações distintas, pois cada uma remete a uma percepção sensorial. A manipulação em tela constitui uma forma de linguagem, com particularidades e implicações no pensamento, pois, assim como os gestos, representa formas de materialização do pensamento no ato comunicativo. Por outro lado, se alguns gestos podem ocorrer de forma espontânea, sem uma intencionalidade aparente, as manipulações em tela são movimentos específicos, situados e intencionais, complementa o estudioso (Bairral, 2017).

Durante a manipulação de um objeto na tela de um DMcTT, executamos um conjunto de movimentos, alguns relacionados a conceitos matemáticos específicos, como, por exemplo, a ampliação ou redução de uma figura. Arrastar, por meio do clique, um dos vértices da figura ou valer-se do toque "esticando" a diagonal com o uso de dois dedos são ações distintas epistemologicamente, ainda que ambas envolvam o método da diagonal. (Bairral et al., 2017).

Arzarello et al. (2014) identificaram dois domínios de manipulação nos processos cognitivos que se articulam durante a ação: o construtivo e o relacional. Enquanto o âmbito construtivo envolve ações básicas, geralmente atreladas às construções e à reorganização do objeto geométrico, o relacional tem um cunho mais conjectural, com a intenção de análise, e envolve outros elementos exteriores, como as interações e a argumentação. No movimento constante do raciocínio geométrico nesses dois campos, processos como visualização, representação e conceituação se desenvolvem.

As especificidades de um AGD que apresentamos representam contribuições aos processos de ensino e aprendizagem de Geometria, e entender que a ação de tocar na tela é diferente de clicar com *mouse* implica olhar os AGD em DMcTT sob um novo prisma, além de possibilitar a análise de como acontece o processo de desenvolvimento conceitual a partir do aplicativo GeoGebra. Nossa hipótese é que, na realização de uma atividade, a mediação a partir da análise de um objeto geométrico em um AGD por meio de manipulações em tela evidencia a emergência de propriedades, intensificando o desenvolvimento da visualização, pois os sujeitos constroem, modificam, (re)criam, compartilham toques e ideias, em uma ação mútua, tudo isso como uma extensão do pensamento no ato de tocar na tela. Dessa maneira, dialogam, argumentam e compartilham ideias, o que pode potencializar a construção e o desenvolvimento conceitual.

Discorremos até aqui, entre outros tópicos, a respeito do papel da visualização, habilidade cognitiva essencial para a vida cotidiana e intrínseca aos processos de raciocínio matemático, de representação e de construção e desenvolvimento conceitual. Evidenciamos a importância do estudo das relações entre ângulos e retas e apontamos que os AGD proporcionam uma nova Geometria. Destacamos também como os AGD em DMcTT se diferenciam daqueles em ambientes informatizados e de que maneira a visualização e a conceituação podem caminhar juntas. Na seção a seguir apresentamos um episódio de ensino no qual duas duplas de estudantes interagiram, manipularam no/com DMcTT, visualizaram e intuíram relações entre ângulos e retas na tela do *smartphone* por meio do aplicativo GeoGebra[13].

[13] Versão Geometria – 5.0.485.0. Disponível em: https://www.geogebra.org/download. *Link* testado em 28 de fev. 2022.

EPISÓDIOS DE ENSINO

A situação pedagógica que selecionamos compõe um estudo mais amplo (Henrique, 2021)[14], em que a abordagem metodológica adotada foi a dos experimentos de ensino (Cobb et al., 2003), metodologia de investigação capaz de lidar com a gama de elementos, complexos, em práticas de ensino. Esta abordagem envolve uma forma particular de aprendizado e um estudo sistemático, o que pode potencializar o aprendizado dentro de determinados contextos, na qual uma variedade de recursos (artefatos) é utilizada como suporte.

O objetivo centrou-se na análise e na identificação, por meio do aplicativo GeoGebra em *smartphones,* das relações entre retas e ângulos – particularmente em retas paralelas cortadas por uma transversal –, por estudantes do 8.º ano do Ensino Fundamental de um colégio da rede pública estadual do Rio de Janeiro, localizado no município de Resende.

O estudo foi realizado durante o primeiro semestre de 2018 e contou com os seguintes procedimentos para coleta dos dados: (a) gravação de áudio e vídeo, (b) captura de tela das manipulações em tela dos *smartphones* utilizados pelos estudantes, (c) respostas escritas das folhas de atividades e (d) notas do pesquisador. Em síntese, a tarefa proposta apresenta os seguintes enunciados, de acordo com a Figura 3.

