ACTA SCIENTIAE

(cc) BY

ISSN: 2178-7727
DOI: 10.17648/acta.scientiae.6959

Estrategias que emplean futuros profesores de Educación Primaria en una tarea de relación funcional

Rodolfo Morales[a]
José Parra[a]

[a] Facultad Ciencias de la Educación, Departamento de Formación Inicial Escolar, Universidad Católica del Maule, Talca, Chile

Recibido para publicación 27 dic. 2021. Aceptado tras revisión 22 mar. 2022
Editora designada: Claudia Lisete Oliveira Groenwald

RESUMEN

Contexto: La propuesta curricular *early algebra* busca promover modos de pensamiento algebraico a partir de los primeros niveles educativos. El pensamiento funcional es un enfoque por el cual se pretende promover el pensamiento algebraico en los estudiantes. En la actualidad diversos programas curriculares introducen nociones relativas a este pensamiento. Sin embargo, en el futuro profesor este tipo de pensamiento ha incidido poco, surgiendo la necesidad de indagar en la forma en que ellos abordan tareas vinculadas a él, con la finalidad de prepararlos adecuadamente para su enseñanza. **Objetivo**: Analizar las estrategias que emplean futuros profesores de Educación Primaria chilenos cuando resuelven una tarea que implica la generalización de una relación funcional. **Diseño**: Seguimos una metodología cualitativa de nivel exploratorio-descriptivo. **Entorno y participantes**: La Muestra estuvo conformada por 18 futuros profesores de Educación Primaria de una universidad chilena. **Recopilación y análisis de datos**: Recogimos los datos a través de una prueba escrita en un grupo de 18 futuros profesores que cursaban el primer año de formación. Realizamos un analizamos cualitativo de los datos. **Resultados**: destacamos la diversidad de estrategias aritméticas y funcionales utilizadas por los futuros profesores. Además, destacamos las trayectorias que han efectuado estos profesores en la resolución de la tarea, donde la gran mayoría de comienza con estrategias aritméticas y finaliza utilizando estrategias funcionales. **Conclusiones**: esta investigación permitió identificar las estrategias que emplean futuros profesores de Educación Primaria y cuyos datos podrían ser útiles para la creación de programas de formación del profesorado.

Palabras clave: Early Algebra, Educación Primaria, Pensamiento algebraico, Pensamiento Funcional.

Autor corresponidiente: Rodolfo Morales. Correo electrónico: rmoralesm@ucm.cl

Strategies used by Preservice Primary Teachers to solve a functional relation task

ABSTRACT

Background: The early algebra curricular proposal seeks to promote algebraic ways of thinking from the first educational levels. Functional thinking is an approach by which it is intended to promote algebraic thinking in students. At present, various curricular programs include notions related to this thought. However, in preservice teachers this type of thinking has had little influence, thus arising the need to investigate the way in which they approach tasks related to it in order to prepare them adequately for their teaching. **Objective**: To analyze the strategies that preservice Chilean Primary Education teachers use when they solve a task that implies the generalization of a functional relationship. **Design**: We follow a qualitative methodology at an exploratory-descriptive level. Setting and participants: The Sample included 18 preservice Primary Education teachers from a Chilean university. **Setting and Participants**: We collected the data through a written test in a group of 18 preservice teachers who were in the first year of training. We carry out a qualitative analysis of the data. **Data collection and analysis**: we collected the data through a written test in a group of 18 preservice teachers who were in the first year of training. We carry out a qualitative analysis of the data. **Results**: we highlight the diversity of arithmetic and functional strategies used by preservice teachers. In addition, we highlight the trajectories that these teachers have taken in solving the task, where the vast majority of it begins with arithmetic strategies and ends using functional strategies. **Conclusions**: this research will identify the strategies used by future Primary Education teachers and whose data could be useful for the creation of teacher training programs.

Keywords: Early Algebra, Primary Education, Algebraic Thinking, Functional Thinking.

Estratégias utilizadas por futuros professores do Ensino Fundamental em uma tarefa de Relacionamento Funcional

RESUMO

Contexto: A proposta curricular da álgebra inicial visa promover formas algébricas de pensar desde os primeiros níveis de ensino. O pensamento funcional é uma abordagem pela qual se pretende promover o pensamento algébrico nos alunos. Atualmente, vários programas curriculares introduzem noções relacionadas com este pensamento. No entanto, no futuro professor este tipo de pensamento teve pouca influência, surgindo a necessidade de investigar a forma como abordam as tarefas a ele relacionadas, a fim de prepará-los adequadamente para o ensino**. Objetivo**: Analisar as estratégias utilizadas pelos futuros professores chilenos da Educação Básica quando resolvem uma tarefa que implique a generalização de uma relação funcional**. Design**:

Seguimos uma metodologia qualitativa a nível exploratório-descritivo. **Ambiente e participantes:** A amostra foi constituída por 18 futuros professores do Ensino Fundamental de uma universidade chilena. **Coleta e análise de dados**: Os dados foram coletados por meio de uma prova escrita em um grupo de 18 futuros professores que estavam no primeiro ano de formação. Fazemos uma análise qualitativa dos dados. **Resultados**: destacamos a diversidade de estratégias aritméticas e funcionais utilizadas pelos futuros professores. Além disso, destacamos as trajetórias que esses professores percorreram na resolução da tarefa, onde a grande maioria começa com estratégias aritméticas e termina com estratégias funcionais. **Conclusões**: esta pesquisa possibilitou identificar as estratégias utilizadas pelos futuros professores da Educação Básica e cujos dados podem ser úteis para a elaboração de programas de formação de professores.

Palavras-chave: Álgebra Inicial, Educação Básica, Pensamento Algébrico, Pensamento Funcional.

INTRODUCCIÓN

El enfoque de enseñanza donde la aritmética precede a la enseñanza del algebra, provoca serias dificultades en el aprendizaje de las nociones algebraicas por parte de los estudiantes (Lins y Kaput, 2004; Molina, 2009). Es por tal motivo que, en los últimos años, la enseñanza del álgebra escolar ha tenido un cambio sustancial en la forma en que se ha llevado a cabo en el aula. Algunos de estos cambios centraron su interés en la incorporación de elementos algebraicos desde los primeros niveles educativos, tomando como base la aritmética presente el currículum de Matemática. Tal cambio se conoce como propuesta curricular *Early Algebra* y se sustenta en el carácter algebraico de la Aritmética (Molina, 2009). Esta propuesta, más que la manipulación de símbolos y sus técnicas, pretende que los estudiantes, desde edades tempranas, desarrollen modos de pensamiento algebraico cuyos objetivos están orientados a que identifiquen patrones y estructuras aritméticas, establezcan relaciones y generalizaciones y construyan formas de representar cada vez más sofisticadas (Brizuela y Blanton, 2014).

El pensamiento funcional, es un enfoque del *Early Algebra* y se considera como un tipo de pensamiento algebraico (Cañadas y Molina, 2016). Este pensamiento se centra en la comprensión del concepto de función, o de aquellas relaciones que se establecen entre las cantidades que covarían (Rico, 2006; Smith, 2008). Es usado como una forma de resolver problemas y permite que los estudiantes sean capaces de identificar patrones, representar y generalizar relaciones entre cantidades (Cañadas et al., 2016). Lo anterior son motivos suficientes para que este tipo de pensamiento sea considerado como una meta disciplinar en la enseñanza de las matemáticas (Rico, 2006) y que países como Australia, Canadá, China, Chile, Corea, Estados Unidos, Japón, Portugal y España, lo incorporen en sus currículos (Merino, et al., 2013; Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC], 2012a). En el currículum chileno destaca que los estudiantes deben ser capaces de identificar relaciones entre cantidades e indagar en cómo el cambio de una cantidad afecta a la otra (MINEDUC, 2012a).

