


Compresión del concepto razón a través del modelo de Pirie y Kieren

Jhonatan Andres Arenas-Peñaloza ^a
Flor Monserrat Rodríguez-Vásquez ^b

^a Universidad de la Costa CUC, Departamento de Ciencias Naturales y Exactas. Posgrado en Educación. Departamento de Humanidades, Barranquilla, Colombia.

^b Universidad Autónoma de Guerrero, Facultad de Matemáticas. Posgrado en Educación Matemática, Chilpancingo, México

Recibido para publicación 11 sep. 2021. Aceptado después de la revisión 27 mar. 2022
Editora designada: Claudia Lisete Oliveira Groenwald

RESUMEN

Contexto: Investigaciones en Matemática Educativa, han puesto de manifiesto que estudiantes de primaria tienen una deficiente comprensión sobre el concepto razón debido a las dificultades que emergen desde su interpretación como fracción. **Objetivo:** Por lo que es necesario analizar el proceso de comprensión fundamentado desde el modelo teórico de Pirie y Kieren, que emerge al resolver tareas sobre el concepto razón. **Diseño:** El enfoque es de corte cualitativo, y el diseño de la investigación fue un estudio de caso. Se usó la técnica de observación de campo. **Contexto y participantes:** El estudio se llevó a cabo en una escuela primaria en el estado de Guerrero-México. Los casos se conformaron por cuatro estudiantes (11 – 12 años) inscritos al sexto grado. **Recolección de datos y análisis:** Los datos se recolectaron a través de un cuestionario (tarea) y una entrevista. Para el análisis de datos se usaron los ocho niveles de comprensión del modelo teórico. **Resultados:** Los resultados indican que los estudiantes no logran formalizar su proceso de comprensión en relación con el concepto de razón, debido a, las dificultades que presentan para aplicar correctamente estrategias matemáticas al resolver las tareas propuestas. **Conclusión:** Los resultados indican que, para alcanzar altos niveles de comprensión, es necesario realizar el proceso dinámico de redoblar entre niveles, puesto que se reflexiona sobre lo necesario para avanzar en el proceso de comprensión mismo.

Palabras claves: Matemática Educativa; Comprensión; Razón; Fracción; Educación básica.

Autor de correspondencia: Jhonatan Andrés Arenas-Peñaloza. Email: jarenas6@cuc.edu.co

Comprensão do conceito de razão através do modelo de Pirie e Kieren

RESUMO

Contexto: Pesquisas em Matemática Educacional mostraram que alunos do ensino fundamental têm uma compreensão deficiente do conceito de razão devido às dificuldades que emergem de sua interpretação como fração. **Objetivo:** Portanto, é necessário analisar o processo de compreensão com base no modelo teórico de Pirie e Kieren, que emerge ao resolver tarefas sobre o conceito de razão. **Desenho:** A abordagem é qualitativa, e o desenho da pesquisa foi um estudo de caso. Foi utilizada a técnica de observação de campo. **Contexto e participantes:** O estudo foi realizado em uma escola primária do estado de Guerrero-México. Os casos foram compostos por quatro alunos (11-12 anos) matriculados na sexta série. **Coleta e análise dos dados:** Os dados foram coletados por meio de questionário (tarefa) e entrevista. Para análise dos dados, foram utilizados os oito níveis de compreensão do modelo teórico. **Resultados:** Os resultados indicam que os alunos não conseguem formalizar seu processo de compreensão em relação ao conceito de razão, devido às dificuldades que apresentam em aplicar corretamente as estratégias matemáticas na resolução das tarefas propostas. **Conclusão:** Os resultados indicam que, para atingir níveis elevados de compreensão, é necessário realizar o processo dinâmico de redobrar entre os níveis, pois reflete sobre o que é necessário avançar no próprio processo de compreensão.

Palavras-chave: Matemática educacional; Entendimento; Razão; Fração; Educação básica.

INTRODUCCIÓN

Las matemáticas son una asignatura de gran importancia debido a que se vinculan con otras ciencias, sin embargo, parte de su contenido abstracto hace de ellas una asignatura no deseada por muchos estudiantes por las dificultades a las que se enfrentan para su aprendizaje. Ello ha desencadenado un múltiple de investigaciones en el campo de la Educación Matemática, desde la parte histórica, cognitiva, didáctica, entre otras. Por ejemplo, desde la parte cognitiva, un tema que ha tomado relevancia, es el estudio o valoración de la comprensión de un concepto matemático, donde se han generado diversos modelos o teorías que apuntan a la obtención de ciertas categorías de comprensión, con el objetivo de fortalecer la enseñanza o aprendizaje de los conceptos matemáticos (Çalişici, 2018; Rodríguez-Vásquez & Arenas-Peñaloza, 2021).

Particularmente, en educación básica primaria (6-12 años de edad), diversas investigaciones en el campo de la Educación Matemática, han señalado que los temas de matemáticas son difíciles de comprender por los estudiantes (Lamon, 2007; Fernández, Figueras, Monzó & Puig, 2009;

Fernández & Llinares, 2010; Buforn, Llinares & Fernández; 2018), entre ellos, el tema relativo al razonamiento proporcional, el cual abarca los conceptos de razón, proporción y fracción, los cuales son complicados de comprender tanto para estudiantes como docentes (Sanchez, 2013; Arican, 2019; Lamón, 2020; Wahyu, Kuzu, Subarinah, Ratnasari, & Mahfudy, 2020). En este nivel educativo, el aprendizaje de los conceptos de razón y proporción en los temas relacionados a las fracciones, constituye la base para comprender conceptos trascendentes y transversales curricularmente como el de porcentaje, ecuaciones y problemas de velocidad. Por ello, que es de vital importancia, estudiar el tema de la razón y detectar las dificultades que los estudiantes manifiestan al momento de desarrollar actividades que involucren la utilización del tópico.

Monteiro (2003) determinó que los profesores de matemáticas de la educación básica primaria, presentan dificultades cuando resuelven problemas que involucran el concepto de razón y proporción, debido a la falta de comprensión de los conceptos cuando eran estudiantes de la escuela primaria y secundaria. Asimismo, Fernández et al. (2009) manifestaron que tanto estudiantes como docentes presentan dificultad para construir y apropiarse correctamente del concepto de razón. Una de las dificultades, es que no logran desvincular a la razón del proceso aritmético de operar el numerador con el denominador. Al mismo tiempo, Ramírez y Block (2009) expresaron que, el tema de la proporcionalidad se presenta confuso en el currículo, ya que los planes de estudios y libros de texto de referencia para los docentes, no presenta una relación o diferencia pertinente entre las nociones de razón y fracción, por tanto, para mejorar la comprensión de los conceptos, se requiere una reorganización curricular.

Por su parte, en el currículo de la escuela primaria mexicana, la enseñanza del concepto de razón no está claramente definido, así como el vínculo entre el concepto de fracción, limitándolo sólo a una relación de representación (Ramírez & Block, 2009). Por ejemplo, en su plan y programa de estudio 2011, la noción de razón se evidencia en el bloque III en el tema proporcionalidad y funciones. Su contenido hace referencia a la comparación de razones en casos simples. Ahora, en el libro de texto de sexto grado (para el maestro), se presenta una característica del concepto “Una razón puede representarse con un número entero, fraccionario, decimal o mediante un porcentaje”. Algunos ejemplos que presentan son: 2 de cada 5 estudiantes son hombres, la cantidad de hombres puede representarse como $\frac{2}{5}$, 0.4 o 40% (Rosales et al., 2015, p.162).

Por otra parte, Çalışıcı (2018) establece que la dificultad de los estudiantes, se debe a que memorizan las fórmulas y el algoritmo en lugar de comprender el concepto razón y que, además, perciben el numerador y el denominador de fracciones como dos números enteros diferentes y no como una relación de magnitud entre dos cantidades. Todas las falencias, se evidencian en los resultados de pruebas estandarizadas de matemática, tanto a nivel internacional como nacional (PISA y PLANEA respectivamente), muestran que, en México el 57% de los estudiantes no alcanza el nivel básico de competencias en matemáticas y se encuentran por debajo del promedio (490 puntos) de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE). Lo cual pone de manifiesto que los estudiantes no alcanzan el nivel básico en matemáticas, es decir, pueden realizar procedimientos rutinarios (operaciones aritméticas en situaciones simples), pero presentan dificultades para identificar cómo una situación sencilla del mundo real puede ser representada matemáticamente (OCDE, 2016).

