

O instrumento náutico jacente no plano no ensino dos conceitos de corda e arco de circunferência

Francisco Wagner Soares Oliveira ^{ID}^a
Ana Carolina Costa Pereira ^{ID}^a

^a Universidade Estadual do Ceará, Programa de Pós-Graduação em Educação, Fortaleza, CE, Brasil

Recebido para publicação em 6 set. 2021. Aceito após revisão em 9 set. 2022

Editor designado: Claudia Lisete Oliveira Groenwald

RESUMO

Contexto: Este trabalho segue na direção de pesquisas que se dedicam a articular instrumentos históricos ao ensino de matemática. **Objetivo:** analisar o uso do instrumento jacente no plano como recurso didático para o ensino e aprendizagem dos conceitos de corda e de arco de circunferência na formação de estudantes da Licenciatura em Matemática. **Design:** a pesquisa acontece por meio de um curso de extensão universitária que tem como aporte os fundamentos teóricos metodológicos da Atividade Orientadora de Ensino. **Ambiente e participantes:** o ambiente da pesquisa é a formação de discentes da Universidade Estadual do Ceará. A ação formativa teve como público 12 participantes. O critério de escolha foi estarem cursando a licenciatura em matemática e a seleção se deu por ordem de inscrição na atividade. **Coleta e análise de dados:** a partir dos pressupostos da Atividade Orientadora de Ensino a coleta de dados foi feita com a gravação de vídeos e áudios, registros fotográficos e por escritos dos estudantes, já a análise se deu com base nas conexões e interconexões, na ação dos sujeitos e nos nexos conceituais. **Resultados:** o instrumento jacente no plano tem potencial didático para se trabalhar os conceitos de arco e corda de circunferência, pois a partir dele mobilizam-se esses conceitos de forma prática e pode-se ver como eles se relacionam. **Conclusões:** o instrumento jacente no plano pode ser explorado na interface entre história e ensino de matemática, como recurso para favorecer o ensino e aprendizagem, seja na educação básica ou ensino superior.

Palavras-chave: corda de circunferência; arco de circunferência; formação de estudantes da Licenciatura em Matemática; ensino e aprendizagem de matemática.

Autor correspondente: Francisco Wagner Soares Oliveira. Email:
wagner.oliveira@aluno.uece.br

The new instrument to find the altitude of sun in teaching the concepts of chord and arc of a circle

ABSTRACT

Background: This work follows in the direction of researches that are dedicated to articulating historical instruments to the teaching of mathematics. **Objectives:** to analyze the use of the new instrument to find the altitude of sun as a didactic resource for teaching and learning the concepts of rope and arc of a circle in the education of undergraduate students in Mathematics. **Design:** the research takes place through a university extension course that uses the theoretical and methodological foundations of the Teaching Guidance Activity. **Setting and Participants:** the research environment is the training of students at the State University of Ceará. The training action was attended by 12 participants. The choice criterion was that they were studying for a degree in mathematics and the selection took place in order of enrollment, in the activity. **Data collection and analysis:** from the assumptions of the Teaching Guidance Activity, data collection was carried out with the recording of videos and audio, photographic records and students' writings, while the analysis was based on connections and interconnections, on the action of the subjects, and on the conceptual nexuses. **Results:** the new instrument to find the altitude of sun has didactic potential to work with the concepts of arc and circumference chord, because from him these concepts are mobilized in a practical way and it is possible to see how they relate. **Conclusions:** the new instrument to find the altitude of sun can be explored in the interface between history and mathematics teaching, as a resource to favor teaching and learning, whether in basic education or higher education.

Keywords: circumference rope; arc of circumference; formation of undergraduate students in Mathematics; teaching and learning math.

INTRODUÇÃO

O cenário educacional atual tem sido marcado por demandas e processos de mudança cada vez mais acentuados na estrutura e no delineamento da Educação Básica, como por exemplo, a recente valorização dada a partir da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) ao desenvolvimento de habilidades e competências (Brasil, 2017). Diante desse contexto, faz-se necessário que estudantes da licenciatura e professores da educação básica participem de ações formativas que os ajudem a pensar em caminhos e estratégias que atendam as demandas requeridas por essa base.

Alinhada a essas exigências, a Resolução CNE/CP 02/2019, BNC - formação aponta que os professores, dentre outras funções, devem ser capazes de “conduzir as práticas pedagógicas dos objetos do conhecimento, as competências e as habilidade” (Brasil, 2019, p. 2). Para tanto, é possível

observar nesse documento a valorização dada à articulação/integração entre teoria e prática, aprendizagem dos conteúdos específicos de cada área, aprendizado da dimensão prática do conhecimento, identificar recursos pedagógicos como materiais e artefatos para favorecer a aprendizagem, e utilizar diferentes práticas e recursos dentre outras.

Tendo essas recomendações como norte, pensando em especial na formação de licenciandos em matemática, este estudo se apropria do instrumento náutico jacente no plano de Pedro Nunes (1502-1578), recurso fornecido pela história da matemática para construir uma interface com o ensino de matemática. Pela proposta de interface, aqui assumida, entende-se que esse aparato pode favorecer, por exemplo, para se ter acesso ao processo da construção do conhecimento, para estudantes observarem como diferentes conceitos matemáticos se relacionam e para os discentes utilizarem/mobilizarem conceitos matemáticos de forma prática (Pereira & Saito, 2019a, 2019b; Saito & Dias, 2013; Saito, 2014).

A iniciativa de buscar explorar instrumentos ainda está ancorada no fato de compreender que esse tipo de aparato não é neutro, eles fazem parte do processo que permeia a construção do conhecimento (Bennett, 2003; Saito, 2009, 2014, 2019; Van Helden & Hankins, 1994). No caso particular, do instrumento jacente no plano, pesquisas fora do Brasil (Canas, 2011; Leitão, 2008; Nunes, 2012), têm apresentado algumas informações de caráter histórico e contextual sobre o aparato.

Para articular esse instrumento na interface entre história e ensino de matemática busca-se se apropriar desses dados, já existentes, que contemplam sobre a história e o contexto em que o aparato esteve inserido. Desse modo, em pesquisas nacionais (Oliveira, 2019, 2020; Oliveira & Pereira, 2020a), os olhares atentos ao estudo do instrumento jacente no plano têm-se voltado, em grande parte, a sua incorporação no processo de ensino e aprendizagem de matemática, preliminarmente na formação de estudantes da Licenciatura.

Vários conhecimentos geométricos podem ser discutidos em sala de aula a partir do instrumento jacente no plano, por exemplo: a semelhança de triângulos (Oliveira & Pereira, 2020a); Divisão da circunferência em 360 partes (Oliveira & Pereira, 2020b); Paralelismo entre planos; congruência de triângulos; reta tangente; arco e corda de circunferência; perpendicularismo (Oliveira, 2019). Dentre essas possibilidades, pela presença e significatividade no decurso do currículo de toda a Educação Básica (Brasil, 2017) e no ensino superior, aqui, buscou-se contemplar os conceitos de corda e arco de circunferência.

Diante dessa delimitação, a questão que orienta este estudo é a seguinte: como o uso do instrumento jacente no plano em ambiente de formação de futuros professores pode favorecer o ensino de corda e arco de circunferência? Nessa direção, foi delineado como objetivo: analisar o uso do instrumento jacente no plano como recurso didático para o ensino e aprendizagem dos conceitos de corda e de arco de circunferência na formação de estudantes da Licenciatura em Matemática.

Com vistas a atingir esse objetivo, a análise é tecida a partir dos pressupostos teóricos metodológicos da Atividade Orientadora de Ensino (Panossian et al., 2017). Na sequência, são expostas, inicialmente, a base teórica, posteriormente é dado lugar à metodologia, logo após têm-se resultados e análises e, por fim as considerações finais.

BASES TEÓRICAS

Este estudo tem como ambiente central a formação de estudantes da Licenciatura em Matemática. Para guiar os olhares sobre ela, aqui, estar-se ancorado: i) na possibilidade de uso do instrumento jacente no plano em sala de aula; ii) na proposta de construção interface entre história e ensino de matemática; iii) e nos elementos teóricos da Atividade Orientadora de Ensino.

O instrumento jacente no plano

Pertencente ao cenário português do século XVI, particularmente ao contexto da navegação, o instrumento jacente no plano é proposto por Pedro Nunes¹ (1502-1578) como mais uma alternativa para a determinação da distância da altura do Sol acima do horizonte. Sobre a configuração física do instrumento, tem-se (Figura 1).