Figura 3

Síntese das tarefas. (Henrique, 2021)

Tarefa do protocolo 2
2.1. Meçam os ângulos que estão do mesmo lado da transversal. Façam esse procedimento para todas as combinações possíveis (os ângulos que estão do lado de fora das paralelas, os que estão entre as paralelas etc.). Existem relações entre os ângulos? Se sim, quais? **2.2.** Meçam um ângulo de cada lado em relação à reta transversal. É possível estabelecer alguma relação entre os ângulos? Expliquem.

[14] A investigação integra o projeto de pesquisa "Construindo e analisando práticas educativas em educação matemática com dispositivos *touchscreen*", financiado pelo CNPq, e aprovado na Comissão de Ética na Pesquisa da UFRRJ sob o parecer de número 604/2015.

2.3. Investiguem outras relações entre os pares de ângulos que podem ser formados. Como sempre, registrem suas observações e, se necessário, façam um desenho para esclarecer suas descobertas.

Para análise dessa atividade selecionamos eventos de um vídeo[15] de 17 minutos e 46 segundos obtido a partir da telagravação[16] (Bairral et al., 2022) do *smartphone* utilizado pelos estudantes GD (12 anos) e MV (13 anos). A análise buscou elementos nos toques e nos discursos dos sujeitos (escritas, áudios, construções em tela etc.) que nos possibilitaram investigar como ocorrem os processos de construções e movimentos na tela, e o de desenvolvimento dos conceitos trabalhados[17].

RESULTADOS: DE CONCEITOS ISOLADOS A OLHARES E MOVIMENTOS ARTICULADOS

A Figura 4 apresenta a transcrição do áudio e os objetos de análises de um excerto do vídeo em que os estudantes discutem a respeito da relação entre ângulos que estão do mesmo lado da transversal (correspondentes e colaterais) e as propriedades envolvidas (congruentes ou suplementares). Vejamos os registros obtidos dessa ação.

Figura 4

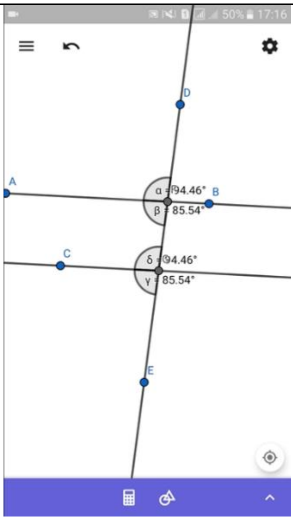
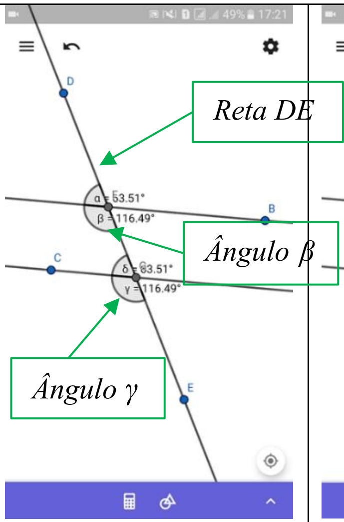
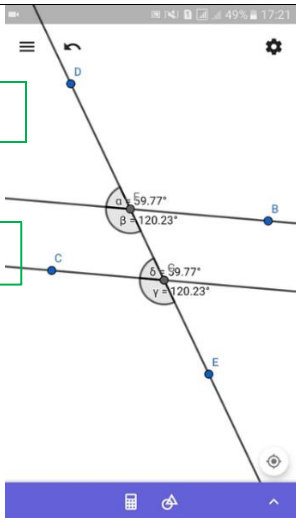
Ações dos estudantes G.D. e M.V. no estudo de ângulos correspondentes.

Descrição
G.D. e M.V. manipulando e dialogando acerca da posição dos ângulos.

[15] Refere-se à gravação em vídeo (convencional) com áudio a partir da captura das manipulações externas, com uma câmera focando os movimentos e os gestos das mãos dos sujeitos ao tocarem a tela.

[16] Captura os toques diretos na tela do dispositivo por meio do aplicativo *MyAppSharer*.

[17] Veja em Henrique e Bairral (2020) uma análise ressaltando a importância das metáforas.