A nivel nacional, es conveniente destacar los resultados de las pruebas del plan nacional para la evaluación de los aprendizajes (PLANEA), aplicados a estudiantes de sexto grado de primaria en el año 2015, los cuales reflejan que, al término de dicho ciclo escolar, 6 de cada 10 estudiantes no han logrado adquirir los aprendizajes clave de Matemáticas. Concretamente, el 60% de los estudiantes de sexto grado de primaria alcanzaron el nivel I de logro (insuficiente) en Matemáticas, nivel donde se trabaja con el conjunto de los números naturales. Y el porcentaje más bajo de los estudiantes alcanzó el nivel IV de logro sobresaliente, nivel donde se trabajan con el razonamiento proporcional (razón, proporción y fracción) (INEE, 2015).

Debido a que los resultados de las investigaciones en mención y las pruebas estandarizadas muestran que los estudiantes de la educación básica, no han logrado adquirir aprendizajes que les permita comprender el razonamiento proporcional, es natural preguntar, ¿la falta de comprensión a qué se debe? ¿cuáles son los factores que impiden una buena comprensión del concepto razón? ¿cuál es la manera de proceder de los estudiantes al desarrollar una actividad que demande el uso del razonamiento proporcional?

Particularmente en esta investigación, se buscó conocer el proceso que siguen los estudiantes en la construcción del concepto de razón, para ellos se usó el modelo teórico de Pirie y Kieren (1994) buscando profundizar dónde radica la falta de comprensión que presentan los estudiantes de la escuela primaria sobre el tópico en estudio. Así, el objetivo de esta investigación fue analizar la comprensión de estudiantes de sexto año de nivel básico (11-12

años) cuando resuelven tareas sobre el concepto razón, representado mediante fracción, a partir de los niveles de comprensión propuestos por Pirie y Kieren. Es decir, se analizará el proceso continuo que realizan los estudiantes para concretar el objeto razón en tareas que promueven el uso de este concepto.

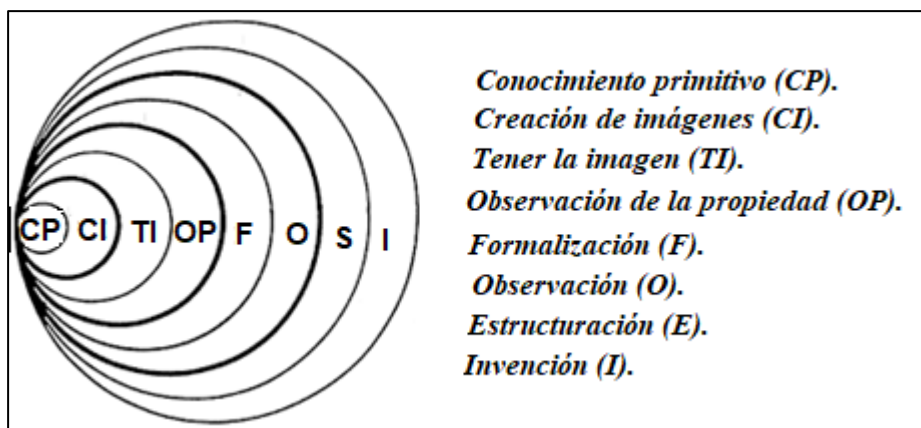
BASES TEÓRICAS

Se utilizó el modelo de Pirie y Kieren (1994), el cual surgió desde una perspectiva constructivista. El modelo describe el proceso de la comprensión matemática de manera dinámica, recursiva, nivelada pero no lineal (Pirie & Kieren, 1989), además reconoce a la comprensión, como *un proceso continuo que realiza un sujeto para concretar un objeto, el cual se construye de manera iterativa a partir de sus experiencias, para así construir, fortalecer o modificar su conocimiento.*

El modelo, se encuentra estructurado en ocho niveles (ver figura 1), que son usados para describir el proceso de comprensión que tienen estudiantes sobre un concepto matemático. En dichos niveles se puede progresar, no sólo avanzando, sino también retrocediendo a un nivel anterior, con el objetivo de reflexionar, o volver a trabajar acerca de comprensiones previas sobre un concepto matemático (Delgado, Codes, Monterrubio & Gonzalez, 2014). Los ocho niveles del modelo de comprensión expuesto por Pirie y Kieren son:

Figura 1

Niveles del modelo de Pirie y Kieren de 1994 (Pirie & Kieren, 1994)



Conocimiento primitivo (CP). En este primer nivel se empieza el proceso de la comprensión matemática. El nivel CP se refiere a todo lo que el estudiante conoce y sabe hacer antes de confrontarse con el nuevo concepto matemático a estudiar. Es importante señalar que, la palabra *Conocimiento primitivo* no se debe confundir con un nivel bajo de conocimiento matemático. Como Pirie y Kieren (1994) lo afirman: “Primitivo aquí no implica matemáticas de bajo nivel, sino que es más bien el punto de partida para el crecimiento de cualquier comprensión matemática particular” (p.170).

Creación de imágenes (CI). En el segundo nivel se evidencia cuándo un estudiante es capaz de hacer distinciones con base a sus capacidades y conocimientos anteriores, además, realiza acciones (físicas o mentales) con el fin de crear una idea del nuevo concepto matemático. Las imágenes no siempre son representaciones pictóricas, sino que se pueden expresar mediante el lenguaje o acciones específicas de los estudiantes.

Tener la imagen (TI). En este nivel, el estudiante es capaz de emplear una construcción mental sobre el concepto matemático, pero sin la necesidad de trabajar con ejemplos particulares o realizar una abstracción del concepto mismo; asimismo, el estudiante se ve en la necesidad de reemplazar las imágenes asociadas al concepto por una imagen mental del mismo. En específico, este nivel se alcanza, por ejemplo, cuando se logra establecer una representación (simbólica, pictórica, gráfica, entre otras) de la situación asociada al objeto matemático.

Observación de la propiedad (OP). Este nivel se alcanza cuando el estudiante puede utilizar o combinar aspectos de las imágenes mentales que ya posee, para construir propiedades específicas del concepto y tratar de generalizarlas.

Formalización (F). Da evidencia de cuándo el estudiante conoce las propiedades y es capaz de abstraer características comunes de esa imagen; además, en este quinto nivel, el estudiante trabaja el concepto matemático como un objeto formal y no hace referencia a una acción o imagen particular.

Observación (O). Se logra cuando el estudiante utiliza su pensamiento y lenguaje matemático formal, realizando reflexiones sobre enunciados formales y estableciendo conexiones entre conceptos matemáticos, que le permitan deducir patrones y regularidades al momento de expresar algoritmos y teoremas.

Estructuración (E). En este nivel el estudiante debe reflexionar en sus observaciones formales como una teoría y realizar justificaciones o

verificaciones de declaraciones a través de un argumento lógico o metamatemático.

Invención (I). En el último nivel, y se alcanza cuando el estudiante tiene la capacidad de desvincularse de las situaciones concretas y determinadas del concepto, ya que tendrá una comprensión completa del mismo, para luego emprender otras perspectivas que lo conduzcan a realizar hipótesis de otro problema o concepto. Como lo expresaron Pirie y Kieren (1994) “Una persona en este nivel tiene una comprensión estructurada completa y por lo tanto puede ser capaz de romper con los preconceptos que provocaron esta comprensión y crear nuevas preguntas que podrían convertirse en un concepto totalmente nuevo” (p. 171).

En relación con las características del modelo teórico, una de las más importante es el proceso dinámico de redoblar (MEEL, 2003). El *Folding back* (redoblar o volver hacia atrás), se identifica cuando una persona que está en un nivel de comprensión superior del modelo, vuelve a un nivel inferior al que ya estaba, para realizar una reexaminación de la comprensión, pero de una forma más enriquecida a la que tenía cuando trabajó en ese nivel.