En el contexto docente, se sugiere que el futuro profesor de Educación Primaria debe estar preparado para reconocer las relaciones que se establecen en el currículo escolar con respecto a contenidos algebraicos y en especial a los referidos al pensamiento funcional (MINEDUC, 2012b). Sin embargo, la enseñanza del álgebra en Educación Primaria se ha enfocado en propuestas didácticas centradas en patrones, ecuaciones e inecuaciones, lo que indica que el pensamiento funcional, no ha implicado en ellos, siendo un tema pendiente en su formación (Cañadas y Molina, 2016; Morales et al, 2018). Desde este prisma, es necesario que el futuro profesor de Educación Primaria se involucre en tareas que implique el pensamiento funcional, dado que, tienen escasa experiencia en ello (Blanton y Kaput, 2005; Morales et al., 2018). Este estudio es pertinente, porque la forma en que los futuros profesores conocen el contenido matemático, se relaciona con la forma en que ellos pensarán la enseñanza de ese contenido (Sánchez y Llinares, 2003), en especial lo relativo al pensamiento funcionales. En este artículo, nos centramos en dar respuesta a las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Qué características tienen las estrategias que emplean futuros profesores de Educación Primaria cuando resuelven una tarea que implica una relación funcional? Y
- ¿Qué trayectorias de resolución emplean?

ELEMENTOS TEORICOS

Pensamiento Funcional

El pensamiento funcional es catalogado como un tipo de pensamiento algebraico que se basa en la construcción, descripción representación y razonamiento con y sobre las funciones y los elementos que las constituyen (Cañadas y Molina, 2016). Este tipo de pensamiento se diferencia del aritmético porque este último se basa en conceptos numéricos y sentido de los números, el significado de las operaciones aritméticas, control de hechos básicos de la aritmética, cálculo mental y escritura de la aritmética, lectura y escritura de problemas verbales y habilidades aritméticas (Verschaffel y De Corte, 1996), mientras que el primero, si bien se apoya en el pensamiento aritmético, va mucho más allá, dado que desarrolla elementos algebraicos claves como "las cantidades variables, sus relaciones, la recursividad, la correspondencia entre valores de las variables o la utilización de diferentes sistemas de representación en un contexto de resolución de problemas" (Cañadas y Molina, 2016, p. 212).

Blanton, et al. (2015) catalogan al pensamiento funcional como aquel que implica generalizar las relaciones funcionales, representar y justificar estas relaciones a través del lenguaje natural, pictórico, tabular, gráficos, simbólico o algebraico y razonar con fluidez ante estas representaciones generalizadas para comprender y predecir el comportamiento de la función. Se dice que un estudiante pone de manifiesto pensamiento funcional cuando presta atención a dos o más cantidades covariables, identifica el tipo de relación entre esas cantidades, y es capaz de generalizar tal relación (Confrey y Smith, 1991; Smith, 2008). Las relaciones que se establecen entre las cantidades variables, la generalización y los sistemas de representación son claves en el pensamiento funcional. A continuación, detallamos estos elementos.

Relaciones funcionales

En el contexto del pensamiento funcional se pueden dar cuenta de tres relaciones: la recurrencia, la covariación y la correspondencia. La recurrencia es la más elemental dado que se deja implícita algún valor de alguna de las variables (Blanton y Kaput, 2005). Se define como aquella relación existente entre los valores de su mismo conjunto (Johnsonbaugh, 2005). Es decir, desde una sucesión de datos la relación de recurrencia expresa cada término de esa sucesión en función de sus antecesores (Castro, 1995). Por ejemplo, en un problema que relaciona la edad de Álvaro y la Edad de Carmen, donde Carmen es 5 años mayor que Álvaro y cuyo problema está modelado por la función $f(x)= x + 5$ (Morales et al., 2018), la edad de Carmen se halla sumando uno a su edad anterior, tal como se muestra en la representación tabular de la Figura 1. Esto quiere decir, que no hay una relación entre los valores de ambas variables, sino más bien una relación entre los valores de una de las variables (dependiente). En ocasiones, este tipo de relación obstaculiza la generalización porque es necesario saber un valor anterior de la variable dependiente para dar una respuesta satisfactoria (Morales, et al., 2018).

Figura 1

Patrón Recursivo.

Edad de Álvaro	Edad de Carmen
1	6
2	7
3	8
4	9

+ 1
+ 1
+ 1

Por su parte, la relación de covariación y correspondencia sí hacen referencia a una relación entre variables por las que comúnmente se les denomina relaciones funcionales (Blanton et al., 2011; Confrey y Smith, 1991; Smith, 2008). La relación de covariación alude al cambio de una variable y su incidencia en la otra variable. Se refiere a "un cambio simultaneo entre dos variables que se produce por la existencia de una relación entre ellas" (Gómez, 2016, p. 170). Identificar una relación de covariación es centrarse en aquellos cambios que se producen entre los valores de las variables independiente y dependiente. De esta manera se entiende que esta relación implica la observación de cómo dos valores de ambas variables, dentro de una relación funcional, varían de forma simultánea y coordinada (Blanton et al., 2011; Blanton y Kaput, 2005). Por ejemplo, en el contexto del problema antes mencionado la edad de Carmen se halla sumando uno a la edad de Carmen, dado que, la edad de Álvaro aumento en uno, como se muestra en la representación tabular de la Figura 2.

Figura 2

Relación funcional de covariación

Edad de Álvaro	Edad de Carmen
1	6
2	7
3	8
4	9

+1 +1
+1 +1
+1 +1

La correspondencia es aquella en que se asocia cada valor de la variable independiente con un único valor de la variable dependiente (Clapham, 1998). Esta relación se establece entre los pares correspondientes de los valores de ambas variables (Confrey y Smith, 1991; Smith, 2008). Identificar una correspondencia es centrarse en el patrón que permita determinar un único valor de la variable dependiente, dado un valor de la variable independiente (Blanton, et al., 2011). Por ejemplo, el problema anterior, hallar la edad de Carmen implica encontrar el patrón que lo determina, en este caso, sumar cinco a la edad de Álvaro. De esta manera se puede hallar cualquier edad de Carmen dado la edad de Álvaro, con el solo hecho de sumar cinco al valor de esta última.

Figura 3

Relación funcional de correspondencia

Edad de Álvaro	Edad de Carmen
1	6
2	7
3	8
4	9

$$\xrightarrow{+5}$$

Generalización

La generalización se considera como el núcleo central del álgebra y como un iniciador del aprendizaje algebraico (Mason, 1996; Strachota, 2016).

En el contexto del pensamiento funcional hay diversas connotaciones para definir la generalización y muchas de ellas coinciden en que el trabajo para alcanzar la generalización es importante hacerlo por medio de casos particulares. Por ejemplo, Kaput (2000) indica que la generalización es:

> extender deliberadamente el rango de razonamiento o comunicación más allá del caso o casos considerados, identificando explícitamente y exponiendo similitud entre casos, o aumentando el razonamiento o comunicación a un nivel donde el foco no son los casos o situación en sí mismos, sino los patrones, procedimientos, estructuras, y las relaciones a lo largo y entre ellos. (p. 6)

Por su parte, Kruteskii (1976) alude que la generalización es el proceso de alejarse de la situación concreta, o el proceso de abstracción de lo que es similar y relevante en la estructura de objetos, relaciones u operaciones. Cañadas y Castro (2007), con base en los trabajos de Polya, señalan que una vía para alcanzar la generalización es el trabajo y organización de diferentes de casos particulares y sugieren que un estudiante alcanza la generalización cuando es capaz de relacionar un patrón identificado con una regla general y no solo para algunos casos. Sin embargo, Mason (1996) considera que también es posible llegar a la generalización, por medio de un solo ejemplo o caso particular con unas características determinadas, que se conoce como ejemplo genérico. La generalización puede ser representada por sistemas de representación diversos.

Sistemas de representación

En este artículo nos centramos en las representaciones externas, las cuales hacen mención a "notaciones simbólicas o gráficas, específicas para cada noción, mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos matemáticos, así como sus características y propiedades más relevantes" (Castro y Castro, 1997, p. 96). Consideramos estas representaciones por ser las que permiten evidenciar las producciones que llevan a cabo los sujetos cuando resuelven tareas matemáticas (Merino, et al., 2013).

