ACTA SCIENTIAE

(cc) BY

**ISSN**: 2178-7727
**DOI**: 10.17648/acta.scientiae.6604

# Modelo de flexibilidade na evolução conceptual da comparação multiplicativa

Graça Cebola[a]
Joana Brocardo[b]

[a] Instituto Politécnico de Portalegre, Escola Superior de Educação e Ciências Sociais, Portalegre, Portugal
[b] Instituto Politécnico de Setúbal, Escola Superior de Educação, Setúbal, Portugal

*Recebido para publicação 28 out. 2020. Aceito após revisão 6 set. 2021.*
*Editora designada: Claudia Lisete Oliveira Groenwald*

## RESUMO

**Contexto**: A proporcionalidade é um tópico de reconhecida importância ao nível da literacia matemática dos alunos. Neste tópico é fundamental a compreensão da comparação multiplicativa e do uso flexível dos conceitos de razão e proporção. **Objetivos**: Analisar a articulação entre conceitos, estratégias de resolução e representações utilizadas pelos alunos, suportadas por relações numéricas e propriedades das operações a fim de caracterizar um modelo da evolução conceptual da comparação multiplicativa. **Design**: *Research based design*. **Ambiente e participantes**: Duas professoras de Matemática a lecionar o 6.º ano (alunos maioritariamente com 12 anos) e os seus 38 (18 + 20) alunos durante as aulas em que foram exploradas cinco tarefas. **Coleta e análise de dados**: Os dados incluem a transcrição dos registos vídeo das aulas e as produções escritas dos alunos. Os dados foram sucessivamente revisitados e condensados de modo a identificar e ilustrar os aspetos que integram o modelo de evolução conceptual da comparação multiplicativa. **Resultados**: A construção do conceito de comparação multiplicativa prevalece no trabalho em dois espaços de medida e na exploração da relação multiplicativa entre as quantidades correspondentes dentro de cada um. As estratégias de resolução começam por ser não quantitativas e transformam-se em quantitativas com características inicialmente aditivas e depois multiplicativas. As representações baseiam-se na razão sob a forma de fração, na linha numérica dupla e na tabela de razões, sendo sustentadas em relações numéricas e propriedades das operações. **Conclusões:** Os resultados elucidam, ajustam e ilustram um modelo teórico relativo à evolução da comparação multiplicativa em dois espaços de medida.

**Palavras-chave**: comparação multiplicativa; flexibilidade; estratégias; representações.

Corresponding author: Graça Maria Cebola. Email: gracacebola@ipportalegre.pt

**Model of Flexibility in the Conceptual Evolution of Multiplicative Comparison**


## ABSTRACT

**Background**: Proportionality is a paramount topic in students' mathematical literacy. In this topic, it is fundamental to understand the multiplicative comparison and the flexible use of the concepts of ratio and proportion. **Objectives**: To analyse the articulation between concepts, resolution strategies, and representations used by students, supported by numerical relationships and properties of operations to characterise a model of the conceptual evolution of multiplicative comparison. **Design**: *Research based design*. **Setting and participants**: Two mathematics teachers teaching 6th grade (11-12-year-old students) and their 38 (18 + 20) students during the lessons in which five assignments were explored. **Data collection and analysis**: The data includes the transcription of the video recordings of the classes and the students' written productions. The data were successively revisited and condensed to identify and illustrate the aspects that make up the model of the conceptual evolution of multiplicative comparison. **Results**: The construction of the concept of multiplicative comparison prevails in the work in two spaces of measurement and in the exploration of the multiplicative relationship between the corresponding quantities within each one. Resolution strategies are first non-quantitative and become quantitative, initially with additive and then multiplicative characteristics. The representations are based on the ratio as a fraction, on the double number line, and on the table of ratios, being supported by numerical relationships and properties of operations. **Conclusions:** The results elucidate, adjust, and illustrate a theoretical model related to the evolution of the multiplicative comparison in two spaces of measurement.



**Keywords**: Multiplicative comparison; Flexibility; Strategies; Representations.


## INTRODUÇÃO

A proporcionalidade é um tópico que integra os currículos de Matemática dos vários países que, de um modo global, a par da importância dos conceitos de razão e proporção que lhe estão associados, destacam a sua importância ao nível da interpretação e resolução de problemas da vida de todos os dias dos cidadãos.

