ISSN: 2178-7727
DOI: 10.17648/acta.scientiae.7011

Contribuições da Modelagem Matemática para a aprendizagem de Equações Diferenciais no contexto do Ensino Remoto

Aldo Peres Campos e Lopes [a]
Frederico da Silva Reis [b]

[a] Universidade Federal de Itajubá, Instituto de Ciências Puras e Aplicadas, Itabira, MG, Brasil
[b] Universidade Federal de Ouro Preto, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Ouro Preto, MG, Brasil

Recebido para publicação 21 fev. 2022. Aceito após revisão 7 abr. 2022
Editora designada: Claudia Lisete Oliveira Groenwald

RESUMO

Contexto: O estudo do emprego da Modelagem Matemática como uma alternativa pedagógica tem sido um tema emergente de pesquisa e está diretamente associado à importância de se melhorar o ensino e o aprendizado da Matemática e o desenvolvimento de habilidades. Porém, poucas pesquisas em Educação Matemática têm se dedicado a investigar o uso da Modelagem na disciplina Equações Diferenciais e no contexto pandêmico. **Objetivos**: Identificar e analisar as possíveis contribuições das atividades de Modelagem Matemática, nos aspectos referentes à aprendizagem e ao desenvolvimento da criticidade de alunos de Engenharia. **Design**: Pesquisa qualitativa em seus pressupostos metodológicos, desenhada a partir da elaboração, realização e avaliação de 4 atividades de Modelagem Matemática envolvendo Equações Diferenciais Ordinárias de 1ª e 2ª ordens. **Ambiente e participantes**: As atividades foram realizadas com 117 alunos de 9 cursos de Engenharia de uma universidade federal do interior de Minas Gerais, matriculados na disciplina Equações Diferenciais I, no 1º semestre de 2020. **Coleta e análise de dados**: Os dados foram coletados por meio das atividades realizadas, da gravação das aulas ministradas de forma remota e de questionários de avaliação, sendo analisados por meio de uma categorização feita a partir do confronto com o referencial teórico que fundamentou a pesquisa. **Resultados**: Os resultados possibilitam afirmar que as atividades de Modelagem Matemática conduzidas configuram ricas oportunidades de motivação e aprendizagem por parte dos alunos, permitindo uma exploração diferenciada das aplicações dos conteúdos matemáticos envolvidos e colaboraram para uma interpretação crítica da realidade, ainda que de forma incipiente. **Conclusões**: A partir da pesquisa realizada, podemos concluir destacando a importância das pesquisas

Corresponding author: Aldo Peres Campos e Lopes. Email: aldolopes@unifei.edu.br

vigentes e futuras em Educação Matemática no Ensino Superior apontarem para um ensino de Equações Diferenciais que rompa com o tradicional modelo dos formulários e métodos de resolução.

Palavras-chave: Modelagem Matemática; Equações Diferenciais; Ensino Remoto; Cursos de Engenharia.

Contributions of Mathematical Modeling for learning Differential Equations in the remote teaching context

ABSTRACT

Background: The study of the use of Mathematical Modeling as a pedagogical alternative has been an emerging research topic and it is directly linked to the importance of improving the teaching and learning of Mathematics and the development of skills. However, few researches in Mathematics Education have been dedicated to investigating the use of Modeling in the Differential Equations course and in the pandemic context. **Objectives**: Identify and analyze the possible contributions of Mathematical Modeling activities, in the aspects related to learning and the development of criticality in Engineering students. **Design**: The research is qualitative in its methodological assumptions, designed from the development, execution, and assessment of 4 Mathematical Modeling activities involving 1st and 2nd order Ordinary Differential Equations. **Setting and participants**: The activities were carried out with 117 undergrad students from 9 Engineering degrees at a federal university in the hinterland of the state of Minas Gerais (Brazil), enrolled in the Differential Equations I course, in the 1st semester of 2020. **Data collection and analysis**: Data were collected through the activities carried out, the recording of classes taught remotely and assessment questionnaires, being analyzed through a categorization made from the confrontation with the theoretical framework that underpinned the research. **Results**: The results make it possible to state that the Mathematical Modeling activities carried out are rich opportunities for motivation and learning for students, allowing for a differentiated exploration of the applications of the mathematical contents involved, contributing to a critical interpretation of reality, albeit in an incipient way. **Conclusions**: Based on the research carried out, we can conclude by highlight ting the importance of current and future research in Mathematics Education in Higher Education pointing to a teaching of Differential Equations that breaks with the traditional model of formula tables and methods of resolution.

Keywords: Mathematical Modeling; Differential Equations; Remote Teaching; Engineering Courses.

INTRODUÇÃO

As Equações Diferenciais (ED) podem ser concebidas como um tema / conteúdo integrante do Cálculo Diferencial e Integral. Observando algumas estruturas curriculares de cursos do Ensino Superior brasileiro, em alguns casos, as Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) compõem a ementa de disciplinas de Cálculo (em geral, Cálculo II, III ou IV) e, em outros casos, existem disciplinas específicas de ED.

Algumas pesquisas (Oliveira & Igliori, 2013) mostram que o ensino introdutório das ED possui características que também são verificadas no ensino de Cálculo (Reis et al., 2019; Lopes & Reis, 2019). Tal ensino tem ocorrido, de forma geral, por meio de dois “modelos” possíveis: um modelo que, em certo sentido, podemos comparar a um “receituário” e outro modelo que, em certa medida, podemos associar às aplicações extra matemáticas.

O primeiro modelo busca desenvolver a disciplina seguindo a tradicional sequência de apresentação das EDO por meio de algoritmos e fórmulas, que assim funcionam como “receitas” para sua resolução. Nesse modelo, não se torna prioritário, por exemplo, apresentar de forma aprofundada as diversas aplicações das EDO em outras áreas das ciências ou, ao menos, nas ciências exatas, especialmente em cursos de Engenharia.

O segundo modelo exige muito mais “dedicação” do professor pois, além dos métodos de resolução, ganham prioridade as aplicações das EDO por meio de uma apresentação direta pelo professor ou por meio de metodologias que permitam tal foco para o ensino. Nesse sentido, pode-se contemplar desde a modelagem até a utilização de tecnologias e, dessa forma, conferir aos alunos uma participação mais ativa na construção de seus conhecimentos.

O fato é que, a opção por um ou outro modelo tem relação direta com a questão da aprendizagem dos alunos, como demonstram Oliveira e Igliori (2013). As autoras fizeram um levantamento bibliográfico como forma de avaliar o que as pesquisas na área de Educação Matemática apontam sobre os problemas na aprendizagem de ED e o que elas propõem como possibilidades para um ensino que busque atenuar as dificuldades. Elas destacaram que o ensino das ED prioriza as resoluções analíticas e as manipulações algébricas envolvidas. Também foram destacadas as dificuldades dos alunos em conteúdos anteriores, por exemplo, de conceitos do Cálculo Diferencial Integral ou mesmo da Matemática Básica. As dificuldades também foram associadas às aplicações em situações-problema contextualizadas. A fim de atenuar essas dificuldades, a maior parte dos trabalhos analisados propõe um enfoque qualitativo e contextualizado das ED, por meio de situações-problema, que visem podem trazer contribuições à aprendizagem, especialmente, se associadas à futura área de atuação dos alunos, conferindo a eles uma maior motivação ao aprender. Dessa forma, Oliveira e Igliori (2013) apontam um cenário ideal para o ensino de ED, capaz de proporcionar um enfoque balanceado entre o tratamento analítico, gráfico e numérico, com o uso de recursos computacionais que auxiliem na aprendizagem dos alunos.

Outras pesquisas abordam o ensino de ED para cursos de Engenharia, destacando a importância do trabalho a partir de situações-problema contextualizadas ou da análise de fenômenos físicos (Dullius, 2009; Buéri, 2019) ou, ainda, com a utilização da Modelagem Matemática sob diferentes perspectivas (Fecchio, 2011; Lopes, 2021). Tais pesquisas foram realizadas sob diferentes aportes teóricos e com diferentes focos investigativos, e apontam, no ensino de ED, a prevalência dos métodos analíticos de resolução em comparação com a exploração de interpretações gráficas, e destacam ainda, a relutância, por parte dos alunos, quanto a um tratamento mais qualitativo das ED e o raro uso de recursos tecnológicos. Entretanto, todos os pesquisadores destacaram a importância de um ensino de ED a partir da contextualização / modelação de situações-problema e/ou fenômenos naturais para o caráter formativo dos alunos, para além da motivação para a aprendizagem.