En el contexto del pensamiento funcional los sistemas de representación verbal, pictórico, tabular, gráfico y simbólico adquieren importancia dado que ayuda a entender el comportamiento de la función y permite evidenciar presencia de pensamiento funcional en ellos (Blanton *et al*., 2011; Cañadas et al., 2016, Cañadas y Molina, 2016). El sistema de representación verbal es aquel que hace mención al lenguaje natural que puede ser oral o escrito para expresar los conceptos matemáticos (Cañadas y Figueiras, 2011). Las representaciones pictóricas aluden a recursos visuales, como dibujos, que permiten expresar relaciones matemáticas y son primordial por ser representaciones propias y originales de los sujetos que resuelven tareas matemáticas (Blanton, et al., 2011; Cañadas y Figueiras, 2011). Las representaciones numéricas se sirven de números y operaciones expresados mediante lenguaje matemático (Merino, et al., 2013). La representación simbólica es de carácter alfanumérico cuya sintaxis viene descrita mediante una serie de reglas y procedimientos (Rico, 2009). Este sistema involucra símbolos y signos propios de las matemáticas que permiten expresar con exactitud y precisión las cantidades de las variables y las propias variables en una tarea de relación funcional. Este sistema de representación requiere de un pensamiento matemático sofisticado dado que permita expresar una relación funcional (Azcárate y Deulofeu, 1990; Blanton, 2008).

Estrategias de resolución de problema

Las estrategias son fundamentales en la resolución de problema, dado que la aplicación de una u otra ayudará a tener éxito en la resolución. Una estrategia se entiende como aquel "procedimiento o regla de acción que permite obtener una conclusión o responder a una cuestión haciendo uso de relaciones y conceptos, generales o específicos de una determinada estructura conceptual" (Rico, 1997, p. 31). Son diversos los autores que destacan la necesidad de indagar en las estrategias de resolución de problemas en el contexto funcional, dado que el contexto funcional los estudiantes manifiestan diversas dificultades para encontrar una estrategia adecuada (por ejemplo, Amit y Neria, 2008; Merino *et al*., 2013; Moss y Beatty, 2006). Teniendo en cuenta la definición anterior consideramos que las relaciones funcionales pueden ser vistas como estrategias de resolución cuando alguien se enfrenta a una tarea que involucra cantidades covariables.

ANTECEDENTES

Si bien existe un importante número de investigaciones sobre el conocimiento del profesor de Educación Primara en la asignatura de Matemática, los hay muy pocos en el contexto algebraico y sobre todo en pensamiento funcional. Los estudios realizados indican que futuros profesores de Educación Primaria manifiestan diferentes dificultades y errores al resolver tareas en un contexto funcional del álgebra. Por ejemplo, en el plano internacional el estudio TEDS-M, puso de manifiesto que futuros profesores de Educación Primaria presentaron dificultades para identificar una representación algebraica de tres números pares consecutivos y que en tareas de aplicación de funciones en contextos geométricos tuvieron un éxito limitado, siendo éstas muy desafiantes para ellos (Senk, et al., 2012). En el contexto chileno la evaluación nacional diagnóstica de la formación inicial docente da cuenta de que, en las respuestas de 1323 futuros profesores de Educación Primaria relativa a patrones y sucesiones, menos del 50% son correctas, lo que evidencia la escasa preparación de los futuros profesores en temas relacionados en el álgebra (MINEDUC, 2020). Desde el contexto investigador, Aké (2021) encontró que en una tarea funcional del tipo $f(x)=4x+2$, 18 de 40 profesores de Educación Primaria en formación, resolvieron la tarea de manera correcta estableciendo una regla funcional, pero utilizando el sistema de representación verbal en lugar del simbólico. Mientras que 11 de los 40, la resolvieron parcialmente correcta, centrándose solo en los casos particulares de la tarea y no así en el caso general. El resto de los futuros profesores (11) hicieron la tarea de manera incorrecta. De este estudio es destacable que 37 de los 40 futuros profesores emplearon representaciones pictóricas, numéricas y verbales en sus respuestas. Por su parte, el estudio de Polo-Blanco, et al. (2019) mostró que futuros profesores de Educación Primaria españoles y portugueses se les hace difícil establecer y generalizar una relación de correspondencia en una tarea de relación funcional en un contexto geométrico y que por lo general la abordaron por medio de estrategias de covariación y recursivas. Wilkie (2014) dio cuenta que, de 105 profesores de Educación Primaria australianos, un 30% de ellos manifestó un escaso nivel de pensamiento funcional en una tarea que implicó extender un patrón geométrico. Estos profesores otorgaron respuestas incorrectas, inapropiadas y resolvieron la tarea por medio de una estrategia basada en el patrón recursivo. Por su parte, solo el 70% de estos profesores generalizó la relación funcional, pero el 2% de ellos lo hizo por medio de una representación simbólica completa. Puede ser que estos antecedentes sean producto de la formación algebra inadecuada que estos futuros profesores han tenido en años anteriores, y que tiene sus raíces en el paso abrupto y desconectado entre la aritmética y el álgebra (Kaput, 2000). Tal caso lo observamos en Rodríguez-Domingo, et al. (2015) quienes dan cuenta de que estudiantes de Educación Secundaría se les hace difícil abordar tareas algebraicas, en especial, aquellas donde se traducir desde representaciones verbales a representaciones simbólica. Por tanto, estos antecedentes sugieren la necesidad de profundizar en el pensamiento funcional de futuros profesores de Educación Primaria en formación en contextos diversos.

METODOLOGÍA

Tipo de investigación

Esta investigación es de tipo exploratorio y descriptivo. De acuerdo a Hernández, et al. (2010) los estudios exploratorios se caracterizan por indagar en un tema poco estudiado y sobre los cuales existen dudas y se necesitan abrir nuevas perspectivas. Tal caso, sucede con esta investigación, se pretende indagar en aquello poco explorado como es el pensamiento funcional en futuros profesores de Educación Primaria y así abrir perspectivas de su conocimiento, posibles vía de formación e investigaciones futuras.

Sujetos de investigación

Los sujetos de investigación fueron 18 futuros profesores de Educación Primaria, los cuales en el momento de la recogida de datos estaban cursando el primer año de la carrea de pedagogía general básica con especialización en una universidad chilena. La muestra fue de carácter intencional y por el interés que tenían estos futuros profesores en participar de esta investigación. Los sujetos de investigación, solo han tenido formación en álgebra durante su formación secundaria, pero no así en sus estudios de pedagogía, por tanto, no estaban familiarizados con tareas de relaciones funcionales, tal cual se presentan en este estudio.

Instrumento de recogida de información

Utilizamos una prueba escrita para recoger la información. Esta prueba consistió en que los futuros profesores debían responder individualmente un problema que involucraba una relación funcional del tipo $f(x)=2x+2$. El problema propuesto fue adaptado del trabajo realizado por Carraher, et al. (2008) y cuyo contexto atendió a la relación funcional entre la cantidad de mesas y la cantidad de invitados. Para evidenciar la relación funcional entre las cantidades involucradas del problema que manifiestan futuros profesores, se formularon diversas preguntas con base en el modelo de razonamiento inductivo de Cañadas y Castro (2007). Es decir, por medio de preguntas por casos particulares y una pregunta general se buscó la generalización de quien resuelve la tarea (ver Tabla 1). Previa a la aplicación de este instrumento los participantes dieron la aprobación para participar en este estudio por medio de la firma y aceptación del consentimiento informado[1]. A continuación, en la Figura 4 mostramos el problema planteado en la prueba escrita y en la Tabla 1 mostramos las características de las preguntas realizadas.

[1] Este estudio no fue revisado por un comité de ética científico dado que no es parte de un proyecto de investigación, sino más bien, es un estudio que forma parte de la motivación de los autores. Por tanto, eximimos a la revista Acta Scientiae de las consecuencias derivadas de la misma, incluida la asistencia integral y eventual compensación por cualquier daño resultante a cualquiera de los participantes de la investigación.