Objeto Matemático

La noción de razón a lo largo de la historia, se ha manifestado en dos contextos: Entre números y entre cantidades de magnitud, en ambos, se han establecido relaciones con otros conceptos. Por ejemplo, fracción y cociente (Gairín & Oller, 2012). No obstante, una de las dificultades que se presenta para comprender el concepto de razón, es la ambigüedad que tiene precisamente con los conceptos fracción y cociente (Ramírez & Block, 2009).

Definición: La razón es un número abstracto, que expresa solo la relación que hay entre dos magnitudes, por lo que carece de especie. Geométricamente, es el número que resulta de comparar por cociente dos magnitudes de la misma especie. En general, si a y b son cantidades de una misma magnitud, su razón es el cociente o cociente indicado que resulta de dividir la medida de a entre la medida de b , se llama razón entre a y b , y se escribe $\frac{a}{b}$ o bien, $a:b$ (Caballero, Martínez & Bernárdez, 1970).

Por ejemplo, dada una colección de objetos (canicas) (Figura 2), se puede decir que las canicas blancas y negras están a una razón de 2 a 3 o $\frac{2}{3}$, es decir, que por cada 2 canicas blancas hay 3 canicas negras; también se puede

interpretar que las canicas negras y blancas están a una razón de 3 a 2 o $\frac{3}{2}$, es decir, que por cada 3 canicas negras hay 2 blancas.

Figura 2

Ejemplo pictórico del concepto de razón (Rojas, 2010)



Figura 3

Explicación del concepto razón en el libro V de los Elementos de Euclides (Casey, 1885)

4. If we consider two magnitudes of the same kind, such as two lines AB , CD , and if we suppose that AB is equal to $\frac{3}{4}$ of CD , it is evident, if AB be divided into 3 equal parts, and CD into 4 equal parts, that one of the parts into which AB is divided is equal to one of the parts into which CD is divided. And as there are 3 parts in AB , and 4 in CD , we express this relation by saying that AB has to CD the ratio of 3 to 4; and we denote it thus, 3 : 4. Hence the ratio 3 : 4 expresses the same idea as the fraction $\frac{3}{4}$. In fact, both are different ways of expressing and writing the same thing. When written 3 : 4 it is called a ratio, and when $\frac{3}{4}$ a fraction. In the same manner it can be shown that every ratio whose terms are commensurable can be converted into a fraction; and, conversely, every fraction can be turned into a ratio.

From this explanation we see that the ratio of any two commensurable magnitudes is the same as the ratio of the numerical quantities which denote these magnitudes. Thus, the ratio of two commensurable lines is the ratio of the numbers which express their lengths, measured with the same unit. And this may be extended to the case where the lines are incommensurable. Thus, if a be the side and b the diagonal of a square, the ratio of $a : b$ is

$$\frac{a}{b}, \text{ or } \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Entonces, la razón es un par ordenado de números a y b , que se pueden interpretar de varias formas. Por ejemplo, si se presenta la situación “En un frutero hay 1 manzana y 3 peras”, la razón puede darse como sigue:

- 1: 3, que significa que por cada manzana hay 3 peras.
- $\frac{1}{4}$ son manzanas y $\frac{3}{4}$ son peras.
- 0,25 son manzanas (1 dividido por 4, es decir, $\frac{1}{4}$).

- 25% son manzanas (0,25 como un porcentaje).

El significado se conecta, sin duda, al orden en que se consideren los números dados. La fundamentación del significado de razón, puede observarse en el libro V de los Elementos de Euclides (Casey, 1885), donde se define la razón como la relación mutua de dos magnitudes del mismo tipo con respecto a la cantidad. Y se ejemplifica considerando dos segmentos partidos igualmente (Ver figura 3).

METODOLOGÍA

La investigación es cualitativa, puesto que se interpreta el proceso de comprensión de estudiantes sobre un concepto matemático. La técnica empleada es la observación de campo, lo que permite realizar una observación directa y presencial de las acciones de los estudiantes en el aula de clases, plasmadas en notas de campo detalladas de dichos sucesos (Mcmillan & Schumacher, 2005).

Para ello, se realizó un estudio de caso, con la participación de cuatro estudiantes (11 – 12 años) inscritos al sexto grado de la educación básica mexicana de una escuela primaria de la ciudad de Chilpancingo de los Bravo estado de Guerrero, dos estudiantes presentaban desempeño académico alto (Caso I) y los otros dos (Caso II) rendimiento académico bajo. Se asignaron códigos para cada estudiante según el caso que conformaban, al caso I se les asignó los códigos E1 (estudiante 1) y E2 (estudiante 2), para el caso II fueron E3 (estudiante 3) y E4 (estudiante 4).

Los casos ya habían trabajado el bloque III del programa de estudio (SEP, 2011), bloque en el cual se presenta la caracterización del concepto de razón. Para recolectar los datos se usó el cuestionario (figura 4), la aplicación se llevó a cabo en lo colectivo, se desarrolló en dos sesiones, una por cada caso de estudio. Las sesiones fueron video-grabadas y se realizaron notas de clase. Asimismo, se realizó una entrevista para clarificar el proceso de resolución de la tarea. Los datos fueron transcritos y se confrontaron, interpretaron y se analizaron en relación con las características y niveles de acción del modelo teórico de Pirie y Kieren (1994).

Los responsables de la institución educativa así como los casos, fueron informados del estudio, y de las prácticas responsables de publicación

de datos, como son la garantía de anonimidad, el no lucro, y la recolección de datos con fines únicamente de investigación (Wager & Kleinert, 2011).

El cuestionario

El cuestionario consistió de una tarea de siete incisos (figura 4), en términos generales, con los cinco primeros se busca que los estudiantes reflexionen sobre dos situaciones para decidir cuál es la óptima, de acuerdo a la comparación de magnitudes, es decir, de acuerdo a la comparación de razones. Los últimos dos incisos, requieren que el estudiante utilice sus conocimientos previos sobre porcentaje, para así, identificar que ambas situaciones (mercado Baltazar y huerta de don José) son óptimas. El cuestionario se adaptó de una actividad del libro Desafíos Matemáticos de sexto grado edición para el maestro (Rosales et al., 2015). Los materiales y recursos que utilizaron los estudiantes para resolverla fueron hojas de papel, lápiz, goma (borrador) y sacapuntas.

Figura 4

Tarea “*¿Qué cantidad de naranjas quiero*” (Adaptación de Rosales et al., 2015).

Tarea: qué cantidad de naranjas quiero

En el mercado Baltazar, un kilo de naranjas consta de 9 piezas y cuesta \$10. Mientras que en la huerta de don José, 7 piezas de naranjas llegan a pesar un kilo y cuestan \$8.

- a) ¿Son comparables las dos situaciones? ¿Por qué?
- b) Representen gráficamente las dos situaciones.
- c) ¿Dónde comprarían las naranjas teniendo en cuenta la representación anterior? ¿Por qué?
- d) Expresen verbalmente la relación entre las cantidades de cada una de esas situaciones y escriban en forma de fracción ambas relaciones.
- e) Comparen las fracciones anteriores para determinar dónde es preferible comprar las naranjas. Justifiquen la respuesta.

Si en el mercado Baltazar el kilo de naranjas se oferta con un 20% de descuento en su precio normal.

- f) ¿Cuál sería el nuevo costo de un kilo de naranjas? Describan paso a paso su respuesta.
- g) Con ese descuento realizado en el mercado Baltazar ¿Dónde comprarían ahora el kilo de naranjas, huerta de don José o en el mercado? ¿Por qué?

Particularmente, con el inciso a) se buscó que el estudiante identificara que ambas situaciones (mercado Baltazar y huerta de don José) se expresan con la misma unidad de partida, por tanto, se puede realizar una comparación de razones para poder decidir cuál es la situación óptima para adquirir las naranjas. Además, en este inciso, de acuerdo al modelo teórico, el estudiante puede avanzar en su proceso de comprensión, desde el nivel *CP* o *CI*, dependiendo de la profundidad de análisis sobre el enunciado.