Nesse contexto, o presente artigo apresenta uma pesquisa realizada na perspectiva de um ensino de ED que vai além da tradicional apresentação dos métodos de resolução e prime por ressaltar a importância das aplicações para a ressignificação dos conceitos relacionados às EDO, apontando para a Modelagem Matemática como uma alternativa metodológica capaz de proporcionar uma combinação de conhecimentos aliados a habilidades e competências ligadas ao cotidiano dos alunos de Engenharia.

ESTABELECENDO UMA PERSPECTIVA DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Biembengut (2016) utiliza o termo “Modelação” para se referir à Modelagem na Educação, que usa o cerne do processo de Modelagem no ensino e na aprendizagem. Segundo a pesquisadora:

> A Modelação é um método de ensino com pesquisa nos limites e espaços escolares, em qualquer disciplina e fase de escolaridade: dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental aos finais do Ensino Superior e, ainda, em cursos de formação continuada ou disciplina de Pós-Graduação. (Biembengut, 2016, p. 177)

Para Biembengut (2016), no Ensino Superior podemos fazer uso da modelação física e/ou simbólica. A decisão de qual Modelação escolher depende de alguns fatores como: quantidades de alunos em uma sala, conteúdo da disciplina e experiência dos alunos com a Modelação.

Essa perspectiva de Modelagem é uma entre diversas outras. As perspectivas de Modelagem Matemática "têm em comum, entre seus objetivos a utilização da matemática para o estudo de problemas ou situações reais" (Araújo, 2002, p. 31).

Biembengut (2016) utiliza de três etapas na Modelagem para a Modelação: 1) Percepção e apreensão; 2) Compreensão e explicitação; 3) Significação e expressão. Para cada etapa, são feitas subdivisões para melhor compreensão da Modelação. A pesquisadora também salienta a necessidade de sabermos "como, quando e quanto abordar cada conteúdo, integrar os conteúdos com um fim" (Biembengut, 2016, p. 209). Não deixando de considerar problemas de interesse dos alunos, essa abordagem de Biembengut (2016) auxilia uma melhor compreensão dos conteúdos abordados e, geralmente, um primeiro passo à pesquisa.

Conforme detalharemos mais adiante, faremos uma subdivisão das etapas de Modelagem (que denominaremos "Passos") para melhor compreensão dos alunos.

Destacamos também a pesquisa de Klüber (2012), que analisou autores nacionais que possuem uma forte atuação no campo de Modelagem Matemática na Educação Matemática. Ele concluiu que:

> Modelagem Matemática se mostra de maneira multifacetada por conta dos pressupostos teóricos assumidos em termos de Conhecimento, Ciência, Matemática e Educação Matemática. A pluralidade dessas concepções, por vezes contraditórias entre os autores, indica a permanência da busca por

compreender a Modelagem Matemática para além dessas particularidades. (Klüber, 2012, p. 13)

Tal conclusão nos mostra que, a partir dessa pluralidade de concepções da Modelagem Matemática, devemos adotar uma concepção de Modelagem para nos guiar na realização de uma pesquisa. Reafirmamos, então, nossa opção pela concepção de Modelagem Matemática trazida por Bassanezi (2002) e concebida na perspectiva educacional por Biembengut (2016).

Cabe ainda destacar que a etapa da significação e expressão anteriormente destacada é, para Bassanezi (2002), a expressão da situação real estudada utilizando uma linguagem sucinta e simbólica. No contexto do ensino de ED, Burghes e Borrie (1981) acrescentam que as soluções devem direcionar a uma compreensão do problema real, podendo levar a previsões e/ou tomadas de decisão. Dessa forma, o ensino de ED não estará centrado em fórmulas, técnicas e manipulações algébricas, mas também no entendimento do problema real considerado.

Finalmente, os autores mencionados destacam que, caso não haja essa "ligação com a realidade", uma atividade realizada pode deixar de se caracterizar como uma modelagem, além de prejudicar a percepção pelos alunos do papel da Matemática em resolver problemas reais, sejam eles industriais / empresariais ou do cotidiano.

CONTEXTUALIZANDO A PESQUISA

A pesquisa foi realizada no 1º semestre letivo de 2020, no último mês de aulas (junho), com alunos da disciplina de Equações Diferenciais I, ministrada pelo 1º autor deste artigo, que integra a estrutura curricular do 3º período dos 9 cursos de Engenharias oferecidos pela Universidade Federal de Itajubá (UNIFEI), Campus de Itabira – MG: Engenharia Ambiental, Engenharia da Computação, Engenharia de Controle e Automação, Engenharia de Materiais, Engenharia de Mobilidade, Engenharia de Produção, Engenharia de Saúde e Segurança, Engenharia Elétrica e Engenharia Mecânica.

Essa disciplina obrigatória tem um total de 64 horas/aula de carga horária e sua ementa é composta pelos seguintes conteúdos: EDO de primeira ordem; EDO de ordem maior ou igual a dois; Resoluções em Séries; Transformadas de Laplace e Sistemas de EDO. Dentre os objetivos da disciplina destaca-se, dentre outros, “identificar e resolver problemas que envolvam Equações Diferenciais”.

A bibliografia básica adotada teve como referência principal, inicialmente, o livro clássico Zill e Cullen (2001) e, posteriormente, Santos (2010) de autoria do Prof. Dr. Reginaldo Santos do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), disponibilizado gratuitamente no *site* do autor, o que facilitou o acesso dos estudantes, devido à impossibilidade de acesso à biblioteca física da universidade.

Em meados de março de 2020, devido à pandemia mundial da COVID-19, a UNIFEI adotou oficialmente o sistema de Regime de Trabalho Excepcional (RTE). As aulas, então, foram ministradas de forma remota por meio do Google Meet e a comunicação com os alunos se deu por meio dessas aulas e também por meio de fóruns semanais disponibilizados na plataforma Moodle, ambiente virtual de ensino e aprendizagem que já vem sido adotado pela instituição por vários anos, cabendo aos docentes a livre escolha da utilização dessa ferramenta.

Semanalmente, nos horários previstos para as 2 aulas presenciais da disciplina, foram ministradas aulas de forma remota, sendo que a frequência dos alunos nessas aulas foi um pouco menor do que nas aulas presenciais, ficando entre 50% e 75%.

A condução das atividades de Modelagem Matemática foi feita por meio do *Google Meet*, durante o horário das aulas. Como a carga horária de 2 dias de aula não era suficiente para a realização de toda as atividades de Modelagem, os grupos se reuniam extraclasse para finalizá-las. Além disso, aulas extras foram programadas para discutir as dúvidas dos alunos, antes de finalizarem as tarefas. Os registros das atividades de Modelagem foram feitos na plataforma *Moodle*.

Por meio do *Google* Meet, os alunos fizeram uma apresentação dos modelos produzidos, pontuando as questões que julgaram mais relevantes. Alguns alunos preferiram fazer a apresentação com antecedência e gravá-la. Em seguida, enviaram o arquivo para o professor. No dia e horário da apresentação, o arquivo da gravação foi transmitido a todos alunos por meio da videoconferência. Isso foi feito com o objetivo de reduzir problemas de conexão com a internet, como de fato, ocorreu com alguns alunos.

Observação: projeto (Certificado de Apresentação para Apreciação Ética, CAAE, 24670619.7.0000.5150) aprovado pelo Comitê de Ética e Pesquisa e o número do parecer é 3.721.662.

DESCREVENDO AS ATIVIDADES DE MODELAGEM

As atividades de Modelagem Matemática foram realizadas em 2 turmas de Engenharia. A turma T1 era composta por 52 alunos e a turma T2 era composta por 65 alunos. Foram formados grupos de 4 a 6 componentes, escolhidos pelos próprios alunos. Na turma T1, foram formados 9 grupos e na turma T2 foram formados 11 grupos.