Figura 4

Personas sentadas alrededor de mesas

Antonia está de cumpleaños y su mamá organiza mesas de forma cuadrada y sillas para que se sienten los invitados, de tal manera que en una mesa se podrán sentar cuatro personas a su alrededor y en dos mesas juntas se podrán sentar seis personas alrededor de ellas, como se muestra en la figura 1.

De acuerdo con lo anterior responde las siguientes preguntas realizando los procedimientos y cálculos correspondientes junto a explicación correspondiente.

Las preguntas realizadas a los futuros profesores de Educación Primaria, las mostramos en la Tabla 1.

Tabla 1

Tipos y ejemplos de preguntas

Tipo de Pregunta	Ejemplo de preguntas
Pregunta caso particular consecutivo cercano[2].	A. Si la mamá de Antonia ha juntado 3 mesas ¿Cuántas personas se podrán sentar alrededor de ellas? ¿Cómo lo sabes?

[2] Consideramos un caso particular cercano o lejano de acuerdo con la proximidad que tiene el número por el cual se pregunta, con respecto al inicial.

Tipo de Pregunta	Ejemplo de preguntas
Preguntas casos particulares no consecutivos cercanos.	B. Si la mamá de Antonia ha juntado 5 mesas ¿Cuántas personas se podrán sentar alrededor de ellas? ¿Cómo lo sabes? C. La mamá de Antonia ha juntado 10 mesas ¿Cuántas personas se podrán sentar alrededor de ellas? ¿Cómo lo sabes?
Preguntas caso particular no consecutivo lejano.	D. La mamá de Antonia ha juntado 50 mesas ¿Cuántas personas se podrán sentar alrededor de ellas? ¿Cómo lo sabes?
Pregunta general	E. La mamá de Antonia necesita encontrar una forma exacta de cómo hallar el número de invitados que se pueden sentar alrededor de cualquier número de mesas ¿De qué forma la mamá de Antonia podrá hallar la cantidad exacta de invitados que se pueden sentar alrededor de cualquier número de mesas?

Análisis de datos

Para analizar los datos definimos una serie de categorías con base en el marco conceptual, los antecedentes de investigación y las respuestas de los futuros profesores a cada una de las 5 preguntas realizada en la tarea. En la Tabla 2, presentamos las categorías que elaboramos y que usamos en esta investigación.

Tabla 2

Categorías de análisis

Categoría	Subcategoria	Descripción
Estrategia de pensamiento	Directa (E.1.1)	Respuesta numérica o verbal sin justificación o respuesta inadecuada.

aritmético (E.1)	Directa Pictórica (E.1.2)	Respuesta con justificación basada en una acción visual de la representación pictórica de la tarea o a través de la elaboración de dibujos y otorga una respuesta numérica.
	Proporcional (E.1.3)	Respuesta numérica o verbal basada en el razonamiento proporcional, “si en cinco mesas se ubican 12 invitados, en diez mesas se ubican 24 invitados, el doble”
Estrategia de pensamiento funcional (E.2)	Covariacional (E.2.1)	Respuesta numérica o verbal basada en la relación que se establece entre los valores de ambas variables, “si algo aumenta en uno, lo otro aumenta en dos”
	Correspondencia reductible (E.2.2)	Respuesta numérica o verbal basada en la relación que se establece en los pares de valores de las variables, de modo que en ella se puede aplicar axiomas de los números reales para llegar a una representación irreductible, “la cantidad de sillas es el doble de la cantidad de mesas, más seis, donde las mesas se restan dos previamente”.
	Correspondencia irreductible (E.2.3).	Respuesta numérica o verbal basada en una relación que se establece en los pares de valores de las variables, “la cantidad de sillas es el doble de la cantidad de mesas más dos”
Generalización (G)		Regla general para determinar la cantidad de invitados que se pueden ubicar alrededor una

	cantidad indeterminada de mesas”.

Consideramos como unidades de análisis las verbales (escritas), pictóricas, numéricas y simbólicas otorgadas por cada uno de los futuros profesores en cada una de las 5 preguntas que componen la tarea. En primer lugar, clasificamos cada una de las respuestas de los futuros profesores de acuerdo a las categorías: Estrategia pensamiento aritmético (E.1) y Estrategia pensamiento funcional (E.2). En segundo lugar, y una vez clasificadas las respuestas de los futuros profesores, las codificamos con base en las subcategorías que conforman E.1 y E.2 (ver Tabla 1), de tal manera que les otorgamos un valor a cada respuesta. En tercer lugar, una vez codificadas las respuestas las ordenamos en la Tabla 2 y que describimos el apartado de resultados. La descripción de las respuestas de los futuros profesores la complementamos con la noción de sistema de representación. Por último, analizamos las respuestas de los futuros profesores durante el transcurso de las 5 preguntas de la tarea, determinado así trayectorias de estrategias en sus respuestas.

RESULTADOS

A continuación, mostramos los hallazgos con respecto a las estrategias empleadas por los futuros profesores en las cinco preguntas que conforman la tarea. Posteriormente, describimos la trayectoria que ellos han desarrollado en las cinco preguntas realizadas. Para la descripción nos apoyamos de ejemplos representativos de las estrategias que ellos han empleado, junto con los sistemas de representación que han usado para justificar sus respuestas.

Estrategias de futuros profesores de Educación Primaria

En la Tabla 3 presentamos un resumen de las estrategias manifestadas por los futuros profesores de Educación Primaria. Identificamos con una letra P y un número a cada uno de ellos. Por ejemplo, P10 corresponde al futuro profesor número 10. Por su parte, cada estrategia está definida por un código que se detalla en la misma tabla.

Tabla 3

Estrategias de futuros profesores de Educación Primaria

N° futuro profesor	Estrategia por Pregunta				
	Pregunta A	Pregunta B	Pregunta C	Pregunta D	Pregunta E
P1	E.1.2	E.1.2	E.2.3	E.2.3	E.2.3^{G}
P2	E.1.2	E.1.2	E.2.2	E.2.2	E.2.2^{G}
P3	E.1.2	E.1.1	E.1.2	E.2.3	E.2.3^{G}
P4	E.2.3	E.2.3	E.2.3	E.2.3	E.2.3^{G}
P5	E.2.3	E.2.3	E.2.3	E.2.3	E.2.3^{G}
P6	E.2.1*	E.2.1	E.1.1	E.1.1*	E.1.1*
P7	E.1.2	E.2.2	E.2.2	E.2.2	E.2.2^{G}
P8	E.1.2	E.2.1	E.1.2	E.1.3*	E.1.1*
P9	E.1.2	E.1.2	E.1.3*	E.1.1*	E.1.1*
P10	E.2.2	E.1.2	E.2.2	E.2.2	E.2.2^{G}
P11	E.2.2	E.1.1	E.1.1	E.1.1	E.1.1
P12	E.1.2	E.1.2	E.1.3*	E.1.3*	E.1.1*
P13	E.2.2	E.2.1*	E.2.1*	E.2.1*	E.1.1*
P14	E.1.2	E.2.1	E.2.1	E.2.2	E.2.2^{G}
P15	E.1.2	E.2.2	E.2.2	E.2.2	E.2.2^{G}
P16	E.1.2	E.2.2	E.2.2	E.2.2	E.2.2^{G}
P17	E.1.2	E.1.2	E.1.2	E.1.3*	E.1.3*^{G}
P18	E.1.2	E.1.2	E.2.2	E.2.2*	E.2.3^{G}

***Nota*: N°P= Número futuro profesor; E.1.1=Directa; E.1.2=Directa Pictórica; E.1.3=Proporcional; E.2.1=Covariacional; E.2.2=Correspondencia reductible; E.2.3=Correspondencia irreductible; *Respuesta incorrecta; ^{G}=Generalización.**

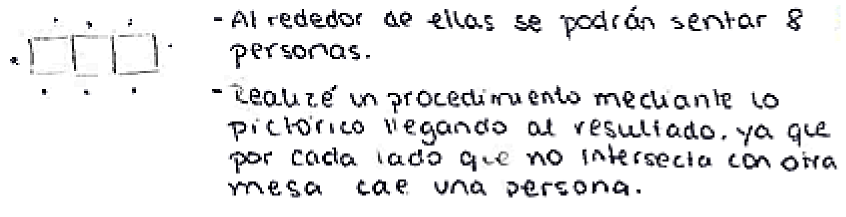
En la Tabla 3 mostramos las 7 estrategias encontradas en las respuestas de los futuros profesores en el desarrollo de la tarea. 3 de ellas corresponden al tipo de estrategias centradas en el pensamiento aritmético (E.1.1; E.1.2; E.1.3) y otras 3 basadas en el pensamiento funcional (E.2.1; E.2.2; E.2.3). A continuación, mostramos resultados obtenidos en cada pregunta de la tarea.