Con el inciso b) se quiso conocer la trascendencia de la representación verbal del enunciado a otro tipo de representación (numérica, pictórica o gráfica) que los estudiantes manifestaran. Específicamente, desde el modelo teórico lo relacionamos con el nivel *TI*. El inciso c) se diseñó con la finalidad de que los estudiantes a partir de representaciones creadas por ellos mismos, interpretaran y compararan situaciones para elegir la razón que permite elegir la situación óptima para comprar las naranjas. El d) tuvo como objetivo que los estudiantes modelaran una situación de la vida real a un lenguaje matemático (representación de fracciones). Con relación al modelo, se buscó que los estudiantes reflexionaran sobre la imagen que crearon de la situación, para poder avanzar al nivel *OP*.

El inciso e) tuvo como objetivo que los estudiantes pusieran en juego sus habilidades para interpretar y argumentar las estrategias de comparación utilizadas para elegir la situación óptima para comprar el kilo de naranjas. Con base en el modelo teórico, con este inciso se buscó que el estudiante logrará avanzar al nivel *F*, logrando desprenderse de la imagen que creó, proporcionando argumentos para llegar a una generalización.

Finalmente, en los incisos f) y g), se prevé que los estudiantes consideren una condición diferente para reinterpretar el problema de inicio. Ya que, a partir de sus conocimientos previos, deben establecer el nuevo costo del kilo de naranjas en el mercado Baltazar (*CP*), para así establecer las nuevas razones matemáticas (*CI* o *TI*), empezar a trabajar en ellas (*OP*), para lograr seleccionar la mejor opción de compra (*F*).

Análisis de datos

Se ha seguido el modelo teórico de Pirie y Kieren para analizar los datos, por lo que, con base en la observación de campo, identificamos y describimos las características específicas de algunos de los niveles comprensión, de acuerdo a la situación problema (ver figura 4).

En el primer nivel *conocimiento primitivo*, nos enfocamos en identificar y describir cuáles fueron los conocimientos previos con los que contaban los casos, relacionados con la comparación y equivalencia de unidades de medida (masa), ya que ambas situaciones tienen la misma unidad (ver figura 4). En el segundo nivel, *creación de imágenes*, se identificó si los casos lograron identificar la unidad de medida de ambas situaciones de la tarea (1 kilo de naranjas), y si relacionaron sus conocimientos previos con las características propias del concepto razón. En el nivel, *tener la imagen*, se identificó si los casos lograban establecer una representación (simbólica, pictórica, gráfica, entre otras) de la situación asociada al concepto razón.

En el cuarto nivel *observación de la propiedad*, se determinaron las capacidades de los casos, en utilizar estrategias que permitieran comparar una razón matemática (presentada como fracción). En el nivel *formalización*, identificamos el momento en que los casos lograron reconocer correctamente la unidad de medida (1 kilo de naranja), cuando lograron establecer la representación de la situación relacionada con el concepto de razón, y cuándo lograron desvincularse de la representación y utilizar propiedades de generalización.

RESULTADOS

Esta sección se organiza en dos apartados, proceso de comprensión del caso I y proceso de comprensión del caso II, los cuales, a su vez, se dividieron en dos categorías diferenciadas de acuerdo a las respuestas dadas por los estudiantes y el objetivo de la tarea: *Elección de la mejor razón y comparación de razones*.

Proceso de comprensión del caso I (C1)

Se presenta el análisis de la comprensión, es decir, se presenta el análisis del proceso de las estructuras del conocimiento de los estudiantes del caso I (E1 y E2), con base en el modelo teórico de Pirie y Kieren (1994) al resolver la tarea (Figura 4).

Elección de la mejor razón (categoría 1)

Los estudiantes del caso I, inicialmente leyeron por separado y con detenimiento el enunciado de la tarea, fijándose en los datos que plantean las dos situaciones presentadas (precio normal y con descuento). Todo con el objetivo de fijarse que las dos situaciones son comparables, puesto que

comparten la misma unidad de medida. Pero los estudiantes, relacionaron la tarea con la búsqueda del costo por unidad de naranja en cada una de las dos situaciones, evidenciando que no identificaron o interpretaron la situación problema, por lo que comenzaron enfrentándose al problema desde el nivel *Creación de imágenes*.

E2: *Tenemos que saber qué cuesta cada naranja aquí y aquí...* [Señala los datos que se presenta en la tarea en relación con las dos situaciones].

E1: *¡Sí! Tenemos que hacer las fracciones* [se refieren a estas representaciones $9/10$ y $7/8$].

Los estudiantes, realizaron una representación simbólica de las dos situaciones, lo que dio evidencia que avanzaron a un nivel exterior del modelo *Tener la imagen (TI)*, en donde buscaban conocer el valor de cada unidad de naranja, por eso expresaron la relación del costo total por el número de naranjas (ver Figura 5).

Figura 5

Representación simbólica de los estudiantes caso I, categoría 1 (Elaboración de los estudiantes caso I).

$$\frac{10}{9} \qquad \frac{8}{7}$$

En este nivel, los estudiantes disponían de los datos y comenzaron a relacionarlos con una estrategia matemática que les permitió resolver la tarea. La estrategia que utilizaron fue la operación aritmética de división (Figura 6), para encontrar el valor de cada unidad de naranjas en cada situación. Este procedimiento evidenció que alcanzaron el nivel *Observación de la propiedad (OP)*, puesto que trabajaron sobre la imagen que poseían.

E1: *Hay que dividir 10 entre 9 y 8 entre 7.*

Figura 6

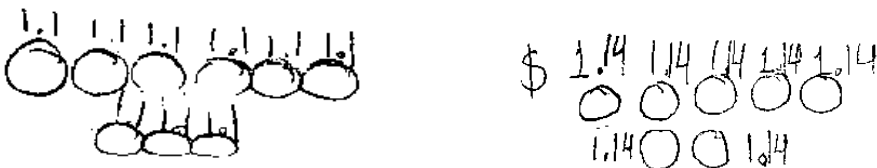
Proceso matemático de los estudiantes del caso I, categoría 1 (Elaboración de los estudiantes caso I).

$$\begin{array}{r}
 9 \overline{) 10} \\
 \underline{-9} \\
 010 \\
 \underline{-9} \\
 00
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 1.14 \\
 7 \overline{) 8} \\
 \underline{-7} \\
 10 \\
 \underline{-7} \\
 30 \\
 \underline{-24} \\
 6
 \end{array}$$

Una vez encontrado el valor por unidad de cada naranja en las dos situaciones de la tarea, los estudiantes construyeron una representación pictórica de la cantidad de naranjas (*Tener la imagen*) y la asociaron con el costo unitario que determinaron con el proceso matemático de la división. Se puede identificar que se desencadenó un *Folding Back*, ya que los estudiantes retrocedieron a un nivel inferior que ya habían superado, sin embargo, como se observa en la Figura 7, los estudiantes alcanzaron (al regresar) una comprensión más sólida, posteriormente lo que hicieron fue asociar el valor encontrado con la representación pictórica.

Figura 7

Representación pictórica, situación 1 y 2 respectivamente, caso I (Elaboración de los estudiantes caso I).



Los estudiantes realizaron abstracciones de la nueva imagen, lo que indicó que avanzaron nuevamente al nivel *Observación de la propiedad (OP)*. En este nivel los estudiantes conjeturaron sobre cuál era la mejor razón matemática que les convenía elegir para comprar las naranjas en el mercado o la huerta.

Figura 8

Abstracciones realizadas por los estudiantes del caso I, categoría 1 (Producción de los estudiantes del caso I).

Sí, porque una naranja
cuesta \$1.1, y la
otra cuesta \$1.14

E1: Yo digo que en el mercado Baltazar es más económica, porque cada naranja cuesta \$1,1 y en la huerta de don José cada naranja cuesta \$1,14. Así que creo que conviene más esta [señala la operación realizada con 10/9].

E2: ¡Sí! es que cada naranja está más barata aquí [señala el proceso realizado con la situación del mercado] que acá [señala proceso realizado con huerta de don José].

No obstante, los estudiantes no lograron alcanzar el nivel *Formalización (F)*, puesto que las conclusiones que obtuvieron fueron erróneas. Esto como consecuencia de que al iniciar la tarea no identificaron la unidad de partida en las que se daban ambas situaciones.