Printscreen		
		
Instante 00:14:53	Instante: 00:16:25	Instante: 00:16:53

Transcrição
<u>0:14:53</u> – M.V.: O que esses aqui têm igual, pô?
G.D.: Esse aqui?
M.V.: É!
M.V.: Que eles estão do lado de fora, pô! Acho que é isso.
G.D.: Eles são da mesma reta.
M.V.: É, pô ... isso é uma relação entre eles, cara. Eles estão na mesma reta. (Há um breve momento de silêncio).
G.D.: Então eles estão na mesma reta e ... (trecho inaudível) na reta transversal. (Há um momento de silêncio, na sequência a dupla move a construção).
G.D.: Congruente é tipo assim: quando você mexe é a mesma coisa?
<u>00:16:25</u> – M.V.: É mesma coisa. Tipo... (o discente move a reta DE) ó, tá ligado no D e E (pontos D e E, que representam, segundo o discente, o ângulo β).
M.V.: Aqui... é desse lado, essa parte esquerda. Ó ... aqui é cento e dezesseis ponto quarenta e nove e aqui é cento e dezesseis ponto quarenta e nove, não

muda, ó (Mostrando sua relação com o ângulo correspondente γ. Na sequência, o estudante modifica a construção a fim de enfatizar sua observação).

M.V.: São iguais, não mudam: cento e onze e cento e onze.

G.D.: Ah, sim!

M.V.: Não muda.

G.D.: Mas essa aqui é a transversal, né?

M.V.: Oi?

G.D.: É a transversal que está movendo, né? (Destacando a manipulação realizada por M.V.).

G. D.: Então a gente pode colocar assim, ó: ... (se referindo ao que deveria ser escrito na tarefa).

00:16:53 – M.V.: Eles são ângulos congruentes, só isso. (referindo-se aos correspondentes).

Por meio da telagravação, observamos que os aprendizes estabeleceram a relação entre ângulos correspondentes a partir da congruência, fato contemplado pelas negociações e pelos toques (Instante 00:16:25, por exemplo, ângulo $\beta = 116.49°$ e ângulo $\gamma = 116.49°$). Identificamos que os toques se articulam em domínios construtivos e relacionais (Arzarello et al., 2014), pois os discentes formularam uma conjectura a partir do manuseio do objeto no AGD, e ela é verificada e refinada por eles (*Ó ... aqui é cento e dezesseis ponto quarenta e nove e aqui é cento e dezesseis ponto quarenta e nove, não muda, ó*). O fragmento da Figura 4.1 sintetiza esse momento reflexivo da dupla.

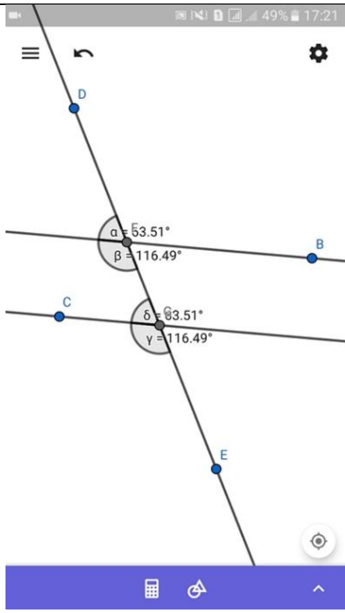
Além do entendimento conceitual articulado, a transcrição da Figura 4.1 também evidencia a ideia de referência emergindo no raciocínio dos alunos, ou seja, quais elementos eles estão considerando em sua análise, tempo momento a momento e os ângulos.

Nessa nova empreitada, os estudantes analisaram ângulos colaterais internos, como mostram os registros a seguir. Nos excertos os discentes discutem sobre a relação entre ângulos que estão do mesmo lado da transversal (correspondentes e colaterais) e as propriedades envolvidas (congruentes ou suplementares). Na Figura 5 apresentamos os registros obtidos dessa ação.

O exame do trecho nos possibilitou verificar que a dupla usou o toque de arrasto com uma dupla função: construtivo e relacional. A primeira função teve como objetivo facilitar a análise, para isso eles permutaram as retas CG e AB (Instante: 00:16:53 → Instante: 00:17:15), o que fez com que ficassem na tela apenas as retas e os ângulos colaterais internos (Instante 00:17:15, ângulos α e γ), e deslocaram a reta CG em direção à reta AB, aproximando os ângulos α e γ. O movimento de arrastar a ação gerou uma nova construção na qual estavam apenas os objetos de análise. Dessa maneira, na segunda função atribuída ao movimento de arrastar, os estudantes formularam uma conjectura acerca da relação entre os ângulos α e γ (ângulos suplementares, Instante 00:17:29).

Figura 4.1

Síntese a partir da Figura 4.