Pregunta A

En esta pregunta relativa a un caso particular consecutivo, la estrategia más empleada fue la del tipo pensamiento aritmético, dado que fue utilizada por 12 de los 18 futuros profesores. Además, en esta pregunta, la estrategia directa pictórica (E.1.2) fue la única de este tipo. Los futuros profesores que emplearon esta estrategia, en ocasiones otorgaron una respuesta numérica pero basada en una acción visual de la configuración de la representación pictórica de la tarea (mesas [cuadrados] y personas alrededor de las mesas [círculos]). Un ejemplo de este procedimiento es cuando los futuros profesores señalan que, en los lados de las mesas no yuxtapuestos, es posible ubicar personas. En otras ocasiones, elaboraron una representación pictórica, de modo que, continuaron la configuración de la representación de la tarea por medio de dibujos de las mesas (cuadrados) y personas (círculos) alrededor de cada una de ellas. Incluso, hubo algunos de los futuros profesores que respondieron a la pregunta por medio de las dos acciones anteriores. Tal caso lo evidenciamos en la respuesta de P8 (ver Figura 5), donde apreciamos que lo hace por medio de la representación pictórica, dibujando las mesas (cuadrados yuxtapuestos) y las personas alrededor de ellas (círculos negros). Anexo a lo anterior, otorgó la respuesta “8” numéricamente y la justificó por medio de una representación verbal, describiendo la acción visual, en la que indica que, en los lados de las mesas que no se yuxtaponen, se pueden ubicar personas.

Figura 5

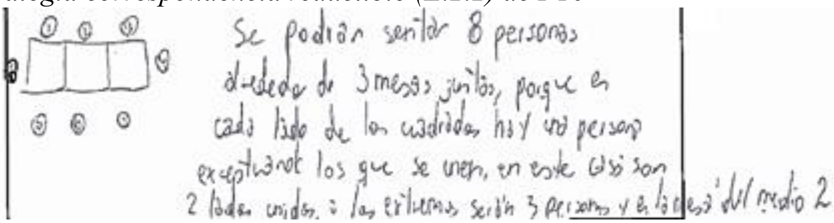
Estrategia directa pictórica (E.1.2) de P8



En esta pregunta las estrategias del tipo pensamiento funcional fueron las menos empleadas, dado que 6 de los 18 futuros profesores la emplearon. 4 de ellos emplearon la estrategia de correspondencia irreductible (E.2.2) y lo hicieron a través de la acción visual de la configuración de la representación de la tarea. Esto, les ayudó a determinar que, en cada mesa de los extremos solo es posible ubicar tres personas, mientras que en las centrales se ubican dos personadas (una al lado superior y otra a lado inferior de la mesa). Así, estos futuros profesores responden que alrededor de 3 mesas juntas se sientan “8 personas”. La respuesta de P10, refleja lo anterior (ver Figura 6), en la que, por un lado, se destaca la representación pictórica de las tres mesas (dibujos de las mesas, cuadrados yuxtapuestos) y las personas alrededor de las mesas (círculos). Anexo a lo anterior, justificó por medio de la representación verbal. Observamos en la respuesta de P10, indicios de una regularidad, al indicar que, para hallar la cantidad de personas que se pueden sentar alrededor de las tres mesas, es posible hacerlo sumando la cantidad de invitados que se sientan en las mesas de los dos extremos, más los que se sientan en las mesas centrales.

Figura 6

Estrategia correspondencia reductible (E.2.2) de P10

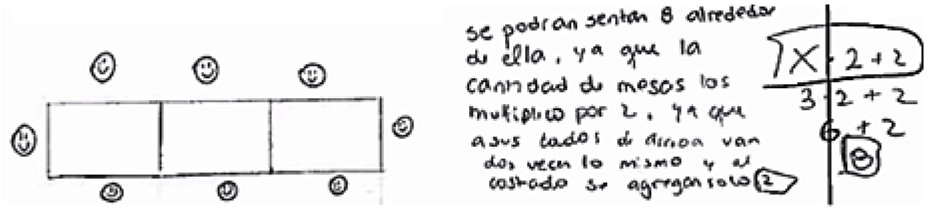


Por su parte, la estrategia de correspondencia irreductible (E.2.3), fue empleada por 2 de los 6 futuros profesores. Ellos determinaron que, para hallar la cantidad de personas que se sientan alrededor de 3 mesas, se puede hacer multiplicando 3 (relativo a la cantidad de mesas) por 2 (porque en cada mesa se ubican dos personas, lado superior y lado inferior) y al producto se le suman otros 2 (que son las personas que se ubican en los extremos: círculos de la izquierda y derecha de la representación de las mesas, ver Figura 7). La respuesta de P4 es la que representa la descripción anterior (ver Figura 7). Se destaca en su respuesta los diferentes sistemas de representación empleados. Inicialmente usó la representación pictórica de modo que continúo la configuración de la tarea por medio del dibujo (cuadrados yuxtapuestos que representan las mesas y círculos que representan a las personas alrededor de las mesas). Posteriormente, determinó numéricamente, la cantidad de personas que se pueden sentar alrededor de las mesas: “8 alrededor de ellas”. Además, empleó la representación verbal para explicar el procedimiento seguido en la estrategia. Usó la representación simbólica, en la que se destaca el uso de la letra “*X*” para representar la cantidad de mesas y que, posteriormente, reemplazó por el número 3 (cantidad de mesas considerada en la pregunta).

Finalmente, opera multiplicándolo 3 por 2 y a cuyo producto le suma 2 (personas que se ubican en cada extremo), obteniendo así 8 como respuesta.

Figura 7

Estrategia de relación funcional irreductible (E.2.3) por P4.



Pregunta B

En esta pregunta relativa a un caso particular no consecutivo, las estrategias del tipo pensamiento aritmético (E.1) y pensamiento funcional (E.2) fueron empleadas coincidentemente por 9 de los 18 futuros profesores, respectivamente. En la primera estrategia, 7 futuros profesores utilizaron la estrategia directa pictórica (E.1.2) y 2 utilizaron la estrategia directa (E.1.1). Destacamos que estos 2 últimos, no emplearon una justificación en su respuesta, por ejemplo, P11, respondió a esta pregunta “12 personas” si bien es correcta, no hay evidencia de cómo llegó a esa respuesta.

De los 9 futuros profesores que utilizaron la estrategia del tipo pensamiento funcional (E.2), 3 emplearon la estrategia covariacional (E.2.1), 4 la estrategia correspondencia reductible (E.2.2) y 2 la estrategia correspondencia irreductible (E.2.3). Destacamos que en esta pregunta apareció la estrategia E.2.1. Un ejemplo de ello, es la respuesta de P14, dado que, frente a la pregunta sobre cuántas personas se sientan en 5 mesas, respondió verbal y numéricamente: “12 personas, ya que al agregar dos mesas más, serían 2 personas por lado de estas (es decir cuatro)”. Por tanto, observamos que P14 centró su atención en cómo el cambio del valor de la variable independiente (cantidad de mesas) afectó al valor de la variable dependiente (cantidad de personas). En este caso, aumentó en 2 la cantidad de mesas y aumentó en 4 la cantidad de personas.