Essa réplica segue as instruções de Pedro Nunes, dispostas em sua obra *De arte atque ratione navigandi*, edição moderna publicada em 2008, na qual ele descreve as instruções para a construção e o uso do aparato². O instrumento

¹ Para informações sobre a biografia de Pedro Nunes, vide Leitão (2003) e Costa (1969).

² A descrição do instrumento jacente no plano, encontra-se disposta no sexto capítulo do segundo livro de navegação apresentado em *De arte atque ratione navigandi*, na edição de 1573, ela pode ser visualizada entre as páginas 46 e 47. Na edição moderna dessa obra, com publicação em 2008, ela está disposta entre as páginas 358, 359 e

em exposição (Figura 1) é composto por uma tábua quadrada na qual sobre ela está posto um triângulo retângulo isóscele e está grafada uma circunferência graduada em 360 partes, das quais são assinalados quatro quadrantes. Ainda sobre a tábua, no ponto em que o vértice de 90 graus do triângulo, coincide com a borda da circunferência tem-se uma reta tangente.

Figura 1

Instrumento jacente no plano. (Oliveira, 2019, p. 70)



Essa concepção de Pedro Nunes junta-se a outras já bem utilizadas por homens do mar, como por exemplo, o quadrante, a balhêstilha e o astrolábio (Silva, 1945). Entretanto, quanto à forma com que o instrumento deve ser posicionado para uso, se comparado a esses outros aparatos, o instrumento náutico jacente no plano se diferencia de todos, pois sua tábua de sustentação deve estar paralela ao plano do horizonte, enquanto os demais devem estar posicionados verticalmente (Oliveira & Pereira, 2020c).

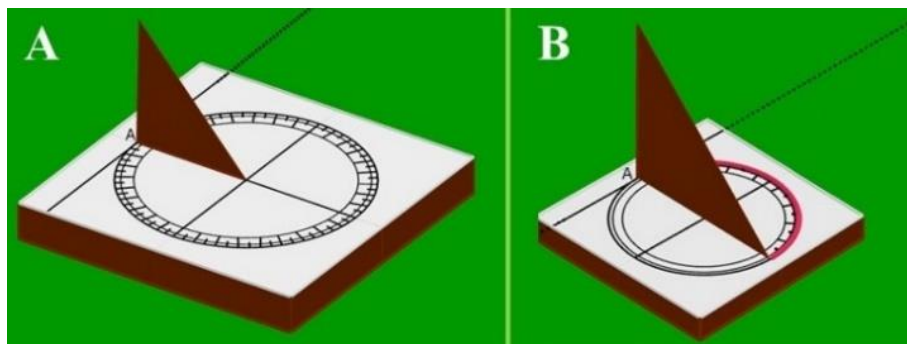
No que se refere à construção física do instrumento jacente no plano, cabe destacar que ela não se esgota nessa configuração, exposta anteriormente (Figura 1), existem outras possíveis variantes que ele pode assumir (Canas,

360. Nas *Petri Nonii Salaciensis Opera* de 1566 os excertos do instrumento podem ser encontrados nas páginas 71 e 72.

2011; Leitão, 2008; Oliveira, 2019)³. Uma delas refere-se ao aparato que tem o triângulo posto perpendicular a tábua com dois de seus lados congruentes ao diâmetro da circunferência. Fisicamente, as duas variações podem ser ilustradas da seguinte forma (Figura 2).

Figura 2

Triângulo com lado congruente ao semidiâmetro (A) e triângulo com lado congruente ao diâmetro (B)



Ainda sobre essas variantes, cabe destacar que além da diferença de tamanho nos lados dos triângulos, elas também diferem pelo fato de parte da circunferência, mais especificamente à semicircunferência, está agora dividida em 90 partes congruentes. É dado destaque a essas duas variantes⁴, visto ter sido a possibilidade de uso das duas, que de certo modo, foi responsável por impulsionar entre os estudantes da Licenciatura em Matemática discussões entorno dos conceitos de corda e arco de circunferência.

A proposta de interface entre história e ensino de matemática

Como já assinalado anteriormente, aqui se desenvolve a pesquisa com base na proposta de construção de interface entre história e ensino de

³ Sobre as possíveis configurações e variantes que o instrumento jacente no plano pode assumir, vide Canas (2011), Leitão (2008) e Oliveira (2019).

⁴ Para detalhes sobre as possíveis configurações e variantes do instrumento jacente no plano, confira Oliveira (2019).

matemática, a qual tem como um de seus pressupostos olhar para a história sob uma perspectiva historiográfica atualizada⁵ (Pereira & Saito, 2018, 2019a, 2019b; Saito & Dias, 2013; Saito, 2016a, 2016b). Nessa direção, faz-se necessário realizar dois momentos: o movimento do pensamento na formação do conceito matemático e o contexto no qual os conceitos matemáticos foram desenvolvidos (Saito, 2016a, 2016b; Saito & Dias, 2013). Quanto a esses momentos, sabe-se que:

O primeiro está relacionado com o pensamento na formação do conceito matemático. Trata-se de buscar no processo histórico o movimento do pensamento da apreensão do objeto e, portanto, do desenvolvimento do conceito. Esse movimento, que tem por pressuposto o objeto matemático em formação, permite que a formação de ideias componha a lógica do movimento do pensamento. Contudo, para que o lógico não prevaleça sobre o epistemológico e os fundamentos da matemática sobre a própria matemática e suas aplicações, prima-se na construção da interface a busca pelo contexto de formação desses objetos, evitando-se anacronismos e a sobreposição de temas históricas aos propósitos do ensino. Assim, o segundo movimento se refere ao contexto no qual os conhecimentos matemáticos foram desenvolvidos, isto é, procura observar agora o conteúdo matemático, método e os motivos por trás da escrita do documento, contextualizando na época em que foi elaborado e, portanto, considerando todas as características de ordem matemática, técnica e epistemológica como propõe uma historiografia contemporânea (Pereira & Saito, 2018, p. 113).

No processo de construção da interface não existe uma ordem pré-estabelecida para o desenvolvimento desses movimentos, pois se entende que o pesquisador pode conduzir o estudo a partir de suas necessidades e/ou concepções. Para o caso em que o estudioso seja um educador matemático, as informações da malha histórica possivelmente possibilitaram estabelecer um diálogo entre a história e o ensino. Dessa conversa entre as áreas vão emergir algumas questões, a exemplo, epistemológicas e matemáticas (conceituais), as

⁵ A perspectiva historiográfica atualizada consiste em uma abordagem investigativa que busca situar o conhecimento em seu tempo e espaço, ou seja, procura-se reconstruir o conhecimento sem introduzir conceitos alheios à época. Ela também leva em consideração as circunstâncias as quais o conhecimento foi elaborado (Saito, 2016a).

quais podem se apresentar como potencialmente didáticas ou pedagógicas para o ensino de matemática atual (Pereira & Saito, 2019a).

Em outras palavras, o diálogo dessas questões na interface, “[...] fazem emergir um novo objeto que, retirado da malha histórica, é orientado para o ensino de matemática” (Pereira & Saito, 2019a, p. 5). Diante dele, o educador poderá propor atividades para trabalho com estudantes, as quais busquem “[...] refletir o processo da produção do conhecimento que, dependendo da intencionalidade do educador, poderá ser orientada para diferentes propostas de ensino” (Saito & Dias, 2013, p. 11)⁶.

Pensando na elaboração de atividades, é sabido que essa proposta de interface ainda não delimita uma abordagem teórico-metodológica, pode-se notar que alguns dos estudos nessa direção têm trabalhado sob os moldes da Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau (Saito, 2017), da Teoria da Objetivação de Luis Radford (Santos, 2022) e da Teoria da Atividade de Leontiev (1903-1979). Levando em consideração o objetivo deste estudo e o fato de o instrumento náutico jacente no plano ser um artefato histórico que tem conhecimento incorporado, aqui, apropria-se dos elementos teóricos metodológicos da Atividade Orientadora de Ensino.

Aspectos teóricos da Atividade orientadora de ensino

A Atividade Orientadora de Ensino (AOE) é um modo de organização do ensino, o qual o professor pode tomar como referência para organizar/orientar sua ação, de modo que venha a favorecer o processo de ensino e aprendizagem. Uma das ideias centrais é tomar como base para a organização o conhecimento que tem sido elaborado sobre os processos humanos de construção do conhecimento (Moura et al., 2016).