Figura 9

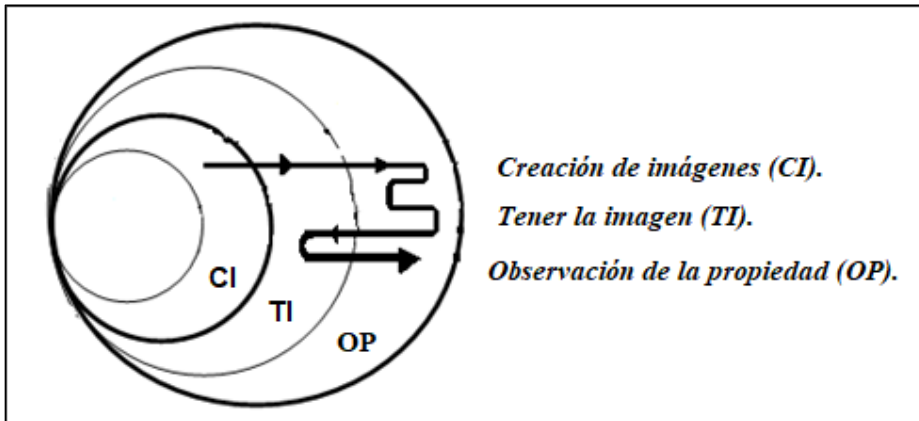
Conclusión de los estudiantes caso I, categoría 1 (Producción de los estudiantes del caso I).

Pc) En el mercado Baltazar,
Por que cada naranja está
más barata que en la huerta.

En la figura 10, se esquematiza el proceso que siguieron los estudiantes hasta el momento en que determinaron la elección de la mejor razón matemática (refiriéndose a la comparación de razones sobre el precio de las naranjas). En la siguiente figura, las flechas indican que el caso en estudio, logró ese nivel en su proceso de comprensión y el grosor de la línea representa el desarrollo del proceso de comprensión.

Figura 10

Estructura de conocimiento del caso I, para elegir la mejor razón.



Comparación de razones (categoría 2)

Los estudiantes primero encontraron el valor del descuento de acuerdo a la oferta, por lo que comenzaron enfrentándose al problema desde el nivel *Conocimiento primitivo*, ya que esos conocimientos fueron su punto de partida en relación al proceso.

E1: *Lo primero que tenemos que hacer es...*

E2: *Sacar el porcentaje del precio anterior.*

E1: *Si ajá... ¿De este precio?* [Señala el costo de la huerta de don José \$8].

E2: *No, ¿De diez no? Por qué dice: Si en el mercado Baltazar el kilo de naranjas se oferta con un 20%...*

E1: *Entonces es esta* [señala el costo del mercado Baltazar] *¡Ah!, sí es diez.*

Inmediatamente, como ya sabían cuáles eran los datos por utilizar escogieron una estrategia para calcular el 20% de \$10. Durante la entrevista, el caso I expresó que el proceso utilizado fue el explicado por su profesor para obtener el porcentaje de una cantidad numérica, el cual consiste en realizar una descomposición aditiva en porcentajes más fácil de calcular, tal como se evidencia en la Figura 11. El proceso que realizaron da evidencia de que, con

los conocimientos previos se alcanzó el nivel *Observación de la propiedad (OP)* sin pasar por los dos niveles anteriores (*Creación de imágenes Y Tener la imagen*). Esto se debe a la complementariedad de conocimientos para construir propiedades específicas del concepto, logrando generalizarlas.

Figura 11

Proceso para calcular el 20% de \$10, estudiantes caso I, categoría 2 (Elaboración de los estudiantes caso I).

$$\begin{array}{r|l}
 \$10 & 20\% \\
 \hline
 \$1 & 10\% \\
 \$1 & 10\% \\
 \hline
 2 &
 \end{array}$$

A partir de este proceso obtienen el nuevo costo de las naranjas en el mercado Baltazar con el descuento ofertado.

E1: *Es \$2 el descuento... ¿y luego se lo restamos?*

E2: *Sí, a diez le restamos dos.*

E1: *El nuevo precio es \$8.*

Figura 12

Respuesta de los estudiantes caso I, con base al nuevo costo del kilo de naranjas, categoría 2 (Elaboración de los estudiantes caso I).

\$8⁰⁰ es el nuevo
precio con descuento

Luego, los estudiantes realizaron un *Folding Back* con una representación simbólica de la situación (descuento en el mercado), expresando una relación del costo del kilo de naranjas con el número total de ellas. Encontrándose ahora en el nivel de *Tener la imagen (TI)*.

Figura 13

Representación simbólica de la nueva situación de los estudiantes caso I, categoría 2 (Elaboración de los estudiantes caso I).

$$\frac{8}{9}$$

E2: *Pero tenemos que hacer esto [señala el proceso que realizaron anteriormente para conocer el valor de cada unidad de naranja] porque aquí ya cuesta esto [señala el nuevo costo del kilo de naranjas con el descuento realizado] y aquí cuesta menos.*

E2: *Entonces sería ocho novenos ¿no? Volvamos hacer la fracción y la división.*

E1: *Ajá.*

Figura 14

Proceso matemático para calcular el costo de las naranjas por unidad de los estudiantes caso I, tarea 1 (Elaboración de los estudiantes caso I).

$$\begin{array}{r} 9 \overline{) 80} \\ \underline{0} \\ 80 \\ \underline{72} \\ 8 \end{array}$$

De la interacción, los estudiantes relacionaron la actividad con el procedimiento de división realizado con anterioridad (Figura 6) para encontrar el valor por unidad de cada naranja y utilizan la misma estrategia para resolver la tarea, es decir, aplican la operación de división (Figura 14). Este proceso evidencia que el caso I ha alcanzado nuevamente el nivel *Observación de la propiedad (OP)*. Lo que confirma que, el proceso de

comprensión se construye a partir de experiencias y se realiza de una manera iterativa, para lograr construir, fortalecer o modificar el conocimiento.

Finalmente, los estudiantes sintetizan la información del proceso realizado y se desligan por completo de la imagen concreta considerando el concepto como objeto formal, determinando dónde les conviene comprar las naranjas después del descuento realizado en el mercado Baltazar, lo que indica que se encuentran en el nivel *Formalización (F)*.

E1: Ahora cuesta cada naranja \$0,8 así que...

E2: En el mercado la naranja está más abarata que antes.

E1: Ajá. Sí, en el mercado.

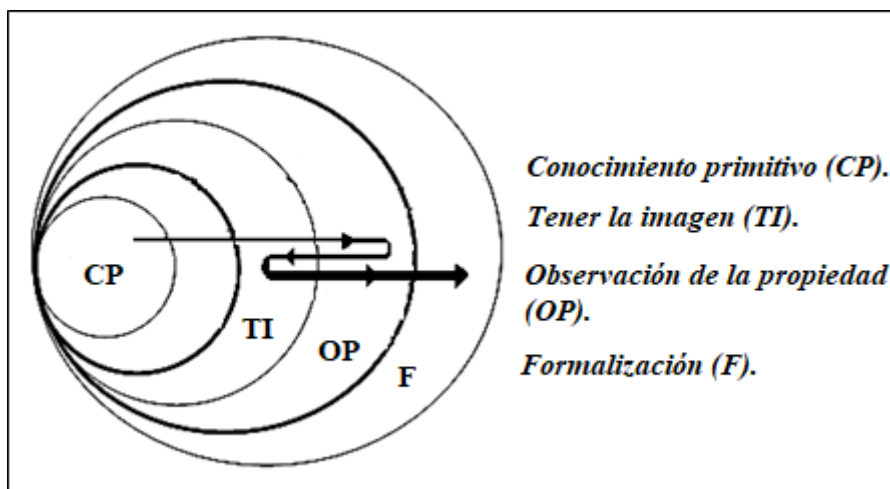
Figura 15

Respuesta de los estudiantes del caso I, categoría 2 (Elaboración de los estudiantes caso I).

En el mercado, porque la
naranja cuesta \$0.8, y
en la huerta \$1.14

Figura 16

Estructura de conocimiento del caso I, para comparar las razones



En la Figura 16 se esquematiza el proceso de comprensión que delinearón los estudiantes al resolver la tarea. Se señala nuevamente que, en la siguiente figura las flechas indican que el caso en estudio, logró ese nivel en su proceso de comprensión y el grosor de la línea representa el desarrollo del proceso de comprensión.