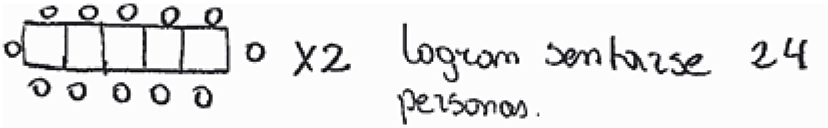
Pregunta C

En esta pregunta relativa a un caso particular no consecutivo, la estrategia más empleada fue la del tipo pensamiento funcional, dado que la utilizaron 11 de los 18 futuros profesores. 6 de ellos utilizaron la estrategia de correspondencia reductible (E.2.2), 3 utilizaron la estrategia de correspondencia irreductible (E.2.3), y 2 emplearon la estrategia covariacional (E.2.1).

En esta pregunta la estrategia basada en el pensamiento aritmético fue la menos empleada, dado que 7 de los 18 futuros profesores la utilizaron. 3 de ellos utilizaron la respuesta directa pictórica (E.1.2), 2 emplearon la estrategia respuesta directa (E.1.1) y otros 2 la estrategia proporcional (E.1.3). En la Figura 8 destacamos la respuesta de P12 que representa a la estrategia proporcional, aunque es incorrecta. P12, había respondido anteriormente que para cinco mesas (pregunta B) se pueden sentar 12 personas alrededor de ellas, sin embargo, cuando se le preguntó por cuantas personas se pueden sentar alrededor de 10 mesas (pregunta C), respondió "24 personas", es decir, duplicó la cantidad de personas obtenidas en la pregunta anterior (de 12 a 24 personas). Esto lo hace porque la cantidad de mesas entre la pregunta B y C también se duplicó (de 5 a 10 mesas). Destacamos que P12, respondió representando pictóricamente 5 cuadrados yuxtapuestos y 12 círculos alrededor de las mesas (en ambos casos mostrados en la respuesta de la pregunta anterior B), junto a la expresión "x2" que representa a la acción de multiplicar por 2 la cantidad de círculos (12). De esta manera P12, obtuvo 24 personas como respuesta para 10 mesas juntas. Si bien el razonamiento empleado es proporcional, su respuesta es incorrecta porque no considera la relación funcional que implica la tarea.

Figura 8

Estrategia proporcional incorrecta (E.1.3) de P12.



Pregunta D

En esta pregunta relativa a un caso particular no consecutivo lejano, la estrategia más recurrente fue la del tipo pensamiento funcional, dado que la utilizaron 12 de los 18 futuros profesores. Entre este tipo de estrategia, 7 de ellos utilizaron la estrategia de correspondencia reductible (E.2.2), 4 utilizaron la estrategia de correspondencia irreductible (E.2.3), y solo 1 empleó la estrategia covariacional (E.2.1).

En esta pregunta el tipo de estrategia basada en el pensamiento aritmético fue la menos recurrente, dado que 6, de los 18 futuros profesores la utilizaron. 3 de ellos utilizaron la respuesta directa (E.1.1) y otros 3 la estrategia proporcional (E.1.3).

Pregunta E

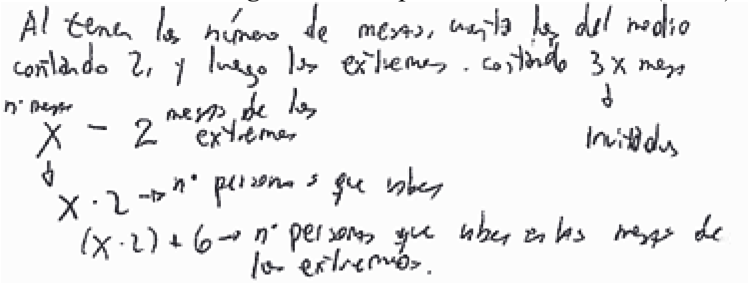
Se destaca en la Tabla 3, que 12 futuros profesores generalizaron la estrategia utilizada y 6 no lo hicieron. 6 de ellos lo hicieron utilizando la estrategia de correspondencia reductible (E.2.1). 5 lo hicieron utilizando la estrategia de correspondencia irreductible (E.2.3). Sólo 1 lo hizo utilizando la estrategia del tipo pensamiento numérico de proporcionalidad (E.1.3).

Como la tarea propuesta en esta investigación buscaba que, a través, del razonamiento inductivo los futuros profesores generalizaran la estrategia empleada. A continuación, mostramos ejemplos concretos de sus respuestas relativa a la forma en cómo lo hicieron.

En la Figura 9 mostramos la generalización realizada por P10. Observamos en su respuesta que siguió el patrón considerando que, en cada mesa de los extremos se ubican 3 personas alrededor de ellas, y en cada mesa del centro se ubican 2 personas. Observamos que, P10 recurre a una representación simbólica para hacer la generalización de tal modo que, asignó la letra "X" para representar a la cantidad de mesas. A continuación, aunque no lo dice explícitamente, representó simbólicamente la cantidad de mesas centrales con la expresión "X-2". Una vez que realizó lo anterior, igualó las representaciones "X-2" con "X", donde ambas representan la cantidad de mesas centrales. Finalmente, P10 concluyó que, para hallar la cantidad de personas que se pueden sentar alrededor de cualquier número de mesas, es a través de la representación simbólica (X*2) + 6, donde 6 es la cantidad total de personas que se ubican alrededor de las mesas de ambos extremos.

Figura 9

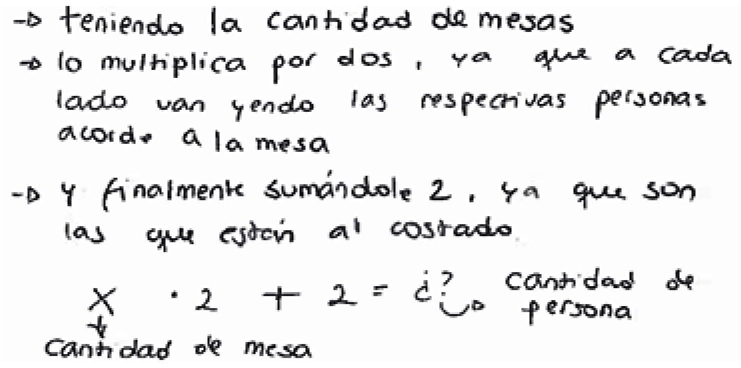
Generalización de la estrategia de correspondencia reductible (E.2.2) de P10.



En la Figura 10 observamos la respuesta P4 relativa a la generalización de la estrategia de correspondencia irreductible (E.2.3) realizada. Inicialmente, generalizó verbalmente describiendo la manera en cómo se podría calcular la cantidad de personas que se ubican alrededor de cualquier cantidad de mesas. Posteriormente, hace uso de la representación simbólica “*X**2 + 2 = *¿?*”, donde “x” representa la cantidad de mesas y la expresión “¿?” representa el total de personas que se pueden sentar alrededor de cualquier cantidad de mesas.

Figura 10

Generalización de la estrategia correspondencia irreductible (E.2.3) de P4



En la Figura 11 observamos la generalización de la estrategia proporcional (E.1.3) realizada por P17. Para generalizar se apoyó en las respuestas a las preguntas previas (C y D), dado que respondió incorrectamente “110 personas para 50 mesas” (pregunta D), producto de la multiplicación por 5 de las 22 personas que corresponden a 10 mesas (pregunta C). A partir de lo anterior, empleó ejemplos concretos que también ayudaron a su generalización, pero siempre apoyado de una cantidad previa. Este futuro profesor se valió de la representación verbal y numérica para expresar la generalización.

Figura 11

Generalización de la estrategia de proporcionalidad (E.1.3) de P17

> Si son cantidades pequeñas como 3,5,7, podría dibujarlas y ver la cantidad y ya llegando a números más grandes podríamos usar la multiplicación, como vimos anteriormente teniendo el dato de las 10 mesas podríamos sacar cantidades grandes como 60 mesas(22x6=132), 70 mesas(22x7=154).