No cerne desse modelo, o conhecimento teórico é o principal conteúdo da atividade. A apropriação desse conhecimento por parte dos estudantes, ou seja, a transformação do psiquismo do sujeito posto em constante atividade de aprendizagem é um dos objetivos da AOE (Moura et al., 2010; Moura et al., 2016).

⁶ Para detalhes sobre o desenvolvimento de propostas nessa direção, vide alguns estudos já realizados, são exemplos destes: Santos e Pereira (2021), Oliveira (2021), Silva e Pereira (2021), Albuquerque e Pereira (2018), Alves e Pereira (2020) e Batista e Pereira (2020).

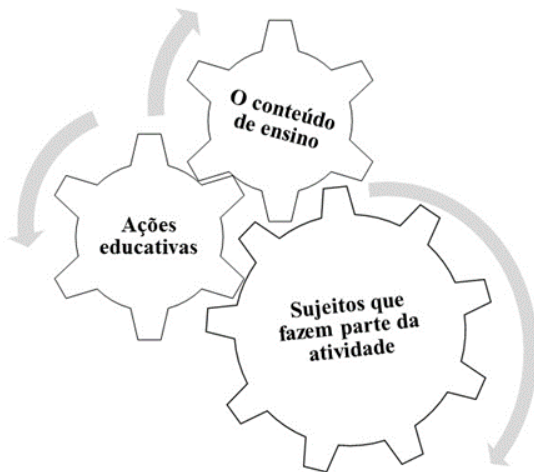
As bases teóricas da AOE são a Teoria da Atividade e a teoria histórico-cultural (Moura *et al.*, 2016). Desse modo, entende-se que é à luz desses aportes que esse modo de organização do ensino busca fazer com que os estudantes mobilizem os conceitos que já detêm no pensamento como forma de atribuir significado a objetos conceituais, e assim ressignificar ou construir um novo conceito.

Nesse estudo, a Teoria da Atividade (Leontiev, 1983, 1978) entra em cena como embasamento para atribuir significado para a noção de atividade. Já a teoria histórico-cultural ganha espaço para possibilitar compreender a produção/construção do conhecimento e para que se possa dimensionar se ele é apropriado pelos sujeitos.

Sob esses embasamentos teóricos, a atividade incorpora como elementos centrais as ações educativas, o conteúdo de ensino e os sujeitos que fazem parte da atividade (Moura et al., 2016).

Figura 3

Elementos centrais da atividade (Oliveira, 2019, p. 82)



Esta ilustração busca assinalar para relação de dependência que existe entre esses elementos, em que o movimento de um exerce uma influência direta nos demais. No que se refere aos sujeitos participantes da atividade,

professor(es) e os aluno(s), sabe-se que eles estão em constante atividade e são vistos como portadores de conhecimento, de valores e de afetividade. O professor tem como uma de suas funções organizar o ensino de modo a possibilitar aos alunos a apropriação tanto de conhecimentos como de experiências histórico-culturais (Moura et al., 2016).

Dessa ralação, a atividade pedagógica se nutre e ganha corpo, caminhando na direção de uma estrutura que privilegia “[...] uma necessidade (apropriação da cultura), um motivo real (apropriação do conhecimento historicamente acumulado), objetivos (ensinar e aprender) e propõe ações que considerem as condições objetivas da instituição escolar” (Moura et al., 2010, p. 217).

A necessidade/apropriação da cultura está ligada à origem da atividade e a apropriação de determinados objetos conceituais (conteúdos) que devem ser discutidos em sala de aula. Já o motivo diz respeito à aquisição de conceitos específicos da disciplina a ensinar. Por sua vez, os objetivos se referem às ações educativas, tanto de ensinar como também de aprender, as quais em um cenário geral estão associadas as operações práticas que direcionam ao desenvolvimento da ação formativa. Na relação e aproximação entre as ações educativas, o conteúdo de ensino, e os sujeitos, entende-se que a apreensão dos objetos conceituais deve ser vista pelos estudantes como uma necessidade para concluir a atividade (Moura et al., 2010; Moura et al., 2016).

METODOLOGIA

Neste estudo fala-se sobre uma ação formativa na qual foram explorados elementos do instrumento náutico jacente no plano junto a licenciandos em matemática⁷. Aqui, como já apontado anteriormente, o foco está em analisar o uso do referido instrumento como recurso didático para o ensino e aprendizagem dos conceitos de corda e de arco de circunferência na formação de estudantes da Licenciatura em Matemática.

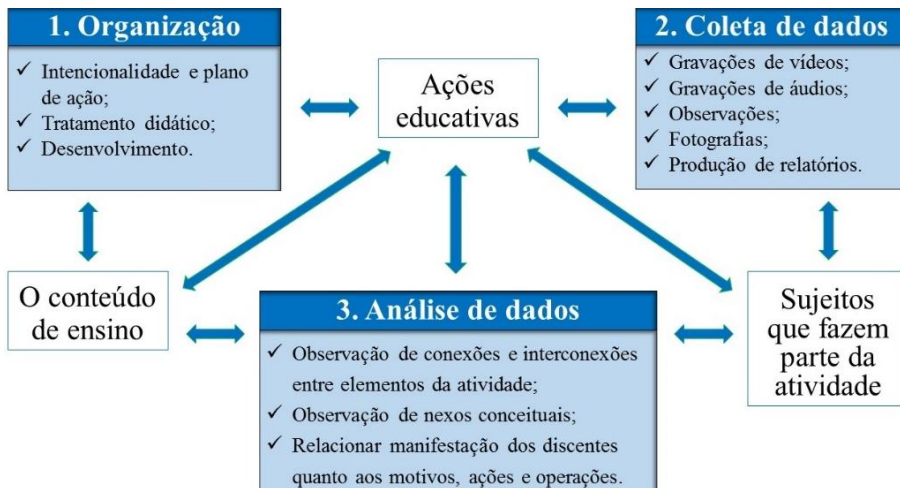
Nessa direção, a pesquisa como um todo é delineada à luz de uma abordagem qualitativa (Lüdke & André, 2013) e com base na proposta de construção de interface entre história e ensino de matemática. Para proposta de

⁷ Esta pesquisa é parte do projeto “Algumas potencialidades da construção do jacente no plano observadas na interface entre história e ensino da matemática”, aprovado no CEP da UECE sob número do Parecer: 3.599.527 e número do CAAE: 19561119.6.3001.5534.

atividade, seguem-se os elementos teóricos metodológicos da AOE nas etapas de construção, aplicação, coleta e análise dos dados. Nesses termos, o andamento da ação formativa assume a seguinte estrutura (Figura 4):

Figura 4

Estrutura da atividade



A organização da ação formativa está ancorada na perspectiva de construção de interface entre história e ensino de matemática (Saito & Dias, 2013). Na etapa de intencionalidade e plano de ação tem-se em linhas gerais os objetivos e intenções. O tratamento didático refere-se à decodificação do texto (excertos) em que Pedro Nunes descreve o instrumento jacente no plano, isso no sentido de favorecer a compreensão dos estudantes. Já o desenvolvimento, como o próprio nome sugere, diz respeito à execução da atividade na prática (Saito & Dias, 2013; Saito & Pereira, 2019). A coleta e análise dos dados seguem em grande parte aos aspectos teóricos metodológicos da AOE observados em algumas ações já desenvolvidas à luz desse modo de organização do ensino (Panossian et al., 2017).

A ação formativa em análise neste trabalho foi realizada no ano de 2019, com uma carga horária de 20 horas/aulas partilhadas entre os dias 1, 2 e 3 de agosto. Ela ocorreu no formato de um curso de extensão, na Universidade Estadual do Ceará (UECE), especificamente no Laboratório de Matemática e

Ensino Professor Bernardo Rodrigues Torres (LAbMATen/UECE) e na praça da rotatória da referida instituição.

O público participante foram 12 discentes da Licenciatura em Matemática da UECE, nos quais foram distribuídos proporcionalmente em 4 grupos. Aqui, cada um dos estudantes recebe um codinome específico, ocorrendo apenas uma variação quanto ao gênero, têm-se: aluna 1, aluna 2, aluno 3, aluno 4, aluna 5, aluno 6, aluna 7, aluna 8, aluno 9, aluna 10, aluno 11 e aluno 12. O grupo 1 é composto pelos três primeiros alunos (aluno 1, aluno 2 e aluno 3), segue essa lógica até o grupo 4 (aluna 10, aluno 11 e aluno 12).