Todos os grupos realizaram as atividades de Modelagem Matemática, ou seja, nenhum grupo desistiu. As atividades foram divididas em 2 blocos. Cada bloco continha 2 atividades a serem desenvolvidas pelos alunos. Dessa forma, cada grupo fez uma atividade do 1º bloco, relacionado a EDO de 1ª ordem e outra do 2º bloco, relacionado a EDO de 2ª ordem, ou seja, cada grupo realizou 2 atividades no total. Os temas das atividades de Modelagem Matemática foram:

1º bloco: 1A) Absorção de álcool no organismo e risco de acidentes

1B) Modelando a adequação de uma dieta

2º bloco: 2A) Comportamento de compra do consumidor

2B) Modelando a propagação de uma epidemia

Segundo Bassanezi (2002, p. 45), “a formulação de problemas novos ou interessantes nem sempre é uma atividade muito simples para um professor de Matemática”. Por conta desse alerta, realizamos uma pesquisa para melhor poder conciliar determinados tópicos de Equações Diferenciais a problemas interessantes. Os livros tradicionais de Equações Diferenciais trazem basicamente os mesmos problemas e aplicações. Muitas dessas aplicações podem não ser interessantes ou não conseguem fazer uma ligação com o futuro profissional dos estudantes de Engenharia ou com o seu dia a dia. As costumeiras aplicações são: decaimento radioativo, crescimento de colônias de bactérias, circuitos elétricos, sistema massa-mola, dentre outros (Zill & Cullen, 2001). Por isso, pesquisamos alguns artigos e outros livros não tradicionais para obtermos problemas que poderiam ser do interesse dos nossos alunos. De acordo com Bassanezi (2002, p. 45): “Faz-se um levantamento de possíveis situações de estudo as quais devem ser, preferencialmente, abrangentes para que possam propiciar questionamentos em várias direções”. Dessa forma, levamos em consideração que os temas escolhidos poderiam despertar o interesse dos alunos, o que nos pareceu razoável, visto que os temas fazem parte do cotidiano de praticamente todos eles.

Importante ressaltar que, alguns autores como Bassanezi (2002) e Klüber (2012), sugerem que os temas sejam escolhidos pelos alunos, para que eles se sintam também responsáveis pelo processo de aprendizagem. Entretanto, pela limitação do tempo, pelas incertezas em relação à novidade do ensino remoto e também pela necessidade de adequação dos temas abordados nas atividades aos conteúdos programáticos, infelizmente, não foi possível seguirmos tal recomendação. Assim, após definirmos os modelos trabalhados nas atividades, apresentamos os temas para os alunos e deixamos que eles escolhessem, a partir de uma discussão com o seu grupo, quais atividades eles iriam desenvolver em cada bloco.

Para a condução das atividades de Modelagem Matemática, fizemos uma adaptação dos 8 passos para aplicações de EDO em fenômenos físicos descritos no livro de autoria do Prof. João Bosco Laudares da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais (PUC Minas) e outros (Laudares et al., 2017, p. 98) e assim definimos os seguintes passos didáticos:

Passo 1: Matematização da Lei Física

Passo 2: Resolução da Equação Diferencial do modelo

Passo 3: Condições iniciais ou de contorno

Passo 4: Substituição das constantes dadas

Passo 5: Cálculos solicitados nos problemas (explicite o que se pede)

Passo 6: Modelo matemático do fenômeno (equação encontrada)

Passo 7: Gráficos do modelo

Passo 8: Descrição sintética do fenômeno

Passo 9: Análise da equação do modelo

Passo 10: Análise crítica do modelo

Devido às características de alguns problemas das atividades de Modelagem Matemática, alguns passos foram subdivididos em alguns subitens, a fim de facilitar o entendimento e a resolução.

Os 2 últimos passos foram voltados à percepção crítica dos alunos diante do modelo concebido pelo grupo. Para estimular uma discussão crítica do modelo, acrescentamos os passos 9 e 10 ao roteiro original. De acordo Laudares et al. (2017, p. 98): “Essa estrutura pode ser considerada um padrão a ser seguido, ocorrendo alterações de acordo com o tipo de problema a resolver”.

Destacamos que também podemos associar os 10 Passos definidos com as 3 etapas de Modelagem estabelecidas por Biembengut (2016) da seguinte forma: 1) Percepção e apreensão: Passos 1 e 2; 2) Compreensão e explicitação: Passos 3 a 7; 3) Significação e expressão: Passos 8 a 10.

Cada atividade de Modelagem Matemática iniciava com uma pergunta-problema para estimular os estudantes. Em seguida, um breve texto introdutório contextualizava o problema, fornecendo algumas pistas de dados. Daí, os grupos passavam à resolução dos modelos. Como última tarefa, houve uma apresentação de cada grupo para os demais alunos.

Passamos, então, a descrever a Modelagem 1B.

MODELANDO A ADEQUAÇÂO DE UMA DIETA

Iniciamos com o seguinte *Problema*: Como criar um modelo matemático que envolva o gasto energético diário e a ingestão diária de energia (comida) para prever a melhor adequação e a evolução de uma dieta de uma determinada pessoa?

O que controla o peso corporal é o equilíbrio entre dois fatores: ingestão de energia e gasto de energia. Quando o balanço é positivo o corpo terá excesso de energia que será armazenada como gordura, enquanto quando esse saldo é negativo, a gordura armazenada é usada para fornecer ao corpo a energia necessária (Chin et al., 1992). A restrição de energia é a mais eficiente e tradicional tratamento para obesidade. Porém, cuidados devem ser feitos com relação à taxa metabólica basal (Abdel-Hamid, 2003; Newby, 2019). Um outro fator a considerar é a importância da atividade física como um meio eficaz para diminuir o excesso peso ou manter o peso saudável (Chin et al., 1992; Newby, 2019).

Iniciando no Passo 1, os alunos reconheceram que duas variáveis são importantes: a ingestão diária de comida e o gasto energético. Um modelo possível (Charalampos, 2004) é dado pela seguinte EDO:

$$\frac{dB}{dt} = A(C - aB)$$

sendo que:

- B é o peso corporal em *Kg*.
- A é o fator de conversão dietética que é igual a $\frac{10}{322168}\ Kg/KJ$ (ou $\frac{1}{7700}\ Kg/Cal$).
- C é a taxa diária de ingestão de energia, medida em KJ/dia.
- a = 167,36 (KJ/Kg) /dia (ou 40 (Cal/Kg) /dia) é uma constante que representa uma média do gasto energético.
- *t* é o tempo, geralmente é medido em dias.

Dessa forma, temos o Passo 2. Porém, esse modelo pode ser melhorado adicionando o componente exercício (já adiantando uma possibilidade para o Passo 5).

Para construir um modelo de dieta que envolva algum exercício físico, temos de considerar os fatores que desempenham um papel na determinação do peso corporal, que são a taxa diária de ingestão de energia, dada por *C*, e a taxa diária de gasto de energia *a* que, segundo Charalampos (2004), varia de 146,44 a 188,28 (KJ/kg) /dia (ou de 35 a 45 (Cal/kg) /dia). Assim, a taxa de alteração no peso corporal $\frac{dB}{dt}$ será proporcional a $C - (40+d)B$, em que d é obtido do exercício. Dessa forma, devemos ter a seguinte equação diferencial de primeira ordem:

$$\frac{dB}{dt} = A(C - bB),$$

em que $b = 40+d$ deve ser determinado, levando em conta o fator de conversão dietético $A = \frac{dB10}{322168} Kg/KJ$ (Mackarness, 1988).

Os Passos de 3 a 6 envolvem a parte algébrica analítica de resolução da EDO envolvida e inclui possíveis particularidades. Comentaremos esses Passos no que se segue.

A EDO envolvida é linear e de 1ª ordem. A resolução pode ser feita através do fator integrante (Zill & Cullen, 2001). Considerando o fator exercício, a solução é a seguinte função:

$$B(t) = \frac{C}{b} + \left(B_0 - \frac{C}{b}\right) e^{-Abt},$$

Nessa função vemos as constantes A, C e b que são como estabelecemos anteriormente. O valor de $B_0=B\ (0)$ é o peso inicial da pessoa, ou seja, quanto ela pesava no início da dieta.

Para a determinação da condição inicial, sugerimos que cada grupo escolhesse um componente para simular a perca de peso. Dessa forma, os grupos encontraram os valores necessários (peso do aluno e a ingestão diária de energia) para substituir na equação inicial e encontrar a solução com base neles.