Proceso de comprensión del caso II (C2)

En este segundo apartado, se presenta el análisis de la comprensión del caso II, es decir, se presenta el análisis del proceso de las estructuras del conocimiento de los estudiantes con base en el modelo teórico de Pirie y Kieren (1994) al resolver la tarea (Figura 4) en torno al concepto de razón.

Elección de la mejor razón (categoría 1)

Los estudiantes del caso II, iniciaron leyendo en conjunto el enunciado de la tarea, identificando los datos relativos al precio que plantean ambas situaciones presentadas (precio normal y con descuento). Así, organizaron una hoja de trabajo en dos columnas (datos y operación), sin embargo, los estudiantes no lograron identificar o interpretar la unidad de partida de ambas situaciones (kilo de naranjas).

Figura 17

Organización de los datos por los estudiantes caso II, categoría 1 (Elaboración de los estudiantes caso II).

datos	operación
un kilo de naranjas consta de 9 piezas y cuesta \$10	:
un kilo consta de 7 piezas de naranjas cuestan \$8	:

Los estudiantes iniciaron a resolver la tarea en el nivel *Tener la imagen (TI)*. puesto que tenían una imagen mental de la situación. Posteriormente, cambiaron esta representación por una gráfica cartesiana, manteniéndose en el mismo nivel del modelo. Los estudiantes presentaron

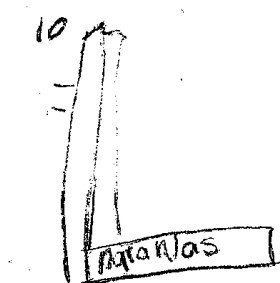
mayor dificultad en relacionar los datos de la tarea con un objeto matemático, en comparación con los del caso I.

E3: *Pero es una gráfica, a lo mejor podríamos hacer la gráfica así...* [Construye una gráfica cartesiana en una hoja].

E4: *No, así no es.*

Figura 18

Segunda representación gráfica, estudiantes caso II, categoría 1 (Elaboración de los estudiantes caso II).



Los estudiantes tuvieron dificultad para representar la situación de las naranjas en la gráfica que construyeron (Figura 17), por lo que realizaron otra representación de la situación (Figura 18), lo que indicó que los estudiantes se mantenían en el mismo nivel (*Tener la imagen*).

Figura 19

Representaciones simbólicas, estudiantes caso II categoría 1 (Elaboración de los estudiantes caso II).

$$\frac{10}{9} \quad \frac{8}{7}$$

E4: *Pero tenemos que hacer las fracciones primero... para saber cuánto cuesta cada naranja* [borra las dos circunferencias que ya había construido].

E3: *Ajá.*

E4: *Sería 10 entre 9 y tenemos que dividir.*

E4: *\$1 cuesta cada naranja.*

E4: *En ambos lugares cuestan lo mismo.*

E3: *El resultado es el mismo* [se refiere al proceso que realizaron de división].

Los estudiantes del caso II, al igual que el caso I, no lograron identificar que ambas situaciones son comparables porque poseen la misma unidad de partida (un kilo), sin embargo, determinaron el costo por unidad de naranja en cada una de las dos situaciones, usando la división. Para ello, trabajaron sobre la nueva imagen que construyeron (Figura 19), utilizando la misma estrategia de los estudiantes del caso I, la operación aritmética de división (Figura 20). Este procedimiento evidencia que los estudiantes avanzaron al nivel *Observación de la propiedad (OP)*.

Figura 20

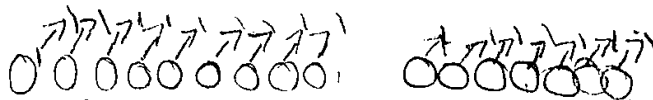
Proceso matemático de los estudiantes caso II, categoría 1 (Elaboración de los estudiantes caso II).

Two handwritten division problems are shown side-by-side. The left one is $9 \overline{)10}$ with a horizontal line under the 10, and the result '00' written below. The right one is $7 \overline{)18}$ with a horizontal line under the 18, a '-7' written below it, another horizontal line, and the result '3' and '0' written below that.

Como se observa en la Figura 20, los estudiantes manifestaron problemas para realizar la operación aritmética de división, lo cual pone de manifiesto las necesidades que tienen en sus conocimientos previos. Posteriormente, realizaron otra representación pictórica de las situaciones (Figura 21). Este proceso desencadenó nuevamente en los estudiantes un *Folding Back*, puesto que retrocedieron a un nivel inferior, el cual, ya habían superado (*Tener la imagen*) no obstante, lograron relacionar las abstracciones realizadas en el nivel *Observación de la propiedad (OP)*. Por ejemplo, colocaron el valor unitario a cada naranja que representaron con una circunferencia (Figura 21).

Figura 21

Representación pictórica de los estudiantes caso II, categoría 1 (Elaboración de los estudiantes caso II).



E4: ¿Entonces? Son iguales...

E3: A eso me refería... el número de piezas va a aumentar la cantidad que cuesten.

E3: Podemos poner que en los dos lados cuestan lo mismo.

E4: En los dos lugares nos conviene de acuerdo a las operaciones.

E3: Sí.

La interacción de los estudiantes, evidencia que regresan al nivel *Observación de la propiedad (OP)*, es decir, al proceso de determinar en cuál de las dos situaciones (Mercado y huerta de don José) convendría comprar las naranjas. Además, concluyen erróneamente, pues señalan que es conveniente comprar en los dos lugares ya que se trata de lo mismo, pero esto se debe a las dificultades en el proceso aritmético de la división (Figura 20), lo que conlleva a no superar las dificultades en la comparación y elección de una razón matemática (Figura 22).

Figura 22

Abstracciones realizadas por los estudiantes caso II, categoría 1 (Elaboración de los estudiantes caso II).

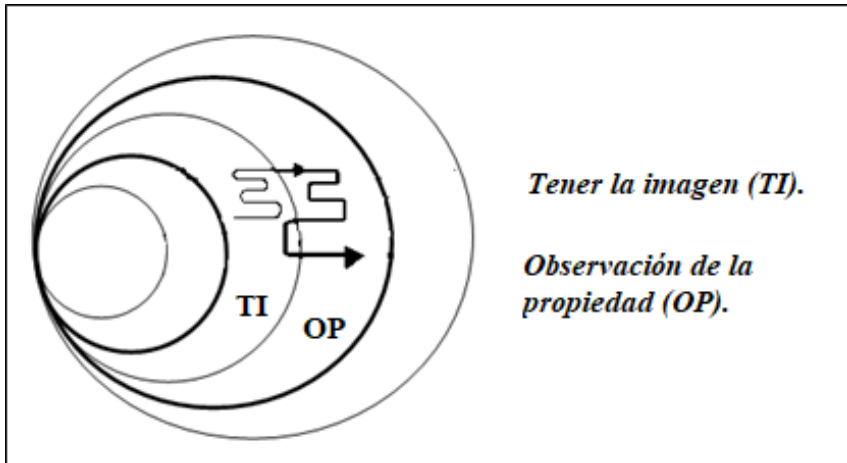
en los 2 lugares porque es lo mismo

En la Figura 23, se esquematiza el proceso que han seguido los estudiantes hasta el momento para determinar la elección de la mejor razón matemática (refiriéndose a la comparación de razones sobre el precio de las naranjas). Las flechas indican que el caso en estudio, logró ese nivel en su

proceso de comprensión y el grosor de la línea representa el desarrollo del proceso de comprensión.

Figura 23

*Estructura de conocimiento del caso II para elegir la mejor razón
(Elaboración propia de los autores).*



Comparación de razones (categoría 2)

En principio, los estudiantes discutieron que camino tenían que seguir para encontrar el valor del descuento que se realizaría con la oferta, por lo que comenzaron en el nivel *Conocimiento primitivo (CP)*.