No primeiro dia da atividade, os discentes tiveram que buscar compreender o aparato a partir da descrição de Pedro Nunes. No segundo dia, além dos excertos do quincentista, para fomentar o estudo dos participantes foi ainda fornecido uma réplica física do instrumento jacente no plano para cada um dos grupos. Por fim, no terceiro dia, fez-se um momento na praça da rotatória da UECE com os estudantes, no qual tiveram que utilizar o aparato em uma situação prática de uso.

Como o foco está na mobilização dos conceitos de arco e corda, aqui é dado lugar às discussões tecidas pelos estudantes no segundo dia da ação formativa (2 de agosto de 2019). Em específico, voltam-se os olhares para as discussões dos discentes sobre o arco da altura do Sol que é indicado pela sombra projetada pelo triângulo retângulo isósceles, o qual deve ser posto perpendicularmente a tábua e que a depender da configuração do aparato pode assumir tamanhos diferentes, mas ainda sim congruentes.

Ao analisarem a medida fornecida pela projeção da sombra do triângulo sobre a tábua, isso para as duas configurações assinaladas na figura 2, os alunos sentiram a necessidade de compreender o que seria um arco e uma corda de uma circunferência. Sobre esse momento, cabe destacar, novamente, que cada grupo de discentes teve como recurso a descrição de Pedro Nunes sobre o instrumento jacente no plano e uma réplica física do aparato.

Na sequência, é dado espaço tanto aos resultados coletados a partir da gravação de vídeos, de áudios, fotografias e produção de relatórios (Figura 4), como também à análise, a qual tem como critérios observar as conexões e interconexões entre elementos da atividade e os nexos conceituais e ainda relacionar as manifestações dos discentes quanto aos motivos, ações e operações (Figura 4).

Ainda sobre a análise, cabe destacar que sob o aporte da AOE foi tomado como categoria/unidade mínima de análise um isolado⁸, aqui definido como o momento das discussões dos discentes sobre o arco da altura do Sol. Esse isolado compõe-se por dois episódios⁹, o primeiro refere-se às falas em que os estudantes apresentam as compreensões iniciais e o segundo diz respeito ao momento em que caminham para uma sistematização dos conceitos.

RESULTADOS E ANÁLISES

Preliminarmente, vale pontuar que durante o estudo do instrumento jacente no plano a partir das instruções de Pedro Nunes e da réplica física do aparato, os discentes mobilizaram e possivelmente significaram e ressignificaram vários conceitos geométricos (Oliveira, 2019). Por exemplo, os conceitos de arco e de corda de circunferência, os quais aqui são elucidados. Dois excertos de Nunes sobre a construção e uso do instrumento contribuíram significativamente para impulsionar esse fato. O primeiro deles refere-se à instrução de que:

[...] se este tipo de instrumento tiver forma quadrada, de modo a que nele se possa traçar a recta **ak** tangente ao círculo no ponto **a**, não será necessário um estilete ou uma haste cuja sombra se projecte na reta **bd**. Basta rodar o próprio instrumento até que a sombra da recta **af** se projecte sobre a recta **ak**, pois assim a sombra da recta **ef** indicará *o arco da altura do Sol acima do horizonte* (Nunes, 2008, p. 359, grifo nosso).

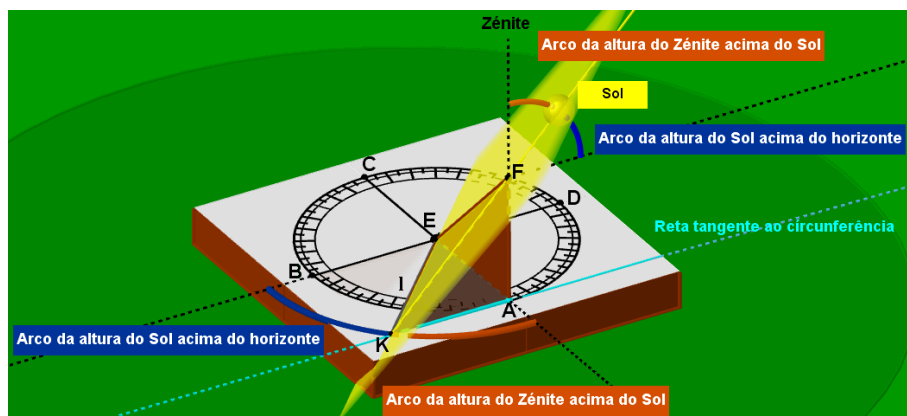
A esse respeito, tem-se a seguinte representação (Figura 5).

⁸ O isolado, refere-se à tomada de uma unidade do todo para análise. Sua definição é um dos primeiros produtos da análise (Araujo & Moraes, 2017). Como as discussões dos discentes sobre o arco da altura do Sol foram tecidas no segundo dia da atividade, compreende-se que elas podem ser definidas como um isolado, pois mesmo isoladas para estudo as discussões ainda fazem parte da atividade como um todo.

⁹ Os episódios poderão ser frases escritas ou faladas, gestos e ações que constituem cenas que podem revelar interdependência entre os elementos de uma ação formadora (Moura, 2004, p. 276).

Figura 5

Representação hipotética de uso do aparato



Como ilustrado nesta figura 5 e já assinalado no excerto de Pedro Nunes, aqui o autor está falado da possibilidade de uso do instrumento jacente no plano para a sua construção em uma tábua quadrada. Nota-se, ainda, onde é indicado no aparato o arco da altura do Sol acima do horizonte, e a esse respeito, é necessário pontuar que esse arco é calculado “[...] a partir do ponto **b** na direcção de **a**. A restante parte do quadrante até **a** será a distância entre o Sol e o zénite” (Nunes, 2008, p. 358).

O segundo excerto que somado a esse anterior impulsionaram a discussão, diz respeito a seguinte colocação de Pedro Nunes:

Se se duplicarem os lados do triângulo **fgh**, de maneira a que o lado **gh** seja igual ao diâmetro **ac** e se ajuste perfeitamente a ele, poder-se-á dividir o semicírculo **abc** em noventa partes iguais e então os graus da altura do Sol serão duplamente maiores (Nunes, 2008, p. 359).

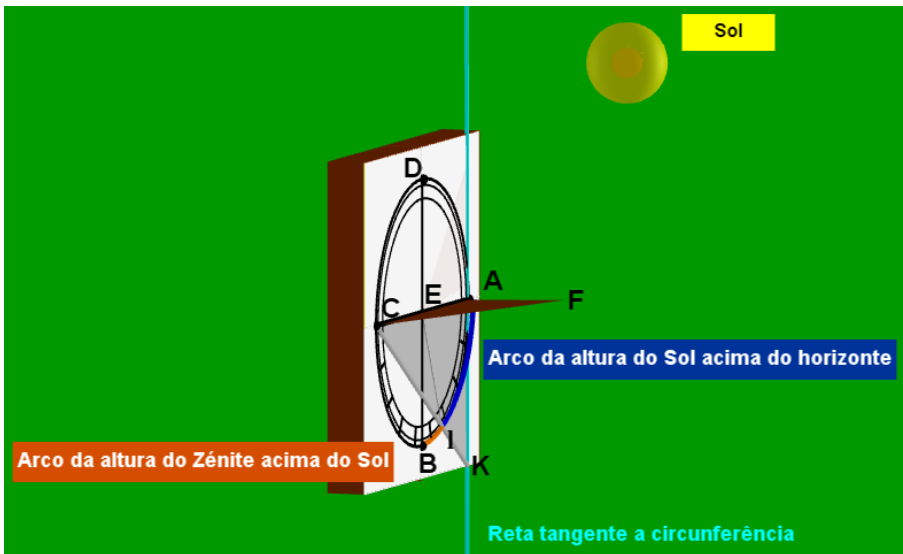
À luz dessa instrução, tem-se (Figura 6).

Essa configuração do instrumento jacente no plano ainda permanece na tábua quadrada, mas o diferencial é que, agora, muda a medidas dos lados do triângulo, pois devem ser duplicados. Construído dessa forma, o aparato deve ser posicionado perpendicular ao plano do horizonte e quando posto sobre o Sol, a sombra da reta **af** deve ser projetada sobre a “[...] reta **ak**, será **a1** o arco

da altura do Sol acima do horizonte, e o restante **b1** será o arco da distância entre o Sol e o zénite” (Nunes, 2008, p. 359).