Do ponto de vista da progressão da aprendizagem da Matemática vários autores salientam a importância da proporcionalidade, considerando que ela alia a consolidação dos conhecimentos matemáticos já adquiridos, com a construção de alicerces para a matemática escolar superior e para o raciocínio algébrico (Langrall & Swafford, 2000). De facto, um conhecimento limitado das operações multiplicação e divisão e dos números racionais representados na forma decimal ou de fração, influencia negativamente a compreensão das noções de razão e proporção (Pittalis, Christou, & Papageorgiou, 2003). Trabalhar a proporcionalidade envolve consolidar o conhecimento das operações com números racionais positivos, das suas propriedades e relações, aliando-a com o que Lamon (2007) refere como uma visão mais consolidada e sofisticada do raciocínio multiplicativo e da comparação de quantidades em termos relativos, aspetos em que incide este artigo.

Para promover uma aprendizagem significativa em Matemática importa entrelaçar os conteúdos matemáticos relevantes com o desenvolvimento de competências matemáticas relacionadas, por exemplo, com o raciocínio matemático e a resolução de problemas. Como sublinha o NRC (2001) uma aprendizagem significativa está relacionada com proficiência matemática, construto que integra a compreensão conceptual (compreensão de conceitos matemáticos, operações e relações), a fluência de procedimentos (competência em executar procedimentos de forma flexível, precisa, eficiente e apropriada), a competência estratégica (capacidade de formular, representar e resolver problemas matemáticos), o raciocínio adaptativo (capacidade para o pensamento lógico, a reflexão, a explicação e a justificação) e aquilo que designam por tendência produtiva, ou seja, a propensão comum para ver a Matemática como sensata, útil e interessante e para crer também no seu zelo e na sua própria eficácia.

Todos estes elementos da proficiência matemática têm sido amplamente discutidos ao nível da Educação Matemática. No entanto, os estudos sobre flexibilidade em Matemática têm incidido sobretudo na flexibilidade em cálculo mental (Threlfall, 2009; Rathgeb-Schnierer & Green, 2013).

Neste artigo, aprofundamos o conceito de flexibilidade que o NCTM (2014) articula com o de fluência em Matemática, que considera estar intimamente relacionada com a escolha flexível de métodos e estratégias para a resolução de problemas em contexto que pode, ou não, ser matemático, e vamos mais longe, pois aliamos o estudo da comparação multiplicativa ao da flexibilidade, aspetos pouco estudados na literatura de uma forma conjunta. Focam-se os conceitos de fator multiplicativo, razão e proporção e as conexões entre a compreensão de conceitos, as estratégias de resolução e as representações utilizadas, suportadas pelas relações numéricas e pelas propriedades das operações, perspetivando um modelo que caracteriza a flexibilidade na comparação multiplicativa. Em particular, o seu objetivo é fundamentar e ilustrar um modelo que traduz a flexibilidade na evolução conceptual da comparação multiplicativa.

## EVOLUÇÃO CONCEPTUAL DA COMPARAÇÃO MULTIPLICATIVA

Uma situação de proporcionalidade é baseada nas relações multiplicativas que existem entre as quantidades que a compõem. Vergnaud (1983, 1988) usa um modelo baseado no conceito de espaço de medida que permite dar sentido à abordagem de situações deste género. Define espaço de medida em termos de grandezas físicas tais como comprimento, massa, dinheiro ou até mesmo pessoas. Todas estas grandezas podem ser quantificadas e, como tal, os valores que lhes correspondem são designados por quantidades. Uma proporção é, portanto, uma relação multiplicativa entre as quantidades de dois espaços de medida que Vergnaud (1983, 1988) esquematiza como se apresenta na figura 1.

**Figura 1**

*Esquema conceptual de Vergnaud para as proporções.*

| $M_1$ | $M_2$ |
|---|---|
| $a$ | $b$ |
| $c$ | $d$ |

$M_1$ e $M_2$ são espaços de medida
e $a$, $b$, $c$ e $d$ são quantidades.