E4: *Dice que se oferta con un descuento del 20%.*

E3: *Se le saca el nuevo costo del precio que decía anteriormente.*

E3: *¿A esto no? [Señala la hoja de trabajo].*

E4: *Sí. Pero no sé a cuál es.*

E3: *Mmm... Es al que mejor nos convenga. A este [señala la situación de la huerta de don José].*

E4: *No es el lado más conveniente, ambos son iguales. Pero, te saldría más barato... pagarías menos por más* [se refiere a la situación de don José].

E4: *Entonces a esta* [señala la situación de la huerta de don José].

Se observó que los estudiantes tuvieron dificultad al momento de relacionar los datos con alguna estrategia de solución a la tarea. Primero, no interpretaron correctamente a cuál de las dos situaciones se le debe aplicar el descuento mencionado y ellos optan por aplicárselo a la que mejor les convenga según sus abstracciones (huerta de don José). Además, no recuerdan como obtener el porcentaje de un valor numérico.

E4: *¿Cómo se hace?*

E3: *Pues nada más le quitamos, solamente a esto* [señala \$8] *le quitamos un descuento del 20%.*

E3: *Eso lo dimos en clases, pero no recuerdo.*

E4: *A ya ya ya... préstame el lápiz.*

E4: *Colocábamos esto aquí* [realiza el mismo proceso que hicieron los compañeros del caso I].

E3: *Ah sí. Es cierto* [expresa al observar el proceso que realiza E4].

Figura 24

Proceso para calcular el 20% de \$8, estudiantes caso II, categoría 2 (Elaboración de los estudiantes caso II).

$$\begin{array}{r|l} 20\% & \$8 \\ \hline 10\% & 4 \\ 10\% & 4 \\ \hline \end{array}$$

El proceso para calcular el porcentaje consistió en realizar una descomposición en sumandos de la cantidad a la que había que calcular el

porcentaje, para entonces obtener el porcentaje solicitado (Figura 24). Este proceso da evidencia que los estudiantes continúan utilizando sus conocimientos previos para obtener el porcentaje de un valor numérico (*Conocimiento primitivo*).

Se observa de la Figura 24 que los estudiantes tuvieron errores en el proceso para calcular el descuento, no obstante, expresaron que el nuevo costo del kilo de naranjas en la huerta de don José es de \$6 con el descuento (Figura 25), avanzando hacia el nivel *Observación de la propiedad (OP)*.

Figura 25

Respuesta de los estudiantes caso II, con base al nuevo costo del kilo de naranjas, categoría 2 (Elaboración de los estudiantes caso II).

el nuevo kilo costaría \$6

Ya que habían obtenido el nuevo precio, aplicando el descuento al precio del kilo de naranjas en la huerta de don José, debían decidir nuevamente dónde comprar las naranjas, si en la huerta de don José o en el mercado, concluyendo q en la huerta de don José, pero siguieron usando el argumento de que dan más naranjas por menos dinero (Figura 26). A pesar, de que las deducciones en la comparación de razones son correctas (menor precio, misma cantidad de naranjas), se evidencia la falta de comprensión lectora y las dificultades en los procesos aritméticos que realizaron.

E4: *Aquí es más barata* [señala la situación de la huerta de don José].

E4: *Porque te dan más naranjas...*

E3: *Por menos precio pues.*

Figura 26

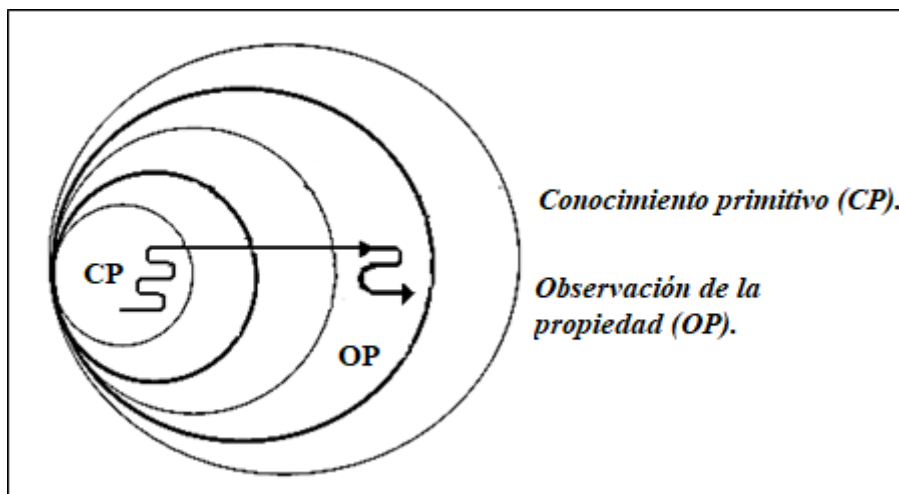
Respuesta final de los estudiantes caso II, categoría 2 (Elaboración de los estudiantes caso II).

en la huerta. Porque te dan mas naranjas por menos dinero

En la siguiente figura se esquematiza el proceso seguido por los estudiantes del caso II en la comparación de razones con igual unidad de medida. Se enfatiza que las flechas indican que los estudiantes lograron ese nivel en su proceso de comprensión y el grosor de la línea representa el desarrollo del proceso de comprensión.

Figura 27

Estructura de conocimiento del caso II, para comparar las razones.



Como se observa, el caso II alcanzó un nivel menor en el proceso de comprensión de acuerdo a Pirie y Kirien, esto debido a las dificultades que tuvieron desde el principio para la identificación de datos y cálculos aritméticos, en consecuencia, los estudiantes del caso II no lograron formalizar su proceso de comprensión en la comparación de razones.

Lo que podría explicar las diferencias en el proceso de comprensión entre los casos, sería que los estudiantes del caso II, aún se encuentra en el proceso de lograr primeramente una comprensión conceptual del concepto de razón y de algunos otros procesos matemáticos, puesto que sus antecedentes académicos lo reflejan. En relación al modelo teórico los estudiantes para llegar a comprender el concepto, deberían por lo menos haber alcanzado el nivel de *Formalización (F)*. Por tanto, su proceso de comprensión fue bajo.

Ahora, es claro que los estudiantes a pesar de presentar rendimientos académicos diferentes, ambos casos realizaron el mismo proceder en su

proceso de comprensión al momento de establecer comparaciones de razones matemáticas. Pero la diferencia, se encuentran en las dificultades que manifestaron los estudiantes del caso II, en relación a los del caso I. Como fueron, dificultad para comprender y relacionar los datos con un objeto matemático y la dificultad en las estrategias implementadas (representación pictórica y simbólica, algoritmo de la división, cálculo del porcentaje).

CONCLUSIONES

En esta investigación se analizó el proceso de comprensión que tienen cuatro estudiantes de educación básica de sexto grado sobre el concepto de razón, al resolver una tarea que demanda elegir la razón matemática para decidir la situación óptima en dónde comprar al mejor precio. El modelo teórico de Pirie y Kieren (1994) demostró que la comprensión del conocimiento no se presentó de manera lineal (del nivel inferior a nivel superior), sino que es una construcción iterativa del proceso, lo que implica ciclos adelante-atrás atrás para avanzar a un nivel superior (*folding back*), esto permitió a los estudiantes reexaminar y avanzar en el proceso de comprensión de una forma enriquecida en conocimientos y habilidades.

Desde el concepto de comprensión que manifiesta el modelo teórico, se logró establecer que los casos de estudio, no lograron formalizar el objeto matemático razón, puesto que, la comprensión es un proceso que se construye a partir de sus experiencias y fue evidente que también tuvieron dificultades en las estrategias utilizadas al resolver la tarea. En la tarea, se esperaba que los estudiantes lograran identificar que ambas situaciones presentaban la misma unidad de partida, por tanto, podían realizar una comparación de razones y elegir la mejor situación donde comprar el kilo de naranjas, pero ambos casos no alcanzaron establecer dicha relación, lo que confirmó que los estudiantes no logran interpretar o decidir cuál es la unidad de medida en juego en una comparación de razones matemáticas.