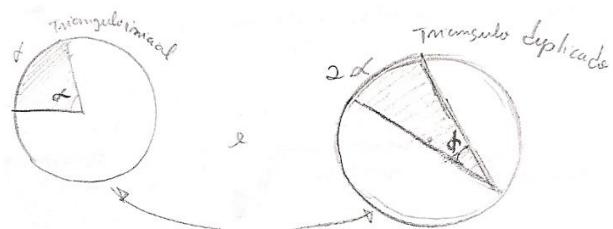
Figura 6

Representação hipotética de uso do aparato com os lados do triângulo fgh duplicados



Sobre o fato de Pedro Nunes destacar que nessa versão do instrumento que “[...] os graus da altura do Sol serão duplamente maiores” (Nunes, 2008, p. 359). Os discentes pontuam que:

[...] quando tu está trabalhando com circunferência, quando tu pega o centro daqui para cá é o α , essa separação é α . Quando tu aumenta isso aqui ó, aqui vai ser α dividido por 2. Arco de Circunferência. Quando tu aumenta para uma borda, tu aumenta o ângulo que vai formar lá, então é por isso que agora, como está vindo daqui para cá fica esse arco aqui agora



(Aluno 11, 2019).

Essa relação observada pelos estudantes vai ao encontro da vigésima proposição do terceiro livro dos Elementos de Euclides (Oliveira, 2019; Reis, 2003). Nela, o autor expõe que “[...] em um círculo, o ângulo junto ao centro é o dobro do sobre a circunferência, quando os ângulos tenham a mesma circunferência como base” (Euclides, 2009, p. 169). Nesses termos, entende-se que tomando uma circunferência, particularmente um mesmo arco dessa circunferência, o ângulo ao centro é, em graus, o dobro do ângulo inscrito.

Episódio 1 – Compreensões iniciais sobre os conceitos de arco e corda de circunferência

Diante dessas possíveis configurações para o instrumento jacente no plano, principalmente no que se refere ao tamanho e disposição do triângulo retângulo isósceles sobre a tábua e ainda por conta da mudança na leitura da medida da altura do Sol na circunferência, alguns estudantes ficam confusos sobre o que seria esse arco da altura do Sol. A esse respeito, tem-se a seguinte discussão iniciada por um questionamento.

[Aluna 7]: “O que é o arco da altura do Sol?”

[Professor]: “Pessoal o que é o arco da altura do Sol, vocês podem ajudar ela?”

[Aluno 12]: “É o arco que a sombra faz, agora o que significa eu não sei”.

[Aluna 7]: “Eu sei que a sombra é o arco, mas o que é o arco?”

Pelo que se pode observar nesse diálogo, a estudante entendeu que na situação de uso do instrumento jacente no plano, o arco vai ser indicado pela sombra que está sendo projetada sobre a tábua. A última fala da aluna 7, nessa conversa, revela que sua dúvida está relacionada ao conceito de arco. Diante dessa observação, nota-se que o conhecimento de corda aparece para a

estudante como uma necessidade para compreender a medida, fato que reforça o que a Atividade Orientadora de Ensino destaca, ao assinalar que o conteúdo de ensino, assim como outros elementos, deve ser compreendido pelo estudante como uma necessidade para cumprimento da atividade proposta (Moura et al., 2010; Moura et al., 2016).

Em continuidade, como forma de fomentar a compreensão da Aluna 7, alguns estudantes passam a apresentar sentidos que possuem sobre o conceito de arco. O primeiro a falar, é o:

[Aluno 4]: “Arco é uma parte de uma circunferência”.

[Aluna 8]: “É uma corda, não eu ia falar que é uma corda”.

[Professor]: “É uma corda como ela disse?”

[Aluna 8]: “É não”.

[Aluno 4]: “Não, corda é uma reta que se intersecta na circunferência em um ou dois pontos”.

[Aluna 8]: “Não, o arco pode ser uma corda também, pode!”

[Aluna 7]: “Pode!”

[Aluno 11]: “Mas você não pode afirmar que uma parte do círculo é necessariamente um arco”.

Nessa conversa, nota-se que é atribuído ao conceito de arco, que é uma parte da circunferência e que pode ser considerado uma corda. A incorporação do conceito de corda na discussão assinala para a existência de relação entre os conceitos. Esse fato vai ao encontro do valorizado na BNCC, em que a organização das habilidades privilegia a explicitação de como os objetos de conhecimento se relacionam (Brasil, 2017).

Nesses termos, assumindo o papel como um dos atores no processo educativo, assim como prevê a Atividade Orientadora de Ensino (Moura et al., 2010; Moura et al., 2016), o professor para promover a atividade dos estudantes, no sentido de fomentar discussões que possibilitem tanto articular os conceitos de corda e arco de circunferência como também atribuir ainda mais significados esses conceitos, lança o seguinte questionamento:

[Professor]: “Mas o arco pode ser uma corda?”

[Aluna 8]: “Que eu lembre pode”!

[Aluno 4]: “A corda é uma reta que intersecta a circunferência

em até dois pontos, um ou dois pontos. Se for um ela tem o nome de tangente”.

[Aluna 1]: “Mas não é o espaço entre esses dois pontos que tu estás falando que é a corda não!”

[Aluno 4]: “É a corda!”

Nesse diálogo, já aparece a noção de reta tangente como forma de justificar o que seria uma corda da circunferência. Insistindo na discussão, é perguntado pelo professor: “então a corda pode ser o arco?” um dos estudantes afirma que: “não!” (Aluno 11, 2019). A aluna 7 (2019), então questiona: “e o que é o arco se não pode ser a corda?”. Com essa pergunta, o diálogo volta a apresentar alguns significados aos conceitos de arco e corda.

[Aluno 4]: “O arco é uma parte de circunferência”.

[Aluna 5]: “que é a corda!”

[Aluna 7]: “Que é a corda!”

[Aluno 11]: “Você não pode afirmar isso, não é uma parte de circunferência”.

[Aluno 4]: “A corda é a reta de intersecção”.

[Aluna 7]: “A corda num é o espaço entre o círculo e essa reta”.

[Aluna 8]: “A corda num é a ligação entre dois pontos em uma circunferência”.

[Aluno 11]: “É”!

[Aluno 3]: “Mas tem que ser reto”.

[Aluno 11]: “É uma reta que liga dois pontos em uma circunferência que não inclua o ponto central”.

[Aluno 4]: “A corda é uma ligação entre dois pontos na menor distância”.

[Aluno 11]: “Que não inclua o ponto central”.

[Aluno 4]: “O arco é uma parte da circunferência”.

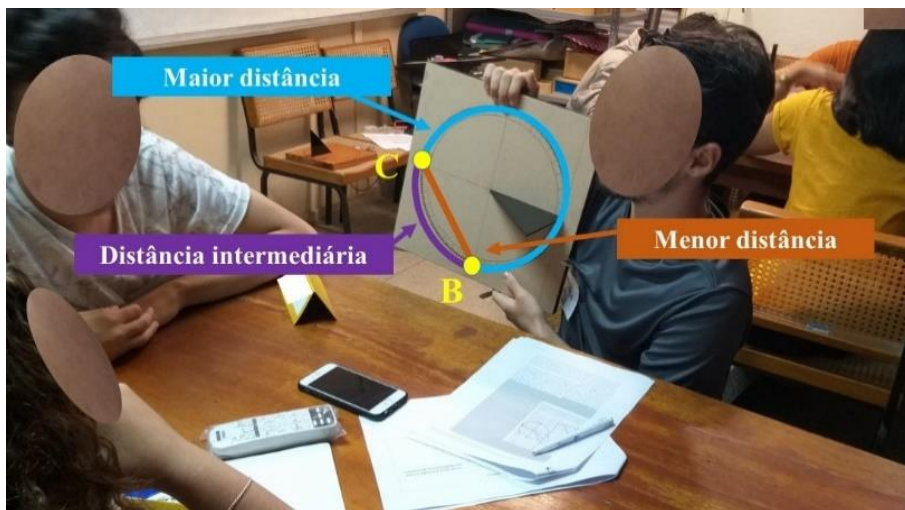
[Aluno 11]: “Mas não necessariamente é uma parte da circunferência”.