Trayectoria de estrategias de futuros profesores de Educación Primaria

A partir de la Tabla 3 elaboramos la Tabla 4 en la que mostramos las trayectorias realizadas por los futuros profesores en las 5 preguntas de la tarea.

Tabla 4

Trayectoria realizada por futuros profesores en las 5 preguntas de la tarea.

Trayectoria	Tipo de estrategia (y futuros profesores)
Conservación del Tipo Estrategia	E.1 (P9-P17-P12) E.2 (P4-P5-P15)
Cambio del Tipo de Estrategia	E.1 a E.2 (P1-P2-P3-P7-P14-P16-P18) E.2 a E.1 (P6-P11-P13)
Cambio Reiterado del Tipo de Estrategia	E.1 a E.2 a E.1 (P8) E.2 a E.1 a E.2 (P18)

***Nota*. E.1=Estrategia de pensamiento aritmético; E.2=Estrategia de pensamiento funcional.**

En la Tabla 4 observamos que los futuros profesores efectuaron tres trayectorias cuando respondieron a las 5 preguntas de la tarea. La primera de ellas alude a la Conservación del Tipo de Estrategia, esto quiere decir que los futuros profesores mantuvieron una misma estrategia en la resolución de las 5 preguntas planteadas de la tarea; la segunda hace referencia al Cambio del Tipo de Estrategias donde los futuros profesores inician con una estrategia determinada que posteriormente cambian; y la tercera alude al Cambio Reiterado del Tipo de Estrategia, aquí los futuros profesores inician con una estrategia determinada, continúan con una diferente y finalizan usando la estrategia inicial u otra.

Además, observamos que, la trayectoria Cambio del Tipo Estrategia, fue la más recurrente, dado que la evidenciamos en 10 de los 18 futuros profesores. Destacamos que, de estos 10 futuros profesores, 7 de ellos cambiaron de una estrategia de pensamiento aritmético (E.1) a una estrategia basada en pensamiento funcional (E.2). Un ejemplo de esta trayectoria, son las respuestas de P1 (ver Tabla N°1), dado que en las preguntas A y B respondió empleando la estrategia E.1.2 y en las preguntas C, D y E, respondió empleando la estrategia E.2.3. Además, P1 generalizó verbalmente la estrategia E.2.3, dado que respondió a la pregunta E: “la cantidad de mesas disponibles se multiplica por 2 y debo sumar 2 espacios disponibles en la cabecera de cada extremo”. Los otros tres futuros profesores, cambiaron de una estrategia basa en pensamiento funcional (E.2) a otra basada en pensamiento aritmético (E.1). Ellos al inicio emplearon una estrategia basada en el pensamiento funcional, sin embargo, a medida que fueron avanzando en las preguntas, manifestaron una estrategia basada en pensamiento aritmético. Tal situación se representa en las respuestas de P13 (ver Tabla 3) que en las preguntas A, B, C y D mantuvo una estrategia basada en pensamiento funcional (aunque con respuesta incorrecta), sin embargo, en la pregunta de generalización (E) empleó una estrategia basada en pensamiento aritmético, dado que respondió: “podría multiplicar las mesas por la cantidad de personas que pueden caber en ellas […]”. Si bien P13 respondió por medio de una multiplicación, en su respuesta no hay evidencia de una estrategia basada en pensamiento funcional.

Por su parte, la trayectoria de Conservación del Tipo Estrategia fue la segunda más recurrente, dado que la evidenciamos en 6 de los 18 futuros profesores. Destacamos que 3 de estos futuros profesores conservaron el tipo de estrategia de pensamiento aritmético (E.1) y otros 3 mantuvieron la estrategia de pensamiento funcional (E.2).

Finalmente, observamos que en lo referido a la trayectoria Cambio Reiterado del Tipo de Estrategia fue la menos frecuente, dado que la evidenciamos en 2 futuros profesores (P8 y P18). P8 inicia utilizando una estrategia de pensamiento aritmético (E.1). Luego, recurre a una estrategia basada en el pensamiento funcional (E.2), y posteriormente retorna a la estrategia con la cual inicio (E.1). Por su parte, P18 inicia con una estrategia basada en pensamiento funcional (E.2), para continuar con una estrategia basada en pensamiento aritmético (E.1) y termina la tarea retomando la estrategia usada inicialmente.

CONCLUSIONES

En este estudio hemos puesto de manifiesto la variedad de estrategias que futuros profesores de Educación Primaria utilizan para resolver una tarea que involucra una relación funcional. Destacamos que, inicialmente, el tipo de estrategia predominante fue del tipo pensamiento aritmético, donde la respuesta directa (E.1.1) y la respuesta directa pictórica (E.1.2) fueron las más empleadas. Lo anterior deja de manifiesto la dificultad que esta tarea presenta en los futuros profesores para establecer una relación funcional de manera espontánea. Sin embargo, a medida que avanzaron las preguntas, la mayoría de los futuros profesores cambiaron sus estrategias a las del tipo pensamiento funcional. Esto puede deberse que al preguntar por casos lejanos (pregunta D) implique un cambio a una estrategia más eficaz, enfocada en una relación funcional. Un ejemplo de lo anterior, son las respuestas de P3 (ver Tabla 3) donde en las preguntas A, B y C empleó una estrategia del tipo pensamiento aritmético, mientras que en las preguntas D y E empleó una estrategia el tipo pensamiento funcional la cual generalizó. De esta manera enfatizamos la importancia del diseño de la tarea realizado en este estudio, en la que nos basamos en el modelo de razonamiento inductivo de Cañadas y Castro (2007) que sugiere que a partir de casos particulares se pretende llegar a la generalización.

Destacamos casos excepcionales de futuros profesores que lograron emplear una estrategia del tipo pensamiento funcional desde el inicio. Tal caso es P4 (ver Tabla 3), en donde comenzó con una estrategia de pensamiento funcional la que mantuvo en las demás preguntas generalizando de manera simbólica. Este hecho puede deberse a la formación que ha tenido este futuro profesor en su escolaridad previa o a sus competencias matemáticas que le permitió resolver este tipo de tarea.

Los sistemas de representación nos ayudaron a describir las respuestas de los futuros profesores participantes de esta investigación, aunque no se hizo un análisis exhaustivo de los mismos. Sin embargo, podemos mencionar que algunos de los futuros profesores que generalizaron los hicieron verbalmente (p. ej., P1) mientras que otros los hicieron simbólicamente (p. ej., P4, ver Figura 7). Este hallazgo contrasta los hallados por Aké (2021) donde futuros profesores de Educación Primaria solo representaron una relación funcional de manera verbal. Los sistemas de representación que emplean futuros profesores de Educación Primaria, serán analizados en estudios próximos.

Destacamos que las estrategias del tipo funcional fueron las más empleadas por los futuros profesores, donde la estrategia de correspondencia reductible e irreductible predominó en lugar de la covariación y fue la única en ser generalizada, lo que puede indicar que es más accesible para los futuros profesores. Es importante mencionar que, en este estudio, entre las estrategias usadas por los futuros profesores, no se halló la relación de recurrencia, tal cual aparece en estudios previos (Polo-Blanco, et al., 2019; Wilkie, 2014). Este resultado puede deberse al contexto que enmarca la tarea propuesta, el cual es familiar y cercano a los futuros profesores, en lugar de los contextos geométricos y tablas de funciones presentadas en tareas de investigaciones previas. En este sentido, se abre una posible vía de investigación centrada en cómo el contexto de las tareas contribuye a promover estrategias del tipo pensamiento funcional, en futuros profesores de Educación Primaria.