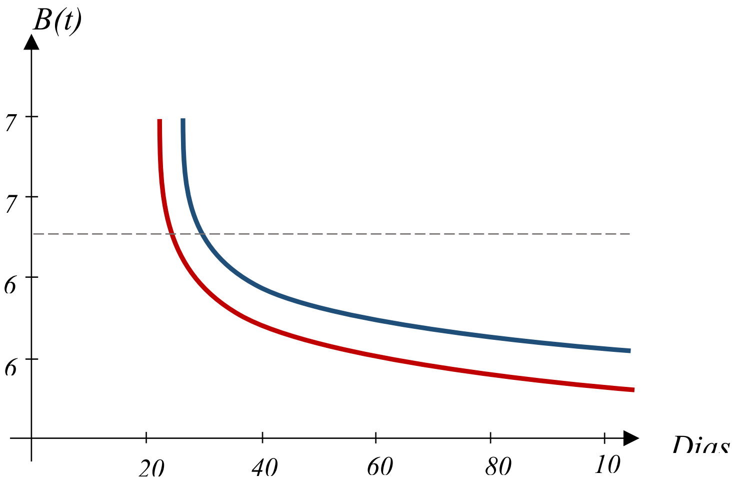
O gráfico do modelo, ou seja, da função solução (Passo 7) foi obtido tendo em vista os dados do colega de grupo escolhido. Assim, eles obtiveram uma estimativa de como seria a perda de peso dele. A Figura 1 a seguir ilustra como seria a curva de perda de peso, isto é, a variação de $B(t)$ com o tempo t

(supondo um peso inicial de 90 Kg). Esboçamos os casos: com e sem o componente exercício.

O exemplo considerado na Figura 1 foi de uma pessoa com 1,70 m de altura e 90 kg de peso (Charalampos, 2004). A ingestão diária de energia escolhida foi de 10460 KJ/dia (ou 2500 calorias / dia), o que é normal para um homem que trabalha (Fitrakis, 1985). O peso ideal para essa pessoa é de cerca de 68 kg, de acordo com o IMC (Índice de Massa Corporal). Na figura, o peso ideal é mostrado como uma linha tracejada (a reta horizontal $y = 68$). A curva azul se refere ao primeiro modelo, enquanto a curva vermelha é para o modelo melhorado, ou seja, o modelo com o exercício. Usando o primeiro modelo, que é a dieta inicial, o sujeito atingirá seu peso ideal após 313 dias. Depois de adicionar o componente do exercício, o sujeito pode atingir seu peso perfeito após apenas 240 dias.

Figura 1

Comparação entre os modelos (com e sem exercício físico)



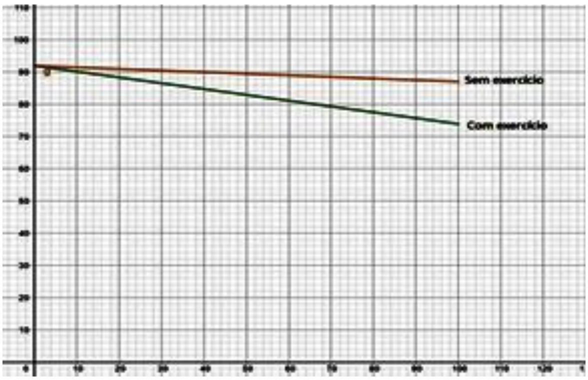
Os alunos observaram que uma atividade física auxilia em uma perca de peso, tornando o modelo mais aprimorado. A aluna Juliana, por exemplo, disse em um dos encontros: “acho que esse modelo é válido pelo fato de relacionar o exercício e a dieta”.

Se o valor de *b* for aumentado, o termo exponencial em da solução que descreve o modelo diminuirá. Consequentemente, o peso ideal e o limite de peso corporal são atingidos mais rapidamente. Caminhar a uma velocidade de 0,889 m/s (ou 3,2 km / h) em uma esteira por 30 minutos ajudou a adicionar 7,876 (KJ / kg) /dia (ou 1,8824 (Cal / kg) /dia) ao valor médio da energia dispendida e, portanto, também ao componente exponencial. Isso enfatiza a importância de caminhar.

Os Passos seguintes, de 8 a 10, não envolviam uma manipulação matemática, mas uma interpretação e discussão crítica do modelo, sua adequação com a realidade e possíveis implicações sociais.

Figura 2

Gráficos elaborados por um grupo



O Passo 8 era apenas para os alunos analisarem o que foi produzido e fazer uma breve explicação do fenômeno modelado – o que foi feito de modo satisfatório por todos. Alguns poucos grupos (2 no total) tiveram dificuldades matemáticas, resolvendo a EDO envolvida de uma maneira errada. Apesar disso, os gráficos expressavam uma descrição adequada do fenômeno, como exemplificamos na Figura 2. Dessa forma, as interpretações desses grupos estavam coerentes com a realidade. Possivelmente facilitados pelo fator intuitivo do problema em questão, tais alunos disseram que uma pessoa que faz uma dieta para emagrecer irá reduzir o peso corporal e isso será acentuado caso ela faça alguma atividade física.

Prosseguindo no Passo 9, os grupos concordaram que o modelo condiz com a realidade. É intuitivo esperar que uma pessoa que faça algum tipo de atividade física perca peso mais rapidamente. Apesar disso, muitos alunos reconheceram vários fatores que poderiam ser aprimorados no modelo. Pedro, por exemplo, mencionou que “o modelo não se adequa totalmente à realidade pois desconsidera fatores como o percentual de gordura do indivíduo e o metabolismo”. Em um dos encontros para a produção do modelo, a aluna Tatiane (os nomes foram mudados) mencionou:

> Acredito que o modelo é uma aproximação válida, mas pode ser aprimorado porque essa questão da dieta tem muitas variáveis além de diversos aspectos pessoais. Outros aspectos a se considerar são: os hábitos alimentares, os tipos de exercícios físicos, levando em conta a duração e a frequência. (Tatiane)

A idade também influencia, pois quanto mais velha a pessoa for, mais difícil fica queimar energia (McCargar, 1996; Newby, 2019). Outros fatores que poderiam ser considerados são o sexo da pessoa e a altura.

Além disso, o padrão de ingestão de energia, ou hábito alimentar, exerce influência: quem toma café da manhã tende a gastar mais energia do que quem prolonga o desjejum, pois o corpo começa a funcionar e gastar energia mais cedo (Cho et al., 2003; Wyatt et al., 2001). Por outro lado, fazer essas modificações no modelo dificulta a resolução da nova EDO. Ilustraremos isso com um caso. Quando a temperatura ambiente é bem diferente da temperatura corporal, o corpo precisa regular sua temperatura, fazendo uma termorregulação. Assim, se incluirmos o efeito da temperatura ambiente no modelo, teremos o seguinte resultado:

$$B'(t) = A(C - (b + F(T))B)$$

sendo *F(T)* a função dependente da temperatura ambiente e as demais letras como descritas anteriormente. Dessa forma, a nova EDO é não linear, o que dificulta a resolução. Isso foi reconhecido por muitos grupos, ou seja, um novo modelo mais próximo da realidade pode ser mais difícil de resolver.

O modelo matemático elaborado pelos grupos foi considerado realista, pois leva em consideração fatores como dieta e exercício. A perda de peso que podemos ver pelo gráfico (Figura 1) também está dentro da normalidade, pois é algo factível, sendo uma previsão útil para quem quer perder peso. Além disso, o modelo mostrou que um exercício periódico simples e fácil poderia ter um grande efeito na perda de peso corporal.

Finalizando a atividade com o Passo 10, os grupos realizaram discussões críticas a respeito do modelo. Eles refletiram em cima de perguntas como: Quais são as dificuldades em se seguir um programa de dietas e exercícios?