[Aluna 7]: “Então eu estudei corda o meu semestre todinho errado porque como eu entendi por corda foi isso aqui”.

Nesse trecho, nota-se que é assinalado um novo significado para a noção de corda de circunferência, isso quando o aluno 4 (2019) fala que ela “é uma ligação entre dois pontos na menor distância”. Sobre esse significado, a partir do instrumento jacente no plano, entende-se que (Figura 7).

Figura 7

A corda como menor distância (Elaborado pelos autores)



Tomando como referências os pontos **b** e **c**, pelo que o aluno 4 assinalou, a corda seria esse segmento de reta que está representado na cor laranja (menor distância). Visto dessa forma, esse significado corrobora com um outro já destacado anteriormente, em que a corda é vista como “uma reta que intersecta a circunferência em até dois pontos, um ou dois pontos. Se for um ela tem o nome de tangente” (Aluno 4, 2019). Nesses termos, um dos estudantes aponta que: “o arco vai ser a distância entre dois pontos da circunferência, percorrendo pela circunferência” (Aluno 11, 2019). Assim, a distância intermediária e a maior distância entre os pontos **b** e **c** seriam consideradas arcos da circunferência.

Ainda sobre o diálogo anterior, verifica-se ao final que a Aluna 7 declara que entendeu corda durante todo o semestre de forma equivocada. Na concepção dela, já exposta também nessa conversa anterior, ela fala que: “a corda num é o espaço entre o círculo e essa reta” (Aluna 7, 2019). Essa declaração da estudante indica que ela, possivelmente, a partir deste estudo com o instrumento jacente no plano, teve a oportunidade de reconfigurar esse conceito.

Episódio 2 – Caminhada na direção de uma sistematização dos conceitos

No sentido de caminhar para uma sistematização do conceito de corda, foi lançado o seguinte questionamento:

[Professor]: “Existe uma definição de corda?”

[Aluno 4]: “É um segmento de reta dentro da circunferência que liga dois pontos”.

[Aluno 11]: “Que não inclua o ponto central, que aí seria o diâmetro”.

[Aluno 3]: “Pode incluir”.

[Aluno 4]: “Pode incluir, se incluir é o diâmetro, o diâmetro é a maior corda”.

[Aluno 11]: “Dependendo do livro ele diferencia, tem livros que diferenciam o diâmetro da corda, ele coloca que a corda são a distância dos pontos que não inclua o ponto central”.

[Aluno 3]: “Então, no caso vai ser que nem os números naturais, tem livro que inclui o zero e outros não”.

[Aluno 11]: “É, é uma questão de autor, mas tem livro que considera que não tem que incluir o ponto central, porque se incluir vira diâmetro. Aí você coloca como o diâmetro. Que diâmetro vai ser a distância de dois pontos da circunferência que inclui o centro”.

[Aluno 4]: “O diâmetro é a maior corda da circunferência”.

[Aluno 4]: “Pois é, mas depende de autor, tem autor que não considera”.

Nesse diálogo, verifica-se que para apresentar significados, ao conceito de corda, os discentes ainda trazem para a discussão a noção de diâmetro. Esse fato também assinala para a relação que existe entre conceitos, isso quando se vai atribuir significado a um objeto e para assim construir ou ressignificar um conceito matemático.

No que se refere à definição de corda sistematizada pelos discentes nessa conversa, cabe destacar que ela está de acordo com o que se tem em livros de matemática da educação básica, em que “corda é o segmento com extremidades em dois pontos da circunferência” (Silveira & Marques, 2013, p. 285).

Ainda sobre esse diálogo anterior, cabe destacar o fato de os alunos pontuarem que, assim como o zero, que pode ou não ser considerado um número natural, o mesmo ocorre com o fato de tomar o diâmetro como uma corda ou não. Essa discussão assinala para uma certa maturidade dos estudantes quanto à definição/critérios para atribuir significado a determinados objetos matemáticos.

Agora, pensando em sistematizar os significados atribuídos ao conceito de arco, foi perguntado:

[Professor]: “O que é o arco para vocês, diante das discussões?”

[Aluna 7]: “O arco para mim é uma parte da circunferência, a parte externa, o contorno da circunferência”.

[Aluno 12]: “O contorno do setor circular, né!”

[Aluno 11]: “Uma parte do comprimento, que quando você bota o comprimento você não inclui a área”.

[...]

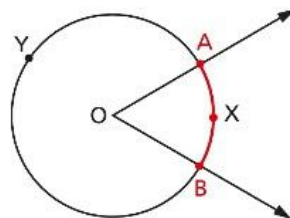
[Aluno 4]: “Corda é um segmento de reta, que liga dois pontos da circunferência. Arco é uma ligação entre dois pontos na circunferência.

[Aluna 8]: “Agora faz sentido!”

A definição, apontada pelos estudantes, vai ao encontro do que se pode observar em livros de matemática. Em um deles, especificamente no terceiro volume da coleção de Fundamentos de matemática elementar, a qual é bastante

conhecida e trabalhada em cursos de Licenciatura, tem-se:

Considerando uma circunferência de centro O e um ângulo central $A\hat{O}B$, sendo A e B pontos que pertencem aos lados do ângulo e à circunferência. A circunferência fica dividida em duas partes, cada uma das quais é um **arco de circunferência**: arco de circunferência \widehat{AXB} e arco de circunferência \widehat{AYB} . A e B são as extremidades do arco



(Iezzi, 2013, p. 24).

Na análise desse diálogo em conjunto com os demais, observam-se os discentes possivelmente reconfigurarem os conceitos de corda e arco de circunferência. Fala-se desse possível processo de internalização, pelo fato de que a atividade individual (relação intrapsíquica) dos discentes ganha corpo a partir da atividade coletiva (relação interpessoal), a qual acontece pela interação e diálogo entre os alunos e entre os estudantes e o professor (Vigotski, 2001). Corroboram para essa possibilidade o verificado no decurso das conversas, em que se têm expressões como “eu achava que era” (Aluna 8, 2019), atividade intrapsíquica inicial, e já ao final, a mesma estudante afirma que “agora faz sentido”, atividade intrapsíquica posterior, constituída a partir da interação e mediação com os demais estudantes. Essa fala da aluna 8 assinala para um salto qualitativo e significativo em relação à compreensão dos estudantes. Outra evidência que aponta para uma possível aprendizagem refere-se à seguinte escrita na ficha de avaliação diária¹⁰ (Figura 8).

¹⁰ A ficha de avaliação diária faz parte do relatório que os estudantes tiveram que entregar ao final de cada encontro.

Figura 8

Escrita de um dos discentes ao final da atividade (acervo dos autores)

que você sabe agora e não sabia antes?

1) Diferença entre corda e arco.

2) Diâmetro como sendo corda ou não.
(convenção).

Com esta resposta nota-se que as discussões potencializaram a aprendizagem dos conceitos de arco e corda. Uma das justificativas para essa compreensão é que os estudantes estavam em constante atividade durante a ação formativa, fato que à luz da Teoria da Atividade é responsável por gerar o desenvolvimento psicológico (Rigon et al., 2016). Na figura 8 observa-se ainda que o aluno passou a compreender que determinar o diâmetro como uma corda ou não é apenas uma convenção, que pode variar de autor para autor, sendo que alguns apontam o diâmetro como sendo a maior corda de uma circunferência, já outros não tomam o diâmetro como uma corda. Sobre esses pontos destacados na escrita do estudante (Figura 8), entende-se ainda que eles se aproximam de uma ação de autoavaliação e regulação (Davidov, 1987), a qual somada as interações durante toda a ação formativa assinalam para a apropriação dos conceitos.