Con respecto a las trayectorias realizadas por los futuros profesores en las 5 preguntas de la tarea, encontramos una diversidad de ellas. Por un lado, la Conservación del Tipo Estrategia la mantuvieron 3 futuros profesores, en la que se destaca la conservación de la estrategia del tipo pensamiento funcional. Con respecto al Cambio del Tipo de Estrategia, la mayoría (7), inicialmente, emplearon una estrategia del tipo pensamiento numérico y posteriormente cambiaron a una estrategia del tipo pensamiento funcional, lo que indica una modificación en su razonamiento para abordar la tarea desde una perspectiva funcional. Por otro lado, destacamos que hubo profesores que tuvieron una trayectoria de Cambio Reiterado del Tipo de Estrategia, donde uno de ellos (p. ej., P8) empleó al inicio una estrategia del tipo pensamiento aritmético, para posteriormente cambiar al tipo pensamiento funcional, finalizando con la estrategia empleada en el inicio. Lo anterior da cuenta de la variabilidad del razonamiento de parte de un sujeto que resuelve una tarea de estas características. Creemos importante seguir indagando sobre aquellos aspectos que condicionan a los futuros profesores a realizar estos cambios de estrategias.

Las investigaciones recientes dan cuenta que alumnos desde las primeras edades educativas son capaces de resolver tareas que implica nociones algebraicas, como las relativas al pensamiento funcional (p. ej., Blanton, et al., 2015; Cañadas, et al., 2016; Morales, et al., 2016; Pinto y Cañadas, 2018). Es por esta razón, que el futuro profesor de Educación Primaria debe estar preparado para propiciar la enseñanza del álgebra a través de tareas y actividades que favorezcan la promoción de estrategias funcionales en los estudiantes. De esta manera coincidimos con Kieran (2017) sobre la necesidad de brindar oportunidades a los futuros profesores para promover su pensamiento algebraico y de conectarlo con el currículum de Educación Primaria. Lo anterior nos plantea gran desafío a la formación de profesores, que es promover programas de formación orientados a que los futuros profesores de Educación Primaria se desarrollen profesionalmente, de tal manera que sean capaces de generar cambios significativos en sus prácticas, lo que podría impactar favorablemente en los aprendizajes de sus alumnos (Blanton y Kaput, 2005). Para tal propósito, puede ser apropiado la introducción de tareas presentada en este estudio, como una forma de promover el pensamiento funcional en los futuros profesores.

DECLARACIÓN DE CONTRIBUCIÓN DE LOS AUTORES

R.M.M. y J.P. concibieron la idea de la investigación presentada. Ambos investigadores recopilaron los datos y participaron activamente en el desarrollo de la teoría, la metodología, organización y análisis de los datos, discusión de resultados.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos que respaldan los resultados de esta investigación serán puestos a disposición por el autor de correspondencia R.M.M, previa solicitud razonable.

AGRADECIMIENTOS

Centro de Investigación en Educación Matemática y Estadística (CIEMAE). Universidad Católica del Maule.

REFERENCIAS

Aké, L.P. (2021). El carácter algebraico en el conocimiento matemático de maestros en formación. *Tecné, Episteme y Didaxis: ted*, (49), 15-34. https://doi.org/10.17227/ ted.num49-9871

Amit, M. y Neria, D. (2008). "Rising to the challenge": Using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students. *ZDM*, *40*(1), 111-129.

Azcárate, C., y Deulofeu, J. (1990). *Funciones y gráficas*. Síntesis.

Blanton, M. y Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(5), 412-446.

Blanton, M., Levi, L., Crites, T. y Dougherty, B. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3-5*. National Council of Teachers of Mathematics.

Brizuela, B., Blanton, M., Gardiner, A. M., Newman-Owens, A. y Sawrey, K. (2015). A first grade student's exploration of variable and variable notation. *Estudios de Psicología*, *36*(1), 138-165

Brizuela, B. y Blanton, M. (2014). El desarrollo del pensamiento algebraico en niños de escolaridad primaria. *Revista de Psicología (UNLP), 14*, 37-57.

Cañadas, M., Brizuela, B. M. y Blanton, M. (2016). Second graders articulating ideas about linear functional relationships. *The Journal of Mathematical Behavior, 41*, 87-103.

Cañadas, M. C. y Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA, 1*(2), 69-81.

Cañadas, M. C. y Figueiras, L. (2011). Uso de representaciones y generalización de la regla del producto. *Infancia y Aprendizaje*, *34*(4), 409-425.

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Comares.

Carraher, D.W., Martinez, M. y Schliemann, A.D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM The International Journal on Mathematics Education 40*(1), 322.

Castro, E. (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales*. Comares.

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. In: L. Rico (Coord.), *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). ICE UB/Horsori.

Confrey, J. y Smith, E. (1991). A framework for functions: Prototypes, multiple representations and transformations. In: R. Underhill (Ed.), *Proceedings of the 13th annual meeting of the North American Chapter of The International Group for the Psychology of Mathematics Education*. (pp. 57-63). PME.

Clapham, C. (1998). *Diccionario de matemáticas*. Complutense.

Gómez, B. (2016). Sobre el análisis didáctico de la razón. In: E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz, y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico*. (pp. 165-174). Comares.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2010). *Metodología de la Investigación*. Mc Graw Hill.

Johnsonbaugh, R. (2005). *Matemáticas discretas* (6a ed.). Pearson.

Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*. National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kieran, C. (2017). *Teaching and learning algebraic thinking with 5-to 12-year-old: The global evolution of an emerging field of research and practice*. Springer.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. University of Chicago Press.

Lins, R. y Kaput, J. (2004). The early development of algebraic reasoning: the current state of the field. En K. Stacey, H. Chick y M. Kendal (Eds.), *The teaching and learning of algebra. The 12th ICMI Study*. (pp.47-70). Kluwer.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En *Approaches to algebra*. (pp. 65-86). Springer.

Merino, E., Cañadas, M. y Molina, M. (2013). Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de Educación Primaria en una tarea de generalización. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 2*(1), 24-40.

Ministerio de Educación de Chile (2012a). *Bases curriculares de matemática educación básica*. Autor.

Ministerio de Educación de Chile (2012b). *Estándares Orientadores para egresados de carreras de pedagógica en educación básica*. Autor.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA, 3*(3), 135-156.

Morales, R., Cañadas, M. C., Brizuela, B. y Gómez, P. (2018). Relaciones funcionales y estrategias de alumnos de primero de educación primaria en un contexto funcional. *Enseñanza de las Ciencias*, *36*(3), 59-78.

Moss, J. y Beatty, R. (2006). Knowledge building in mathematics: Supporting collaborative learning in pattern problems. *Computer-Supported Collaborative Learning, 1,* 441-465.

Pinto, E., y Cañadas, M. (2018). Generalization in fifth graders within a functional approach. *PNA*, *12*(3), 173-184

Polo-Blanco, I., Oliveira, H. y Henriques, A. (2019). Portuguese and Spanish prospective teachers' functional thinking on geometric patterns. En U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen, y M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. (pp. 670-671). Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.

Rico, L. (1997). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria. En L. Rico (Coord.), *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 15-38). Horsori.

Rico, L. (2006). La competencia matemática en PISA. *PNA, 1*(2), 47-66.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA, 4*(1), 1-14.

Rodríguez-Domingo, S., Molina, M., Cañadas, M. y Castro, E. (2015). Errores en la traducción de enunciados algebraicos entre los sistemas de representación simbólico y verbal. *PNA, 9*(4), 273-293.

Sánchez, V., y Llinares, S. (2003). Four student teachers' pedagogical reasoning on functions. *Journal of mathematics teacher education*, *6*(1), 5-25.

Senk, S., Tatto, M., Reckase, M., Rowley, G., Peck, R. y Bankov, K. (2012). Knowledge of future primary teachers for teaching mathematics: An international comparative study. *ZDM, 44*(3), 307-324.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. In: J. Kaput, W. Carraher y M. Blanton (Eds), *Algebra in the early grades* (pp. 133-160). Routledge.

Strachota, S. (2016). Conceptualizing Generalization. *Open Mathematical Education Notes. 6*, 41-55.

Verschaffel, L. y De Corte, E. (1996). Number and arithmetic. En: A. BISHOP, et al. (Ed.). *International handbook of mathematical education*. (p. 99-137). Kluwer.

Wilkie, K. J. (2014). Upper primary school teachers' mathematical knowledge for teaching functional thinking in algebra. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *17*(5), 397-428.