Percebemos que as discussões foram facilitadas pelo fato de o modelo produzido ser próximo da realidade e o tema que atingir a todos alunos de alguma forma. A aluna Fabiana disse que:

> O ideal seria incluir uma constante que represente uma margem de erro, já que uma pessoa nem sempre consegue seguir à risca uma dieta todos os dias. Além disso, seria bom considerar uma possível consequência dos fatores biológicos do corpo, como o tempo de resposta do metabolismo. (Fabiana)

Pedro, assim como Samantha, reconheceu que o gasto energético pode ser diferente em cada organismo e que a qualidade do alimento ingerida é um fator que pode provocas alterações. Samantha ainda acrescentou:

> Para uma modelagem ser mais completa, podemos incluir: quantidade de cada macro nutriente ingerido associado a uma constante que representa o seu tempo de metabolização no organismo, bem como seus impactos de aceleração ou retardo no mesmo; tipo de morfologia corporais – endomorfo, mesomorfo ou ectomorfo –, atrelada a uma constante que representa a sua resposta metabólica específica às atividades físicas. Logo, será possível obter um resultado mais fidedigno aos dados do indivíduo, atribuindo à equação um maior caráter de precisão e, consecutivamente, uma maior possibilidade de trazer resultados que descrevem a realidade. (Samantha).

CONTRIBUIÇÕES DAS ATIVIDADES DE MODELAGEM

A partir do desenvolvimento das atividades de Modelagem Matemática, dos registros no diário de campo durante as aulas remotas, das respostas dadas ao questionário aplicado após a realização das atividades e, à luz do nosso referencial teórico, foi-nos possível estabelecer duas categorias centrais de análise que, a seguir, passamos a descrever.

Contribuições para a aprendizagem de Equações Diferenciais

Para analisarmos aspectos relacionados à aprendizagem de ED, buscaremos apresentar tanto aspectos que consideramos positivos como alguns que consideramos negativos.

Uma unanimidade entre os alunos foi que as atividades de Modelagem Matemática proporcionaram um maior interesse quanto às ED. Percebemos que isso talvez se deva ao fato de os alunos não estarem acostumados com metodologias diferentes, especialmente, em aulas de Matemática no Ensino Superior.

A motivação levou os alunos a fazerem pesquisas e a se dedicarem mais aos estudos. Uma aluna disse que "procurou estudar e pesquisar sobre o assunto, vendo aplicações na prática". Fazer pesquisas já é algo esperado em uma atividade de Modelagem. Porém, notamos que alguns grupos ainda assim não o fizeram. Notamos que alguns grupos tiveram uma estratégia de solução que demonstrou a realização de pesquisas. Além disso, todos os grupos usaram de *softwares* para apresentar a parte gráfica do modelo. Isso certamente contribuiu não somente para uma compreensão do modelo, mas também para a aprendizagem de EDO.

As aplicações da Matemática mereceram destaque nos comentários seguintes, que também mostram algumas contribuições da Modelagem na visão dos alunos:

> Acho muito importante essas metodologias, professor, principalmente por cursarmos Engenharia. Vamos aplicar esses conhecimentos provavelmente na prática, muito dificilmente

> em estudos teóricos como na Matemática pura. Foi bom para agregar aos conhecimentos teóricos de EDO, a parte prática que teremos no dia a dia. (Enzo)

Outra aluna, Hannah, comentou: "Eu achei que as atividades de Modelagem, mesmo dando muito trabalho, foram boas para conseguirmos ver a aplicação do que aprendemos. Não tinha tido nenhuma matéria assim e achei bem interessante".

Em relação à Modelagem Matemática, por ser novidade para alguns, houve um estranhamento de início. O aluno Guilherme disse que "nunca tinha feito nada a respeito de modelagem, inclusive foi um conceito que me assustou no início". Mas tanto esse aluno quanto vários outros (a maioria) gostaram da nova metodologia adotada. Por exemplo, a aluna Amanda afirmou: "Eu acho super viável o uso de Modelagem Matemática como uma alternativa metodológica". Essa sensação também foi expressa por diversos outros alunos.

A Modelagem Matemática enquanto alternativa metodológica teve ampla aceitação dos alunos, como notamos pelos comentários de alguns que deixaram clara a importância do conhecimento construído por meio das atividades desenvolvidas. Os alunos, de um modo geral, conseguiram explicitar, em suas palavras, contribuições do uso da Modelagem, conforme sintetizado nas palavras do aluno Lucas: "Achei muito boa a visualização e aplicação da matéria; acaba que, com essa metodologia, a gente fixa mais coisa e aprende melhor".

Assim, notamos que "a prática docente fundamentada nos preceitos da Modelagem Matemática na Educação evidenciando o caráter mediador do professor e tornando o estudante mais autônomo em relação a sua aprendizagem" (Scheller et al., 2015, p. 17) permite conciliar a teoria e a prática, une o mundo da Matemática acadêmica com a Matemática presente no cotidiano (Lopes, 2020). Nesse sentido, o aluno Alex afirmou: "Curti sim, achei interessante o modo de como se tratar problemas do cotidiano com Matemática".

Entretanto, alguns alunos acham que é necessário ter um conhecimento amplo e vasto em Matemática para ser capaz de realizar uma atividade de Modelagem. Por exemplo, uma aluna, Sara, disse que não achava a Modelagem Matemática viável pois "não tinha um conhecimento suficiente de Matemática para realizar".

A aplicação da Modelagem na disciplina de Equações Diferenciais foi considerada positiva por todos os alunos. Dessa forma, os alunos “conectaram” o conteúdo teórico com a realidade que os cerca, como explicitaram alguns:

> A realização das Atividades de Modelagem contribuiu para ressignificar meus conhecimentos matemáticos em relação às Equações Diferenciais. Ela contribui fazendo com que eu procurasse estudar e me aprofundar mais em EDO, mas a parte mais significante foi abrir minha mente para ver como a Modelagem é usada no cotidiano. (Amanda)

Essa fala vai ao encontro do que defende Biembengut (2016, p. 178), ao afirmar que a Modelagem “permite ainda propiciar ao estudante, o gosto e o interesse por alguma área do conhecimento, ao perceber que esses conteúdos então aprendidos lhes valem como fundamentos ou mesmo ‘meios’ importantes”.

Para alguns alunos, uma contribuição para a aprendizagem foi a possibilidade de observar a conexão que a Matemática e a Modelagem podem ter com outras disciplinas. Para outros, a contribuição do uso da Modelagem na disciplina se estendeu para uma melhor compreensão de conteúdos anteriores:

> Durante o curso precisei revisar diversos conteúdos, e tive reinterpretações mais claras do cálculo 1, o que me ajudou muito a entender sobre as equações diferenciais. (Arthur)

Outro aspecto muito positivo para a aprendizagem se relacionou com a questão do estilo de aprendizagem. Cada aluno apresenta um certo estilo de aprendizagem (Barros, 2008). De um modo geral, a aceitação da realização do trabalho foi positiva e gerou uma motivação, como exemplificamos pelo comentário de um aluno:

> Muito mais do que simplesmente saber fazer as contas, estudar EDO para realizar a atividade foi super válido, deu um gás muito maior para estudar. O envolvimento com o trabalho, a vontade de fazer dar certo, e principalmente a vontade de entender tudo que estava acontecendo no trabalho e de que maneira o modelo se comportaria, o que ele resultaria fez o estudo ter muito mais sentido. (Pedro)

A questão do estilo de aprendizagem também envolve o ambiente de estudos. Alguns alunos não tinham um ambiente adequado para estudar. O aluno Diego disse: "o próprio ambiente de estudos em casa não me proporciona uma experiência positiva".

Por outo lado, as dificuldades de aprendizagem esbarram com as dificuldades ocasionadas pelo ensino remoto. Para alguns alunos, as dificuldades envolveram estudar sozinhos, estar longe dos colegas e não se adequarem (até o momento da modelagem) ao sistema de ensino remoto. Isso ficou claro nas respostas de alguns alunos ao questionário. Por exemplo, o aluno Ênio disse que: "A maior dificuldade foi pelo fato de o semestre ter sido *online*; tenho mais facilidade em aprender em sala de aula, onde minha mente abrange mais".

Também provavelmente relacionado com o estilo de aprendizagem está o problema de se trabalhar em grupo. Alguns alunos disseram se beneficiar da atividade em grupo. Por exemplo, um aluno disse:

> Além de que, esse tipo de atividade promove interação entre os próprios alunos, que realizam troca de conhecimentos e desperta mais o nosso interesse por esses tipos de metodologias mais práticas. (Glauber)

Porém uma dificuldade com os colegas do grupo foi expressa por alguns poucos alunos. Alguns grupos adotaram a seguinte estratégia admitida por 3 grupos: cerca de metade dos componentes do grupo fizeram a 1ª atividade de Modelagem Matemática e os outros componentes, a 2ª. Essa estratégia, que pode ter sido adotada por mais do que os 3 grupos que admitiram isso, não foi positiva para o grupo de Pâmela, pois ela afirmou: "Achei egoísta o fato que os colegas que se dedicaram à 1ª atividade não ajudaram os outros envolvidos na 2ª atividade".