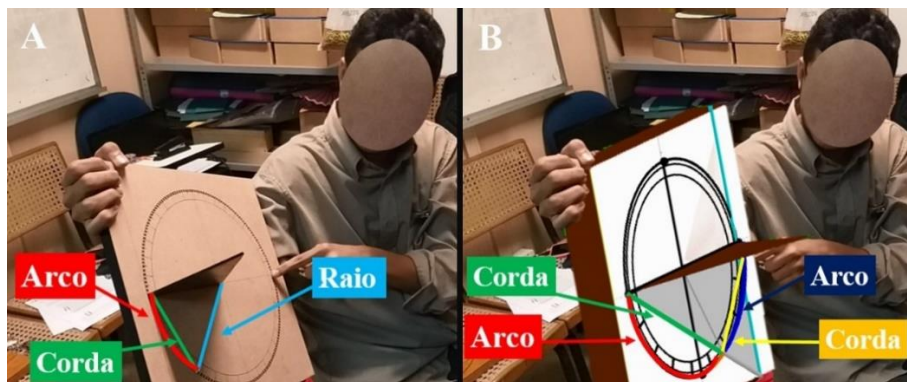
No instrumento jacente no plano, cabe destacar novamente que essas discussões de arco e corda foram elucidadas a partir da possibilidade de uso de duas variantes do aparato, uma com o triângulo retângulo isósceles com dois de seus lados congruentes ao semidiâmetro e a outra com os lados desse triângulo duplicado. Diante dessas possibilidades, esses conceitos estão sintetizados no aparato da seguinte forma (Figura 9):

Na Figura 9 (A) está representada a situação de uso do instrumento jacente no plano para o caso em que os lados do triângulo retângulo isósceles são congruentes ao semidiâmetro da circunferência. Como se pode observar, a sombra projetada pelo triângulo indica no limbo do aparato um arco (comprimento em vermelho), e das extremidades desse arco pode ser traçada uma corda (comprimento em verde) se tem também um segmento que sai do centro da circunferência e a toca em sua borda (raio). Para o caso em que os lados do triângulo estão duplicados (Figura 8B) está em destaque dois arcos,

um na cor vermelho e outro na cor azul e duas cordas, uma na cor verde e outra na cor amarela.

Figura 9

Instrumento com o triângulo de lado congruente ao semidiâmetro (A) e com triângulo com lados duplicados (B)



Comparando a mobilização dos conceitos de corda e arco nas duas configurações do aparato, nota-se que na Figura 8A a sombra projetada pela hipotenusa do triângulo é o raio, já na Figura 8B essa sombra é uma corda. São mudanças nesse sentido que potencializaram as discussões dos estudantes, visto que compreender esses conceitos passou a ser uma necessidade para entender a medida fornecida.

CONCLUSÕES

Diante da análise tecida neste estudo, o que se pode, então, dizer sobre: como o uso do instrumento jacente no plano em ambiente de formação de futuros professores pode favorecer o ensino de corda e arco de circunferência? A pesquisa mostra que o aparato aliado ao jogo de interações entre o conteúdo de ensino (corda e arco de circunferência), as ações educativas e a atividade do professor e dos discentes pode favorecer para que entendam como os conceitos de corda e arco se relacionam e para atribuir ainda mais significado a eles.

Ao observarem como os conceitos de corda e arco de circunferência se relacionam os estudantes têm a possibilidade de agregar ainda mais

significados a eles. Além de serem elucidadas a noção de arco e corda, para compreendê-las, ainda mobilizaram na discussão os conceitos de reta tangente e de diâmetro.

O instrumento jacente no plano pode ainda favorecer o ensino de corda e arco, pelo fato de ele impulsionar a mobilização de conceitos teóricos de forma prática. Entende-se que essa potencialidade pode colaborar para que os discentes possam atribuir ainda mais significado aos conceitos. É necessário ainda assinalar para a constante negociação de sentidos impulsionada pelo estudo do aparato, visto que ela também foi de suma importância para ressignificarem os conceitos em questão.

A partir desses resultados entende-se que o instrumento jacente no plano pode ser um recurso explorado pelo professor de matemática em sala de aula da Licenciatura. E em pesquisas futuras pretende-se analisar o potencial do aparato tanto para o trabalho com outros conceitos matemáticos como também para a sua incorporação em atividades voltadas a estudantes da educação básica.

DECLARAÇÕES DE CONTRIBUIÇÃO DOS AUTORES

FWSO e ACCP participaram de todo o processo dessa pesquisa, que vai desde a elaboração da proposta de minicurso, definição do amparo teórico metodológico, coleta e análises dos dados. A escrita deste artigo, também é produção do trabalho coletivo desses autores. Nesses termos, ambos aprovam a versão final do trabalho.

DECLARAÇÃO DE DISPONIBILIDADE DE DADOS

Os autores concordam que os dados que sustentam os resultados deste estudo estão disponíveis mediante solicitação razoável, a critério dos autores.

REFERÊNCIAS

Albuquerque, S. M. de, & Pereira, A. C. C. (2018). A divisão por unidades pelo método da diferença: uma proposta de uso do ábaco de Gerbert (976). *Revista de Produção Discente em Educação Matemática*. São Paulo, 7(2), 73-88.

- Alves, V. B., & Pereira, A. C. C. (2020). Seno, cosseno e tangente: uma atividade com os círculos de proporção de William Oughtred (1633) na formação de professores de matemática. *Amazônia: Revista de Educação em Ciências e Matemáticas*, 16(35), 74-88. <http://dx.doi.org/10.18542/amazrecm.v16i35.8275>
- Araujo, E. S. A., & Moraes, S. P. G. de. (2017). Dos princípios da pesquisa em educação como atividade. In M. O. de Moura (Org). *Educação escolar e pesquisa na teoria histórico-cultural*. São Paulo: Edições Loyola.
- Batista, A. N. de S., & Pereira, A. C. C. (2020). A balhestilha (1603) como um instrumento matemático para o estudo de medidas na formação de professores de matemática. *Acta Scientiarum. Education*, 43(1), 129-150. <https://doi.org/10.4025/actascieduc.v43i1.48188>
- Bennett, J. A. (2003). Knowing and doing in the sixteenth century: what were instruments for? *British Journal for the History of Science*, 36(2), 129-150. <https://doi.org/10.1017/S000708740300503X>
- Brasil, Ministério da Educação (2017). *Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Educação é a Base*. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME.
- Brasil. Ministério da Educação (2019). *Resolução CNE/CP nº 2, de 20 de dezembro de 2019. Define as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação Inicial de Professores para a Educação Básica e institui a Base Nacional Comum para a Formação Inicial de Professores da Educação Básica (BNC-Formação)*. <http://portal.mec.gov.br/docman/dezembro-2019-pdf/135951-rcp002-19/file>
- Canas, A. J. D. C. (2011). *A obra náutica de João Baptista Lavanha (c. 1550 – 1624)*. Tese de Doutorado, Universidade de Lisboa Faculdade de Letras Departamento de História, Lisboa. <http://repositorio.ul.pt/handle/10451/6140>
- Costa, A. F. da. (1969). *Pedro Nunes (1502-1578)*. Lisboa: Agência Geral do Ultramar.
- Davídov, V. V. (1987). Análisis de los principios didáticos de la escuela tradicional y posibles principios de enseñanza em el futuro próximo. In M. Shuare. *La Psicología evolutiva y pedagógica em la URSS: Antología* (pp. 143-142). Moscou: Editorial Progreso.

- Euclides. (2009). *Os Elementos*. São Paulo: Editora UNESP.
- Iezzi, G. (2013). *Fundamentos de matemática elementar, 7: trigonometria*. São Paulo: Atual.
- Leitão, H. (2008). Anotações ao De arte atque ratione nauigandi. In P. Nunes. *Obras* (4.vol., pp. 515-794). Lisboa: Academia das Ciências de Lisboa, Fundação Calouste Gulbenkian.
- Leitão, H. (2003). Para uma biografia de Pedro Nunes: o surgimento de um matemático, 1502-1542. *Cadernos de Estudos Sefarditas*, Lisboa, 3(1), 45-82. http://www.catedra-alberto-benveniste.org/fich/15/HENRIQUE_LEITAO.pdf
- Leontiev, A. (1978). *O desenvolvimento do psiquismo*. Lisboa: Livros Horizonte.
- Leontiev, A. (1983). *Atividade, conciencia, personalidad*. Habana: Pueblo y Educación.
- Lüdke, M., & André, M. E. D. A. (2013). *Pesquisa em educação: abordagens qualitativas*. São Paulo: E.P.U.
- Moura, M. O., Araújo, E. S., Moretti, V. D., Panossian, M. L. & Ribeiro, F. D. (2010). Atividade orientadora de ensino: unidade entre ensino e aprendizagem. *Rev. Diálogo Educ.*, 10(29), 205-229. <http://dx.doi.org/10.7213/rde.v10i29.3094>
- Moura, M. O., Araújo, E. S., Souza, F. D., Panossian, M. L., & Moretti, V. D. (2016). A Atividade Orientadora de Ensino como Unidade entre Ensino e Aprendizagem. In Moura, M. O. (Org). *A atividade pedagógica na teoria histórico-cultural* (pp. 93-126). São Paulo: Autores associados.
- Moura, M. O. (2004). Pesquisa colaborativa: um foco na ação formadora. In R. L. L. Barbosa (Org.). *Trajetórias e perspectivas da formação de educadores* (pp. 257-284). São Paulo: Editora UNESP.
- Nunes, P. J. A. (2012) *Os instrumentos náuticos na obra de Pedro Nunes* [Dissertação de Mestrado, Curso de Mestrado de História Marítima, Universidade de Lisboa Faculdade de Letras Departamento de História]. Lisboa. <http://repositorio.ul.pt/handle/10451/8968>
- Nunes, P. (2008). *Obras, Vol. IV: De Arte Atque Ratione Navigandi*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