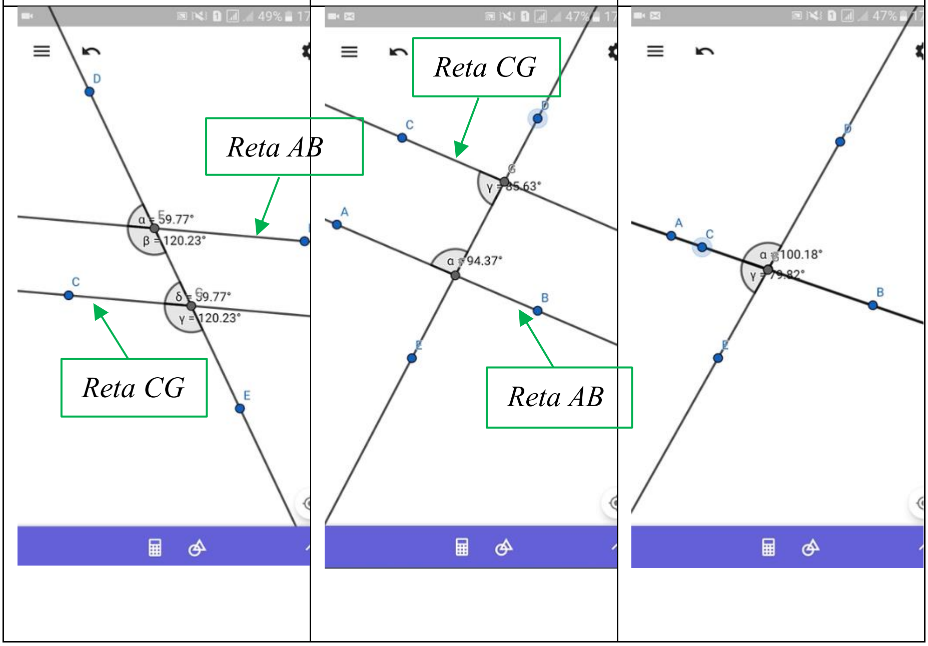
Transcrição	Descrição	***Printscreen***
G.D.: Congruente é tipo assim: quando *você mexe é a mesma coisa*? 00:16:25 – M.V.: É mesma coisa. Tipo... (o discente move a reta DE) ó, tá ligado no D e E (pontos D e E, que representam, segundo o discente, o ângulo β). M.V.: Aqui... *é desse lado, essa parte esquerda*. Ó ... aqui é cento e dezesseis ponto quarenta e nove e aqui é cento e	congruência de angulos a movimentação da reta DE e a alteração de ângulos colaterais externos a correspondência e a congruência de ângulos, e o lado esquerdo como referência	

dezesseis ponto quarenta e nove, não muda, ó (Mostrando sua relação com o ângulo correspondente γ. Na sequência, o estudante modifica a construção a fim de enfatizar sua observação).		

Figura 5

Ações dos estudantes na análise de ângulos colaterais internos.

Printscreen		
Instante: 00:16:25	Instante: 00:17:15	Instante: 00:17:29



Descrição
Estdantes GD e MV manipulando e visualizando as relações entre os ângulos

Os discentes poderiam ter estabelecido uma conjectura por meio de uma análise aritmética, adicionando os ângulos α e γ no próprio campo "Entrada" do aplicativo GeoGebra. O que não sabemos é se esse processo conduziria os estudantes à elaboração conceitual, pois, como já destacamos, nesse tipo de operação, dada uma particularidade do aplicativo – número restrito de casas decimais –, a soma se aproxima de 180º. Todavia, observamos que os alunos se apropriaram de uma particularidade de um DMcTT, no qual a ação de arrastar traz imbricadas finalidades distintas, tais como formular e validar conjecturas, para estabelecer uma relação entre os ângulos α e γ, transladando a reta CG, sobrepondo-a sobre AB, fazendo-os ficar suplementares, ou seja, eles instituíram uma conjectura visual para ajustar ao seu propósito, que é um tipo de raciocínio no âmbito relacional (Bairral et al., 2017).

O excerto do episódio nos permitiu identificar as estratégias elaboradas pelos estudantes, as manipulações se articulando entre os domínios constitutivo e relacional (Arzarello et al., 2014). A ação dos discentes de transladar uma das retas no objeto de análise com intuito de confirmar que a soma dos ângulos α e γ resulta em dois ângulos retos sugere a presença da intuição (Leivas, 2009) como um elemento do raciocínio matemático e revela que a visualização foi potencializada pelos toques na tela do *smartphone*, intensificando o desenvolvimento do conceito de ângulos colaterais internos.