Esse fato da falta de cooperação e colaboração foi expresso também por outros 5 alunos. Glauber disse que alguns colegas participaram apenas da gravação da apresentação e, depois, "desapareceram". Jeane disse que os colegas que mais "dominavam a matéria" ficaram sobrecarregados e isso "foi crucial para uma execução errônea em alguns sentidos". Luís Edson disse que uma das maiores dificuldades das atividades de Modelagem foi "gerir um grupo durante o RTE". Essas e outras dificuldades com os colegas dos grupos podem estar relacionadas com o fato de tudo ter sido conduzido de forma remota, ou seja, uma dificuldade intrínseca ao RTE. Porém, nossa experiência docente mostra que, mesmo em sala de aula presencial, não são todos os alunos que colaboram com os colegas para a execução de uma atividade em grupo.

Outras dificuldades de aprendizagem que notamos não estão (necessariamente) ligadas à forma como foi conduzida a disciplina no semestre, por meio do ensino remoto. Provavelmente, tais dificuldades surgiriam, mesmo se as atividades tivessem acontecido em aulas presenciais. Algumas dessas dificuldades estavam relacionadas com a própria modelagem. Poucos alunos disseram ter utilizado a Modelagem em alguma disciplina anteriormente, nas respostas ao questionário. As respostas positivas do uso prévio de Modelagem se referiam, majoritariamente, à disciplina de Álgebra Linear. Apesar disso, o aluno Ramon, disse que "não foi uma modelagem em si, mas já participei de um trabalho semelhante, em Álgebra Linear, sobre o tema Filtro de Kalman".

Adicionalmente, poucos alunos disseram no questionário que acham que não irão aplicar mais a Modelagem em alguma outra disciplina. Um aluno disse que não se vê usando a Modelagem nas outras disciplinas que estavam em curso. Um outro aluno, Henri, disse que "a modelagem é muito difícil de ser aplicada". Outros disseram que usariam a Modelagem, mas com "ressalvas", e em "situações mais simples".

Outras dificuldades relatadas pelos alunos estão relacionadas com as dificuldades do conteúdo matemático. As dificuldades apresentadas pelos alunos não estão relacionadas, forçosamente, com a atividade de Modelagem. Seguramente, tais dificuldades apareceriam em alguma outra avaliação, como uma prova, um exercício etc.

As dificuldades matemáticas começaram com a interpretação da Modelagem a ser feita. Essas dificuldades apareceram em maior quantidade no 2º bloco de atividades (envolvendo EDO de 2ª ordem). Exceto por um grupo, todos os grupos da atividade de Modelagem 2B (propagação de uma epidemia) deixaram itens essenciais em branco (nos Passos 7 e 8). O comentário da aluna Priscila resume o sentimento da maioria dos grupos durante o desenvolvimento dessa atividade: "Esse trabalho deu trabalho".

Algumas dessas dificuldades de interpretação podem ser vistas claramente em algumas das respostas ao questionário. Diversos alunos disseram que a modelagem de epidemias estava inadequada para uma situação real, devido ao fato de não incluir a possibilidade de uma vacina. Entretanto, um dos itens (não resolvidos pela maioria dos grupos) da atividade de Modelagem 2B foi justamente considerar o "caso vacinado" e comparar a possível melhora nesse caso.

Vimos que dificuldades de interpretação também ocorreram no momento das conclusões e reflexões a respeito do modelo encontrado. Algumas conclusões não faziam muito sentido e pareciam mais uma expressão da intuição a respeito do fenômeno do que uma análise do que havia sido feito, pois o modelo obtido não condizia com as conclusões. Por exemplo, nas considerações de um grupo a respeito da atividade de Modelagem 1A (risco de acidentes ao combinar bebida alcóolica e condução veicular) foram apresentados dados do Ministério da Saúde, mas não havia qualquer conexão com o modelo construído pelo grupo.

Com o 2º bloco de atividades de Modelagem, principalmente a atividade 2B, vieram à tona algumas dificuldades específicas. Conforme apontado pelos alunos, a maior dificuldade foi obter os parâmetros numéricos para se encontrar uma solução específica.

Mesmo explicitando para os alunos quais letras eram constantes e quais eram variáveis, houve diversas incompreensões, como afirmou Daiane, no questionário: "No segundo trabalho, ao começar a pesquisar sobre as variáveis, quase ficamos perdidas ao perceber a quantidade de variáveis". Relacionado com essa dificuldade, muitos alunos não conseguiram determinar os parâmetros necessários para as condições de contorno da EDO ou o PVI (Problema de Valor Inicial).

Outra grande dificuldade apresentada, tanto nas aulas remotas como no questionário, foi o esboço de gráficos. Apenas um grupo disse ter sido custoso fazer o gráfico das atividades do 1º bloco. Mas todos os grupos tiveram dificuldades em realizar os gráficos das atividades do 2º bloco. Os alunos não detalharam suas dificuldades que, possivelmente, estão relacionadas com a interpretação do fenômeno, o modelo e a obtenção dos parâmetros.

Analisando os gráficos dos grupos, vemos que alguns deles não condizem com o modelo apresentado. Ainda que tendo uma interpretação intuitiva correta (reta crescente: aumento de casos; reta decrescente: diminuição de casos, no caso da atividade 2B), muitos dos gráficos estavam inadequados ou incompletos para o modelo encontrado.

Um outro fator levantado por alguns grupos foi o tempo. Alguns alunos falaram, tanto nas aulas remotas como no questionário, que seria melhor ter mais tempo para as atividades de Modelagem do 2º bloco.

Dessa forma, acreditamos que, apesar das dificuldades aqui discutidas, as contribuições da Modelagem Matemática para a aprendizagem de Equações Diferenciais e dar sentido ao estudo da disciplina foram reconhecidas pela quase totalidade dos alunos.

Contribuições para o desenvolvimento da criticidade

As atividades de Modelagem Matemática realizadas com os alunos foram conduzidas de uma maneira que a discussão crítica recaiu sobre o próprio modelo. Os temas foram escolhidos de uma maneira que pudessem gerar interesse nos alunos e, dessa forma, trazer para a sala de aula uma discussão crítica. Mas o foco na escolha cuidadosa dos temas acabou por levar à condução da atividade para uma discussão crítica direcionada ao modelo produzido e não a respeito de questões sociais, políticas e/ou econômicas.

Cabe destacar que a discussão crítica de um modelo deve estar prevista em qualquer concepção de Modelagem, seja ela no contexto da Matemática Aplicada ou da Educação Matemática (Rosa et al., 2012). Dessa forma, apresentaremos uma análise dos momentos de crítica aos modelos construídos, pontuando como a criticidade de um futuro profissional de Engenharia esteve presente.

Analisando os dados, procuramos indícios de uma postura crítica de um futuro profissional de Engenharia. Efetivamente, os alunos perceberam a relação entre as atividades de Modelagem e uma postura crítica, conforme as falas dos alunos a seguir:

> Acredito que a matemática é de suma importância na formação crítica, no pensamento lógico e no raciocínio de um indivíduo, sendo peça importante no uso do multi-conhecimento, seja para realização de atividades simples bem como na resolução de um problema mais complexo proporcionando uma tomada de decisão mais confiante. (Talita)
>
> Após esse trabalho de modelagem estou com uma visão mais crítica de alguns problemas enfrentados no mundo,

> compreendendo melhor como solucioná-los através do que estamos vendo ao longo da formação superior. Dessa maneira, a utilização da matemática tanto básica como superior, quando aplicada a vida, desvenda, norteia, ajuda e resolve diversas situações, abrindo um mix de possibilidades dentro da realidade. (Felipe)

Tal postura crítica observada se baseou, inicialmente, em procedimentos e certezas matemáticas a fim de chegar às conclusões:

> O risco de uma pessoa se envolver em um acidente de carro após ingerir álcool é ALTO. A partir do trabalho, verificamos que o risco é proporcional a taxa de álcool no organismo do indivíduo, ou seja, quanto mais se bebe e quanto maior for o teor alcoólico da bebida, maiores serão as chances de ocorrer um acidente de trânsito. [...] Outra abordagem que podemos fazer entre o gráfico e a EDO 1° Ordem, refere-se ao número de fatores que são relacionados, uma vez que os fatores que englobam a relação acidentes e bebidas alcóolicas remete a mais variáveis, portanto, a equação modula a interpretação dos gráficos de uma maneira específica. Para que tal questão fosse contornada, seria necessário um estudo mais afundo e trabalhado sobre o tema. (Grupo 1 (T1) – Modelagem 2A)

Assim como Araújo (2012), percebemos que as críticas feitas pelos alunos em uma atividade de Modelagem estão baseadas em certezas matemáticas e sobre a realidade que os cerca. Alguns grupos esboçaram uma postura nesse sentido:

> O risco de alguém se envolver em um acidente de carro após beber é alto, sendo expressamente necessário conscientizar a população para não dirigir após beber, visto que podemos utilizar como base os gráficos e fórmulas do trabalho para corroborar o crescimento exponencial de risco x ingestão de álcool. (Grupo 9 (T2) – Modelagem 1A)

A maioria dos grupos apresentou um bom entendimento do fenômeno envolvido. Ao fazer uma análise crítica do modelo, os alunos perceberam que fazer acréscimos de algumas outras variáveis pode auxiliar na obtenção de um modelo mais completo. Dentre os inúmeros grupos que perceberam isso, selecionamos o seguinte:

> O modelo apresentado se adequa com a realidade em partes, porém pode ser melhorado se acrescido de outras variáveis. Seus pontos positivos estão na análise por gênero e por fazer a relação entre os dados do indivíduo (altura, peso e volume de sangue no corpo) com o volume de bebida ingerida, seu teor alcoólico. De pontos negativos pode-se citar o fato de não fazer a análise da ingestão de outros tipos de bebidas de forma simultânea. O modelo poderia ser aprimorado acrescentando as variáveis dos tipos de bebidas diferentes, seu tempo de consumo e talvez o tempo que leva para ser eliminado do organismo, o que poderia acarretar outras análises. (Grupo 3 (T2) – Modelagem 1A)

O comentário desse grupo revela um questionamento às certezas matemáticas, à ideologia da certeza (Borba & Skovsmose 2001). A ideologia da certeza é a estrutura vigente em torno de concepções absolutistas da Matemática. Os problemas tratados nas aulas de Matemática são artificiais. Quando são problemas tirados do mundo real, são feitas simplificações para enquadrá-los no mundo da Matemática. As aplicações da Matemática buscam uma solução ideal, ótima, mas desconsideram fatores da realidade. Borba e Skovsmose (2001) trazem como solução para a ideologia da certeza, uma ação diferente na sala de aula tradicional, mostrando que a Matemática pode ser questionada e que nem sempre traz a resposta final.

Por outro lado, algumas das conclusões obtidas pelos grupos foram confusas ou não foram baseadas no modelo obtido:

> Entretanto, o modelo SIR não é capaz de explicar a persistência ou erradicação de doenças infecciosas, a principal razão para isso é que o modelo SIR considera a distribuição de indivíduos espacial e temporalmente homogênea, a partir da premissa de que o tamanho da população seja tão grande a ponto de permitir a aproximação por variáveis contínuas dos diversos estados. Diante disso, o número de infectados no país pode ser 6x maior que o número divulgado pelo governo. (Grupo 4 (T2) – Modelagem 2B)

> A doença irá interferir nas curvas dos gráficos e comportamentos destas, podendo ser mais incisivas (exponenciais) ou menos incisivas ("retas"). Dessa forma, é possível especificarmos gráficos específicos para cada doença, visto suas peculiaridades. (Grupo 9 (T2) – Modelagem 2B)

Podemos perceber, nas falas anteriores, o uso de "6x maior" e "exponenciais". O uso de tais termos (e outros) pelos alunos pode apresentar uma influência da mídia e a tendência da sociedade de fazer uso de termos matemáticos e estimativas, sem ter um fundamento claro. Desde o início da pandemia, números, gráficos, estimativas, previsões e termos matemáticos passaram a ser algo corriqueiro.

Notamos, portanto, que vários alunos, mesmo diante de um modelo, fizeram conclusões baseadas na intuição ou por meio de outras fontes. Certamente, fazer pesquisas e relacionar problemas com a realidade ao redor é um aspecto importante da Modelagem, porém, fazer isso sem um olhar para o próprio modelo construído, deixa uma sensação de uma baixa compreensão do modelo ou de desconfiança no modelo obtido. Além disso, vemos aqui um outro indício da ideologia da certeza, pela confiança, sem questionamentos, em um modelo já estabelecido.

Uma característica das críticas de alguns grupos e de alguns alunos, em particular, ficou evidente na leitura dos dados. A crítica realizada ao modelo produzido e a maneira com a qual o aluno encara e usa a Matemática no cotidiano se apresentou de uma forma polarizada. Por um lado, também se apresentaram algumas concepções negativas:

> Já com relação aos pontos negativos, seria o fato de que o modelo não consegue representar a realidade. Ele também não abrange variáveis que podem interferir no resultado esperado. Outro fato é de que o modelo não considera os fatores biológicos do corpo, e que uma pessoa nem sempre segue à risca uma dieta e os exercícios propostos, afetando o resultado real quando se comparado ao teórico. (Grupo 7 (T2) – Modelagem 1B)

> A matemática passada nas Escolas é bem limitada, pouco representa realidade, apenas dá uma noção, mas não é muito aplicável. (Gabriel)

No primeiro comentário acima, notamos que o grupo desafiou a ideologia da certeza, questionando o modelo produzido. Por outro lado, outros alunos apresentaram um olhar positivo sobre tal a relação de modelos obtidos com a realidade, conforme exemplificamos a seguir:

> Então, sim, podemos considerar que o modelo obtido se adequa muito com a realidade. [...] construímos um modelo que se compara a um dos mais utilizados nos dias de hoje, que tem extensa aplicação e visibilidade pelos profissionais da saúde, o que nos dá a conclusão de que o nosso modelo poderia ser aplicado no mundo real. (Grupo 5 (T1) – Modelagem 2B)
>
> Acho que a principal dificuldade foi: "Ok, chegamos nesse resultado, mas será que é isso mesmo na prática?". Ao ver os gráficos, ficávamos fazendo suposições, chutando valores, para ver se era realmente daquela forma que iria proceder ao longo do tempo, e às vezes encontrar gráficos que não se encaixava com isso era bastante frustrante. (Lucas)

No primeiro comentário supracitado, percebemos que o grupo confirma a validade do modelo por compará-lo a um outro que é bastante utilizado nos dias de hoje, ou seja, a algo garantido matematicamente. Essa semelhança leva à uma segurança de que pode ser utilizado no mundo real. Entretanto, esse raciocínio é uma manifestação da ideologia da certeza (Borba & Skovsmose, 2001).

Apesar de notarmos discussões críticas polarizadas, influenciadas pela mídia e com o viés da ideologia da certeza, podemos dizer que os grupos fizeram discussões críticas que "fizeram sentido", tendo em vista o contexto da modelagem e a aplicação com a realidade. Diante disso, percebemos que as discussões realizadas com os alunos, as discussões realizadas entre os componentes de um mesmo grupo e, as discussões entre os grupos possibilitaram um início para uma reflexão crítica em torno da Matemática que, em determinada medida, fomenta a formação da criticidade que julgamos ser essencial ao future professional da Engenharia.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

À guisa de conclusão, relembramos que a pesquisa aqui detalhada objetivou identificar e analisar as possíveis contribuições de atividades de Modelagem Matemática, que foram realizadas de forma remota, aos aspectos referentes à aprendizagem e ao desenvolvimento da criticidade de alunos de Engenharia.

Assim como em uma sala de aula presencial, no ensino remoto, os alunos precisam de uma orientação clara e de um acompanhamento aproximado durante as atividades de Modelagem. Como o contato presencial não é possível num ensino remoto, então é importante que aconteçam outros tipos de encontros constantes e, se possível, síncronos, para uma maior e melhor interação com os alunos.