- Oliveira, F. W. S., & Pereira, A. C. C. (2020b). Índícios do Costume Relacionado a Divisão da Circunferência em Seus 360 Graus presente na Fabricação do Instrumento Jacente no Plano de Pedro Nunes. *Revista Brasileira de História da Matemática*, 20(39), 35-49. <http://dx.doi.org/10.47976/RBHM2020v20n3935-49>
- Oliveira, F. W. S., & Pereira, A. C. C. (2020c). Sobre a navegação portuguesa do século XVI à luz do instrumento jacente no plano. *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*.
- Oliveira, F. W. S., & Pereira, A. C. C. (2020a). Uma proposta de atividade com o instrumento jacente no plano para o nono ano do ensino fundamental com foco na semelhança de triângulos. *Revista história da matemática para professores*, 6(2), 20 - 27.
- Oliveira, F. W. S. (2019). *Sobre os conhecimentos geométricos incorporados na construção e no uso do instrumento jacente no plano de Pedro Nunes (1502-1578) na formação do professor de matemática* [Dissertação de Mestrado, Instituto Federação de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará]. Fortaleza. https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=8250117
- Oliveira, F. W. S. (2020) Um primeiro olhar sobre a reconstrução do instrumento jacente no plano de Pedro Nunes na formação do professor de matemática. *Boletim Cearense de Educação e História da Matemática*, 7(20), 67–79, 2020. <http://dx.doi.org/10.30938/bocehm.v7i20.2868>
- Oliveira, G. P. (2021). Um primeiro olhar de aspectos gerais do tratado a arte de navegar (1606) de Simão d' Oliveira. In: *XIV Seminário Nacional de História da Matemática*. Anais, Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba-Minas Gerais. [www.even3.com.br/Anais/xivsnhm/326492-UM-PRIMEIRO-OLHAR-DE-ASPECTOS-GERAIS-DO-TRATADO-A-ARTE-DE-NAVEGAR-\(1606\)-DE-SIMAO-D-OLIVEIRA](http://www.even3.com.br/Anais/xivsnhm/326492-UM-PRIMEIRO-OLHAR-DE-ASPECTOS-GERAIS-DO-TRATADO-A-ARTE-DE-NAVEGAR-(1606)-DE-SIMAO-D-OLIVEIRA)
- Panossian, M. L., Marco, F. F., Lopes, A. R. L. V., Souza, F. D., & Moretti, V. D. (2019). A atividade orientadora de ensino como pressuposto teórico-metodológico de pesquisas. *Revista Reflexão e Ação*, 25(3), 279-298. <https://doi.org/10.17058/rea.v25i3.9765>

- Pereira, A. C. C., & Saito, F. (2019a). A reconstrução do báculo de Petrus Ramus na interface entre história e ensino de matemática. *Cocar*, 13(25), 342-372.
- Pereira, A. C. C., & Saito, F. (2019b). Os conceitos de perpendicularidade e de paralelismo mobilizados em uma atividade com o uso do báculo (1636) de Petrus Ramus. *Educação Matemática Pesquisa*, 12(1), 405-432. <https://doi.org/10.23925/1983-3156.2019v21i1p405-432>
- Pereira, A. C. C., & Saito, F. (2018). Os instrumentos matemáticos na interface entre história e ensino de matemática: compreendendo o cenário nacional nos últimos 10 anos. *Boletim Cearense de Educação e História da Matemática*, 5(14), 109-122. <https://doi.org/10.30938/bocehm.v5i14.225>
- Reis, A. E. (2003). Os instrumentos de medida. *As Novidades do Mundo: conhecimento e representação na Época Moderna* (pp. 145-167). Lisboa: Edições Colibri.
- Rigon, A. J., Asbabr, F. da S. F., & Moretti, V. D. (2016). Sobre o Processo de Humanização. In M. O. Moura (Org). *A atividade pedagógica na teoria histórico-cultural* (pp. 15-50). São Paulo: Autores associados.
- Saito, F. (2009). Algumas considerações historiográficas para a história dos instrumentos e aparatos científicos: o telescópio na magia natural. In A. M. Alfonso-Goldfarb, J. L. Goldfarb, M. H. M. Ferraz, & S. Waisse, S. (Orgs.). *Centenário Simão Mathias: documentos, métodos e identidade da história da ciência* (pp. 103-120). São Paulo: PUCSP.
- Saito, F. (2019). A reconstrução de antigos instrumentos matemáticos dirigida para formação de professores. *Educação: Teoria e Prática*, 29(62), 571-589. <https://doi.org/10.18675/1981-8106.vol29.n62.p571-589>
- Saito, F. (2016a). Construindo interfaces entre história e ensino da matemática. *Ensino da Matemática em Debate*, 3(1) 3-19. <https://revistas.pucsp.br/index.php/emd/article/view/29002/20273>
- Saito, F., & Dias, M. S. (2013). Interface entre história da matemática e ensino: uma atividade desenvolvida com base num documento do século XVI. *Ciência & Educação (Bauru)*, 19(1), 89-111. <https://doi.org/10.1590/S1516-73132013000100007>

- Saito, F. (2016b). História e Ensino de Matemática: Construindo Interfaces. In: Salazar, J. F. & Guerra, F. U. *Investigaciones en Educación Matemática*. Lima: Fondo Editorial PUCP, 253-291.
- Saito, F. (2014). Instrumentos matemáticos dos séculos XVI e XVII na articulação entre história, ensino e aprendizagem de matemática. *Revista de Matemática, Ensino e Cultura*, 9(16), 25-47.
- Saito, F. (2017). Número e grandeza: discutindo sobre a noção de medida por meio de um instrumento matemático do século XVI. *Ciência & Educação (Bauru)*, 23(4), 917-940. <https://doi.org/10.1590/1516-731320170040012>
- Saito, F., & Pereira, A. C. C. (2019). *A elaboração de atividades com um antigo instrumento matemático na interface entre história e ensino*. São Paulo: Livraria da Física.
- Santos, A. G. dos. (2022). *Os aspectos matemáticos relacionados à média geométrica que emergem a partir da manipulação da escala dos números (1623) elaborada por Edmund Gunter com licenciandos em matemática* [Dissertação de Mestrado, Instituto Federação de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará]. Fortaleza.
- Santos, A. G. dos, & Pereira, A. C. C. (2021). Descrição das escalas do Cross-Staff (1623) de Edmund Gunter. *Boletim Cearense de Educação e História da Matemática*, 8(23), 707-720. <http://dx.doi.org/10.30938/bocehm.v8i23.4922>
- Silva, I. C. da, & Pereira, A. C. C. (2021). Definições e critérios para uso de textos originais na articulação entre história e ensino de matemática. *Boletim de Educação Matemática –Bolema [online]*, 35(69), 223-241. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n69a11>
- Silva, L. P. da. (1945). A arte de navegar dos Portugueses, desde o Infante a D. João de Castro. In: *Obras completas*. Vol. II. Lisboa: Agência Geral das Colônias, pp. 223-432.
- Silveira, Ê., & Marques, C. (2013). *Matemática: compreensão e prática. Obra em quatro volumes para os 6º, 7º, 8º e 9º anos do ensino fundamental II*. São Paulo: Moderna.
- Van Helden, A., & Hankins, T. L. (1994). Introduction: Instruments in the History of Science. *Osiris*, 9(1), 1-6. <https://doi.org/10.1086 / 368726>

Vigotski, L. S. (2001). *A formação do pensamento e da linguagem*. São Paulo: Martins Fontes.