Desse evento, tiramos conclusões acerca da visualização potencializada pelos toques correlacionados na construção e do desenvolvimento conceitual. Neste caso, a manipulação da imagem mental envolveu a representação do conceito (Zimmermann & Cunningham, 1991). Vale complementar que a composição dos toques inclui a visualização e as representações gráficas (construções na tela e seus movimentos), elementos que caracterizam modos de raciocinar em DMcTT.

CONCLUSÃO

Discorremos sobre a importância da visualização, da representação e da conceituação – processos imbricados no aprendizado com AGD.

Evidenciamos a importância do estudo das relações entre ângulos e retas e o papel de uma outra geometria proporcionada pelos AGD, bem como algumas características e singularidades desses ambientes.

Os DMcTT representam uma extensão dos nossos corpos (Bairral, 2020) e, em certa medida, a ação de tocar na tela influencia as imagens conceituais que elaboramos, pois há singularidades em termos sensorial e motor, nas quais a ação referida influencia a percepção visual. A visualização é potencializada pelos toques na tela, bem como a construção e o desenvolvimento conceitual atrelado a este processo. Neste âmago, a conceituação e a visualização geométrica podem se relacionar no surgimento e na identificação de relações matemáticas por meio de atividades em um AGD com DMcTT, pois a elaboração conceitual e a visualização de construções na tela demandam tarefas que permitam a experiência continuada e de modos diversos com o(s) objeto(a) em análise.

A abordagem de conceitos matemáticos mediante os toques pode romper a hierarquia estabelecida na Geometria euclidiana (axioma/definição/propriedades) e evidencia a relevância da aprendizagem geométrica mediada por um AGD em DMcTT a partir da emergência de conceitos e propriedades potencializados pela visualização de formas não estáticas. Com isso, defendemos que esses dispositivos possibilitam a criação de uma organização curricular mais fluida e articulada dos conceitos geométricos e que, inclusive, as atividades permitem a emergência de novos conceitos.

Conforme exemplificado nos dados a partir das manipulações de G.D. e M.V., o trabalho com retas e ângulos em manipulações *touchscreen* para formulação de conjecturas permitiu identificar o surgimento de um novo conceito no estudo de relações e propriedades entre retas paralelas, transversais e ângulos formados: o conceito de referência. A emergência desse conceito é fruto da dinâmica de movimentos simultâneos de objetos na tela. Com a multiplicidade de movimentos síncronos, o exame da construção de uma conjectura (e sua validação ou refutação) acontece, ao ter como referência o ente matemático a ser considerado, que pode ser reta ou ângulo. Ou seja, que retas e ângulos são considerados? Cabem, portanto, estudos posteriores que foquem análise do conceito de referência.

DECLARAÇÕES DE CONTRIBUIÇÃO DOS AUTORES

MPH e MAB conceberam a ideia apresentada. MPH realizou a pesquisa de campo, coletou os dados e realizou as análises sob a supervisão de MAB. Ambos participaram ativamente na discussão dos resultados, revisaram e aprimoraram a versão final do trabalho.

DECLARAÇÃO DE DISPONIBILIDADE DOS DADOS

Os dados que suportam os resultados deste estudo serão disponibilizados pelo autor correspondente, MPH, mediante solicitação razoável.

REFERÊNCIAS

Alexander, D. C. & Koeberlein, G. M. (2013). *Geometría* (Mtro. Javier León Cárdenas, Trad., 5.ª ed.). Facultad de Ingeniería Universidad La Salle.

Almeida, T. & Lomônaco, J. F. B. (2018). *O conceito de amor: um estudo exploratório com participantes brasileiros*. Pedro & João editores.

Arzarello, F., Bairral, M., & Dané, C. (2014). Moving from dragging to touchscreen: geometrical learning with geometric dynamic software. *Teaching Mathematics and its Applications*, *33*(1), 39-51.

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., & Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *ZDM*, *34*(3), 66-72.

Bairral, M., Arzarello, F., & Assis, A. (2017). Domains of manipulation in touchscreen devices and some didactic, cognitive and epistemological implications for improving geometric thinking. In G. Aldon, F. Hitt, L. Bazzini, & U. Gellert (Eds.), *Mathematics and technology: a CIEAEM source book* (pp. 113-142). Springer.