De acuerdo al modelo teórico y al desarrollo de las actividades por parte de los estudiantes, el proceso de comprensión relacionado con el concepto de razón queda descrito como sigue: Primero asocian el concepto de razón con una imagen (*CI*) o inmediatamente la crean y representan (*TI*). Las representaciones claves en su proceso de comprensión fueron la pictórica y simbólica, en donde presentan errores para establecerlas. Siendo la representación simbólica (fracción) con la que primero relacionaron las situaciones de la tarea. Posteriormente, los estudiantes en su proceso de

comprensión, se les facilitó trabajar en la imagen que poseen (*OP*), por ejemplo, usan el algoritmo de la división para comparar razones matemáticas, proceso en el que los estudiantes del caso 2 presentaron errores. Luego, tratan de abstraer una hipótesis de los resultados obtenidos de las estrategias implementadas y, es así como logran alcanzar su mayor nivel de comprensión (*OP*). Sin embargo, faltó que los estudiantes logran desvincularse de la imagen que crearon del objeto matemático y es por ello, que no lograron formalizar el concepto de razón como un objeto formal (*F*).

En el proceso de comprensión se evidenciaron las dificultades siguientes: No identificación de la unidad de partida en una comparación de razones matemáticas, manifestando la endeble comprensión lectora e interpretación de los datos; dificultad para traducir de un lenguaje verbal a uno simbólico, manifestado durante el desarrollo de la actividad; para realizar operaciones aritméticas con fracciones, evidenciado en los estudiantes de caso II que no lograron desarrollar divisiones sencillas; dificultad para comparar razones matemáticas, los estudiantes se limitaron a establecer la comparación por el resultado de sus procesos aritméticos, que para el caso II fue incorrecto y; dificultad para identificar y trabajar con razones matemáticas, los estudiantes no lograron establecer la relación entre las magnitudes del numerador y denominador en una razón matemática.

En este sentido, el modelo teórico permitió profundizar acerca del proceso de comprensión que establecen los estudiantes al resolver tareas de manera colectiva (en grupos) relacionadas con el concepto razón. Además, de conocer las dificultades que los estudiantes manifiestan en su proceso de comprensión, cuando resuelven tareas que aluden al concepto de razón. Lo que, facilita a los docentes implementar en sus prácticas de enseñanzas, estrategias que permitan a sus estudiantes superar tales dificultades que les imposibilita el buen proceso de comprensión del concepto de razón. Dado que es necesario continuar con estudios empíricos que informan sobre el proceso de comprensión de los estudiantes al resolver tareas relacionadas al concepto de razón, investigaciones futuras podrían centrarse en seguir profundizando esta interpretación con un mayor número de participantes, para lograr una generalización de los resultados obtenidos en el estudio de caso de esta investigación.

DECLARACIÓN DE LA CONTRIBUCIÓN DE LOS AUTORES

JAAP y FMRV concibieron la idea presentada y desarrollaron la teoría. JAAP adaptó la metodología para la investigación, elaboró las actividades, y colectó los datos. FMRV y JAAP analizaron los datos. Todos los autores participaron activamente en la discusión de resultados, revisaron y aprobaron la versión final del trabajo.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos que respaldan los resultados de este estudio serán puestos a disposición por el autor correspondiente, [JAAP], previa solicitud razonable.

REFERENCIAS

- Arıcan, M., (2019). A diagnostic assessment to middle school students' proportional reasoning. *Turkish Journal of Education*, 8(4), 237-257. <https://doi.org/10.19128/turje.522839>
- Buform, A., Llinares, S., & Fernández, C. (2018). Características del conocimiento de los estudiantes para maestro españoles en relación con la fracción, razón y proporción. *Revista mexicana de investigación educativa*, México, 23(76), 229-251.
- Caballero, A., Martínez, L., & Bernandez, J. (1970). *Matemáticas, tercer curso*. Esfinge.
- Çalışıcı, H. (2018). Middle school students' learning difficulties in the ratio-proportion topic and a suggested solution: envelope technique. *Universal Journal of Educational Research*, 6(8), 1848-1855. <http://dx.doi.org/10.13189/ujer.2018.060830>
- Casey, J. (1885). *The first six books of the elements of Euclid*. Longmans, Green.
- Delgado, M., Codes, M., Monterrubio, M., & González, M. (2014). El concepto de serie numérica. Un estudio a través del modelo de Pirie y Kieren centrado en el mecanismo “folding back”. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 6, 25–44.

- Fernández, A., Figueras, O., Monzó, O., & Puig, L. (2009). *Competencias en razón y proporción en la escuela primaria*. Universidad de Valencia. PUV.
- Fernández, C. & Llinares, S. (2010). Relaciones entre el pensamiento aditivo y multiplicativo en estudiantes de educación primaria. El caso de la construcción de la idea de razón. *Horizontes Educativos*, 15(1), 11-22.
- Gairín, J. & Oller, A. (2012). Análisis histórico sobre la enseñanza de la razón y la proporción. In: *Investigación en Educación Matemática XVI*. (pp 249–259). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.
- Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE). (2015). *Resultados nacionales 2015. Área: Matemáticas. Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes (PLANEA)*. <http://www.inee.edu.mx/images/stories/2015/planea/final/fasciculosfinales/resultadosPlanea-3011.pdf>
- Lamon, S. (2020). *Teaching fractions and ratios for understanding. Essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. Routledge.
- Lamon, S. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. In: *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*. (pp. 629-667). National Council of Teachers of Mathematics.
- McMillan, J., & Schumacher, S. (2005). *Investigación educativa: Una introducción conceptual*. Pearson.
- Meel, D. (2003). Models and theories of mathematical understanding: Comparing Pirie and Kieren's model of the growth of mathematical understanding and APOS theory. In: *Research in collegiate Mathematics Education: Issues in mathematics education*. (pp. 132-181).
- Monteiro, C. (2003). Prospective Elementary Teachers' Misunderstandings in Solving Ratio and Proportion Problems. In: *27a Conferencia del Grupo Internacional de Psicología de la Educación Matemática*. (pp. 317-324). <https://eric.ed.gov/?id=ED501033>

- Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE). (2016). *Informe de resultados de México en la evaluación 2015 de PISA*. <https://www.oecd.org/pisa/PISA-2015-Mexico-ESP.pdf>
- Pirie, S., & Kieren, T. (1989). A recursive theory of mathematical understanding. *For the learning of mathematics*, 9(3), 7-11.
- Pirie, S.; Kieren, T. (1994). Growth in mathematical understanding: how can we characterise it and how can we represent it? *Educational Studies in Mathematics*, 26, 165-190.
- Ramírez, M., & Block, D. (2009). La razón y la fracción: un vínculo difícil en las matemáticas. *Educación Matemática*, 21(1), 63-90.
- Rojas, N. (2010). *Conocimiento para la enseñanza y calidad matemática de la instrucción del concepto de fracción: Estudio de caso de un profesor chileno*. Tesis de Máster en Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, Granada.
- Rosales, M., Barrientos, J., Issa, E., López, M., Tovilla, M., & Velázquez, L. (2015). *Desafíos matemáticos. Libro para el maestro. Sexto grado*. Secretaría de Educación Pública.
- Rodríguez-Vásquez, F.; & Arenas-Peñaloza, J. (2021). Categories to Assess the Understanding of University Students about a Mathematical Concept. *Acta Scientiae*, 23(1), 102-135. <https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.5892>
- Sánchez, E. (2013). Razones, proporciones y proporcionalidad en una situación de reparto: una mirada desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 16(1), 65-97.
- Secretaría De Educación Pública (SEP). (2011). *Programas de estudio 2011. Guía para el maestro. Educación básica. Primaria. Sexto grado*. Gobierno federal de México. http://edu.jalisco.gob.mx/cepse/sites/edu.jalisco.gob.mx/cepse/files/se_p_2011_programas_de_estudio_2011.guia_para_el_maestrosexto_grado.pdf
- Wager, E., & Kleinert, S. (2011) Responsible research publication: international standards for authors. In: *The 2nd World Conference on Research Integrity*. (pp 309-16). Imperial College Press/World Scientific.

Wahyu, K., Kuzu, T., Subarinah, S., Ratnasari, D., & Mahfudy, S. (2020). Partitive Fraction Division: Revealing and Promoting Primary Students' Understanding. *Journal on Mathematics Education*, 11(2), 237-258. <http://doi.org/10.22342/jme.11.2.11062.237-258>