Em relação ao ensino de ED, a utilização da Modelagem Matemática pode ser muito proveitosa, pois os alunos demonstram um interesse maior na disciplina quando se envolvem com algum projeto. Apesar disso, os temas trabalhados com os alunos nas atividades de Modelagem devem ser ligados ao cotidiano deles ou ter alguma relação com a futura área de atuação professional dos alunos. Na construção do modelo, a produção de gráficos pode apresentar muitas dificuldades por parte dos alunos, porém, os aspectos visuais do modelo fornecem uma boa base para as conclusões a que eles chegarão.

Por fim, mas não que seja o último aspecto a ser considerado, durante todo o processo de Modelagem, os alunos precisam ser estimulados a uma discussão crítica. Tal discussão pode se delinear, em um primeiro momento, a respeito do modelo em construção e das variáveis envolvidas. Além disso, a discussão do modelo pode e deve ser direcionada às questões da realidade nos cerca, acompanhado de reflexões críticas relevantes, o que poderá estimular os alunos a uma postura crítica na sua vida em sociedade.

Destarte, concluímos ressaltando a importância de um ensino de ED que rompa com o modelo que prioriza somente a parte algébrica, os formulários e métodos de resolução, e seja delineado a partir da contextualização / modelação de situações-problema e/ou fenômenos naturais para o caráter formativo dos alunos, o que pode impulsionar ricas pesquisas de Educação Matemática no Ensino Superior.

DECLARAÇÕES DE CONTRIBUIÇÕES DOS AUTORES

A.P.C.L. contribuiu substancialmente para a concepção e desenho do estudo, incluindo coleta, análise e interpretação dos dados, elaboração do manuscrito, bem como revisão crítica. F.S.R. contribuiu substancialmente para a concepção e desenho do estudo, incluindo análise e interpretação dos dados, redação do manuscrito e revisão crítica.

DECLARAÇÃO DE DISPONIBILIDADE DE DADOS

Os dados que suportam os resultados deste estudo serão disponibilizados pelo autor correspondente, A.P.C.L., mediante solicitação razoável.

REFERÊNCIAS

Abdel-Hamid, T. K. (2003). Exercise and Diet in Obesity Treatment: An Integrative System Dynamics Perspective. *Medicine & Science in Sports & Exercise*, *35*(3), 400–413. https://doi.org/10.1249/01.MSS.0000053659.32126.2D

Araújo, J. L. (2002). *Cálculo, Tecnologias e Modelagem Matemática*: as discussões dos alunos. (173 f.). Tese de Doutorado em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

Araújo, J. L. (2012). Ser crítico em projetos de modelagem em uma perspectiva crítica de educação matemática. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *26*(43), 839–859. https://doi.org/10.1590/S0103-636X2012000300005

Bassanezi, R. C. (2002). *Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática*: uma nova estratégia. Contexto.

Barros, D. M. V. (2008). A teoria dos estilos de aprendizagem: convergência com as tecnologias digitais. *Revista SER: Saber, Educação e Reflexão*, *1*(2), 14–28. http://www.revistafaag.br-web.com/revistas/index.php/ser/article/viewFile/70/pdf_45

Biembengut, M. S. (2016). *Modelagem na Educação Matemática e na Ciência*. Livraria da Física.

Borba, M. C. & Skovsmose, O. (2001). A ideologia da certeza em educação matemática. In: O. Skovsmose. *Educação Matemática Crítica*: a questão da democracia (pp. 127-148). Papirus.

Buéri, J. W. S. (2019). *Análise de fenômenos físicos no ensino de Equações Diferenciais Ordinárias de primeira ordem em cursos de Engenharia*. (118 f.). Dissertação de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática, Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte.

Burghes, D. N. & Borrie, M. S. (1981). *Modelling with Differential Equations*. E. Horwood.

Charalampos, T. (2004). A Mathematical Diet Model. *Teaching Mathematics and Its Applications*, *23*(4), 165–171. https://doi.org/10.1093/teamat/23.4.165

Chin, M. K., Lo, A. Y. S., Li, X. H., Sham, M. Y. M. & Yuan, Y. W. Y. (1992). Obesity, Diet, Exercise and Weight Control – A Current Review, *182 J Hong Kong Med Assoc*, 44(3), 181–187. https://www.hkmj.org/sites/default/files/mjimage/sample.pdf

Cho, S., Dietrich, M., Coralie J. P., Brown, C. A. C. & Block, G. (2003). The Effect of Breakfast Type on Total Daily Energy Intake and Body Mass Index: Results from the Third National Health and Nutrition Examination Survey (NHANES III). *Journal of the American College of Nutrition*, *22*(4), 296–302. https://doi.org/10.1080/07315724.2003.10719307

Dullius, M. M. (2009). *Enseñanza y Aprendizaje en Ecuaciones Diferenciales con Abordaje Gráfico, Numérico y Analítico*. (514 f.) Tese de Doutorado em Ensino de Ciências, Universidade de Burgos, Burgos.

Fecchio, R. A. (2011). *Modelagem Matemática e a Interdisciplinaridade na introdução do conceito de Equação Diferencial no Ensino de Engenharia*. (208 f.). Tese de Doutorado em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

Fitrakis, P. (1985). *Modern Dietetic*. Fitrakis.

Klüber, T. E. (2012). *Uma metacompreensão da modelagem matemática na Educação Matemática*. (396 f.). Tese de Doutorado em Educação Científica e Tecnológica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.

Lopes, A. P. C. & Reis, F. S. (2019). Vamos viajar? – uma abordagem da Aprendizagem Baseada em Problemas no Cálculo Diferencial e Integral com alunos de Engenharia. *Remat: Revista de Educação Matemática*, *16*(23), 449–469. http://dx.doi.org/10.25090/remat25269062v16n232019p449a469

Lopes, A. (2020). Formação crítica dos professores de Matemática articulada às questões contemporâneas. *REnCiMa: Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, *11*(6), 809–817. https://doi.org/10.26843/rencima.v11i6.1901

Lopes, A. (2021). Modelagem Matemática e Equações Diferenciais: um mapeamento das pesquisas em Educação Matemática. *REnCiMa: Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, *12*(4), 16–31. https://doi.org/10.26843/rencima.v12n4a16

Mackarness, R. (1988). *How to Weaken Eating*. Fitrakis.

McCargar, L. J., Sale, J. & Crawford, S. M. (1996). Chronic Dieting Does Not Result in A Sustained Reduction in Resting Metabolic Rate in Overweight Women. *Journal of the American Dietetic Association, 14*(2), 142–146. https://doi.org/10.1016/S0002-8223(96)00301-X

Newby, P. K. (2019) *Food & Nutrition*: what everyone needs to know. Oxford University Press.

Oliveira, E. A. & Igliori, S. B. C. (2013). Ensino e aprendizagem de equações diferenciais. *Em Teia: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, *4*(2), 1–24. https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/view/2231

Laudares, J. B., Miranda, D. F., Reis, J. P. C. & Furletti, S. (2017). *Equações Diferenciais Ordinárias e Transformadas de Laplace*: Análise gráfica de fenômenos com resolução de problemas – Atividades com softwares livres. Artesã.

Rosa, M., Reis, F. S. & Orey, D. A. (2012). Modelagem Matemática Crítica nos Cursos de Formação de Professores de Matemática. *Revista Acta Scientiae*, *14*(2), 159–184. http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/227

Reis, F. S., Cometti, M. A. & Santos, E. C. (2019). Contribuições do GeoGebra 3D para a aprendizagem de integrais múltiplas no cálculo de várias variáveis. *REnCiMa: Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, *10*(2), 15–29. http://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/index.php/rencima/article/view/2328

Santos, R. J. (2010). *Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias*. Imprensa Universitária da UFMG.

Scheller, M., Bonotto, D. L. & Biembengut, M. S. (2015). Formação Continuada e Modelagem Matemática: Percepções de Professores. *Educação Matemática em Revista*, *46*, 16–24. http://sbemrevista.kinghost.net/revista/index.php/emr/article/view/499

Wyatt, H. R., Grunwald, G. K., Mosca, C. L., Klem, M. L., Wing, R. R., & Hill, J. O. (2001). Long-Term Weight Loss and Breakfast in Subjects in the National Weight Control Registry. *Obesity Research*, *10*, 78–82. https://doi.org/10.1038/oby.2002.13

Zill, D. G. & Cullen, M. R. (2001). *Equações Diferenciais*. Pearson Makron.