Bairral, M., Henrique, M. P., & Assis, A. (2022). Moving parallel and transversal lines with touches on smartphones: A look through screenrecording. *The Mathematics Enthusiast*, *19*(1), 114-135.

Bairral, M. A. (2017). As manipulações em tela compondo a dimensão corporificada da cognição matemática. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática* (*JIEEM*), *10*(2), 104 - 111.

Bairral, M. A. (2019). Dimensions to be considered in teaching, learning and research with mobile devices with touchscreen. *Acta Scientiae*, *2*(21), 93-109.

Bairral, M. A. (2020). Not only what is written counts! Touchscreen enhancing our cognition and language. *Global Journal of Human-Social Science*, 20(5), 1-10.

Bairral, M. A. & Henrique, M. P. (Eds.). (2021). *Smartphones com toques da Educação Matemática: Mãos que pensam, inovam, ensinam, aprendem e pesquisam*. CRV.

Cobb, P., Confrey, J. DiSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiment in educational research. *Educational Researcher, 32*(1), 9-13.

De Villiers, M. (2001, março/abril). Papel e funções da demonstração no trabalho com o Sketchpad. *Educação e Matemática*, *62*, 31-36.

Ferreira, M. L. A. C. (1963). *Formação e desenvolvimentos de conceitos*. Instituto de Educação/Pabaee.

Fischbein, I. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, *24*, 139-162.

Gravina, M. A. (2001). *Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo*. Tese de Doutorado em Informática na Educação, Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

Gutierrez, A. (1991). Procesos y habilidades en visualización espacial. *Memorias del Tercer Congreso Internacional sobre investigación en educación Matemática*.

Henrique, M. P. (2017). *GeoGebra no clique e na palma das mãos: contribuições de uma dinâmica de aula para construção de conceitos geométricos com alunos do Ensino Fundamental*. Dissertação de Mestrado em Educação em Ciências e Matemática. Instituto de Educação, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro Seropédica / Nova Iguaçu, RJ.

Henrique, M. P. (2021). *Metáforas e toques em tela: potencializando aprendizagens discentes no estudo de retas paralelas e transversais.* Tese de Doutorado em Educação, Contextos Contemporâneos e Demandas Populares. Instituto de Educação / Instituto

Multidisciplinar, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica / Nova Iguaçu, RJ.

Henrique, M. P. & Bairral, M. A. (2020). Tecnologias digitais móveis e metáforas: campos que se encontram em conceitos geométricos. Revisem, 5(1), 46-70. https://doi.org/10.34179/revisem.v5i1.12349

Hershkowitz, H. (1994). Ensino e aprendizagem da Geometria. *Boletim Gepem*, *32*.

Kaleff, A. M. M. R. (1994). Tomando o ensino da Geometria em nossas mãos. *Educação Matemática em Revista*. Sociedade Brasileira de Educação Matemática, *2*, 19-25.

Laborde, C. (1998). Cabri-geómetra o una nueva relación con la geometría. In L. Puig (Ed.), *Investigar y enseñar. Variedades de la Educación matemática*. Iberoamérica.

Laborde, C. & Capponi, B. (1994). Aprender a ver e a manipular o objeto geométrico além do traçado no Cabri-Géomètre. *Em Aberto*, *14*(62), 51-62.

LakofF, G. & Johnson, M. (2001). *Metaforas de la vida cotidiana* (5.ª ed.). Catedra.

Leivas, J. C. P. (2009). *Imaginação, intuição e visualização: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de matemática* (294 f.). Tese de Doutorado em Educação, Universidade Federal do Paraná, Curitiba.

Medin, D. 1(989). Concepts and conceptual structure. *American Psychologist*, *44*(12), 1469-1481.

Nacarato, A. M. & Passos, C. L. B. (2003). *A geometria nas séries iniciais: Uma análise sob a perspectiva da prática pedagógica e da formação de professores*. EdUFSCar.

Oliveira, M. B. & Oliveira, M. K. (1999). *Investigações cognitivas: Conceitos, linguagem e cultura.* ArtMed.

Presmeg, N. C. (1986). Visualization in high school mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *6*(3), 42-46.

Rosch, E. (1999). Reclaiming concepts. *Journal of Consciousness Studies, 6*(11-12), 61-77.

Wolf, M. (2019). *O cérebro no mundo digital: os desafios da leitura na nossa era*. Contexto.

Zimmermann, W. & Cunningham, S. (1991). |Introduction: What is mathematical visualization? *In* W. Zimmermann, & S. Cunningham (Eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics* (pp. 1-7).