Numa situação proporcional as quantidades entre espaços de medida e dentro de cada um estão sempre relacionadas de forma multiplicativa. Por exemplo, entre os dois espaços de medida $M_1$ e $M_2$ temos $b = k \times a$ e $d = k \times c$, em que $k$ é uma constante (constante de proporcionalidade, fator funcional). A generalização desta situação permite-nos considerar a sua tradução algébrica como sendo uma equação linear do tipo $y = kx$ ($k \neq 0$), cuja representação gráfica é ilustrada por uma reta de declive positivo e que passa pela origem.

O esquema da figura 1 permite-nos também evidenciar que, dentro de um mesmo espaço de medida, a relação entre as quantidades é ainda multiplicativa. Esta característica possibilita-nos, ao interpretarmos a relação como uma fração, que se considerem múltiplas frações equivalentes. Com esta exploração transformamos o esquema de Vergnaud numa tabela com mais linhas em que os respetivos valores surgem, primeiramente através dos múltiplos inteiros e, num momento posterior (e consoante o contexto em questão), através de um qualquer fator real (fator escalar).

Ainda em situações de comparação multiplicativa com dois espaços de medida, Cramer, Post e Currier (1993) referem que nos problemas de valor omisso, em que são indicados três dos quatro valores de uma proporção e cujo objetivo é determinar o valor em falta (ou termo omisso), as relações multiplicativas com fatores não inteiros, entre e dentro dos dois espaços de medida, apresentam um grau de dificuldade maior porque os alunos não compreendem os procedimentos que os conduzem a propriedades em outros campos numéricos.

No entanto, quando nos referimos ao tipo de problemas utilizados na investigação que permite avaliar a capacidade de raciocinar proporcionalmente e discutir os conceitos de razão e de proporção, surgem também problemas de comparação entre duas razões (Cramer, Post, & Currier, 1993; Lamon, 2007). São exemplos conhecidos deste tipo de problemas os que procuram comparar o sabor de sumos de laranja quando são indicados diferentes números de chávenas de concentrado e de água.

Uma razão é definida como uma relação comparativa entre duas grandezas ou dois espaços de medida (NRC, 2001) ou como o resultado de comparar multiplicativamente duas quantidades (Thompson, 1994). Freudenthal (2002) refere que a razão pode classificar-se em: (i) interna ou escalar (ou razão dentro de um espaço de medida), se as grandezas que a constituem partilham o mesmo espaço de medida; (ii) externa ou funcional (ou razão entre espaços de medida), quando é composta por grandezas de diferentes espaços de medida. Além desta classificação, Freudenthal (2002) apela à contextualização fenomenológica do conceito e defende que uma razão pode também ser interpretada como um quociente, no qual a razão interna é um número (comparação multiplicativa) e a razão externa é uma grandeza diferente das iniciais, designada, segundo Lobato, Ellis, Charles e Zbiek (2010), como unidade composta. Quando, por exemplo, se mistura tinta amarela e azul, criamos uma nova cor (verde) dependente das quantidades das tintas iniciais, que pode ser pensada como uma unidade composta e que podemos replicar sempre que seja necessário. A quantidade de tinta de cada uma das cores iniciais é então determinada através de um processo de iteração (repetição) ou de partição (divisão), consoante o objetivo seja aumentar ou diminuir a mistura que originou aquele tom de cor verde.

No percurso evolutivo e conceptual da proporcionalidade começamos por considerar situações contextualizadas em que o aluno, de uma forma mais ou menos intuitiva, efetua procedimentos operativos apenas em um espaço de medida (razão interna ou escalar). De seguida, as situações em contexto devem-lhe permitir interpretar e efetuar procedimentos em dois espaços de medida (razão externa ou funcional). Numa fase posterior, surgir-lhe-á a ligação à função linear na qual se considera a interpretação e representação gráfica.

## FLEXIBILIDADE NA COMPARAÇÃO MULTIPLICATIVA

A flexibilidade na resolução de tarefas e, em particular, de problemas de comparação multiplicativa baseia-se na ideia de que as estratégias de resolução são construídas e não apenas utilizadas. Threlfall (2009), no contexto específico do cálculo mental, defende que as estratégias de cálculo mental vão sendo construídas e não apenas utilizadas, isto é, não são selecionadas de uma coleção e depois aplicadas, mas são de natureza emergente no sentido que vamos escolhendo o que fazer com os números. "A estratégia de cálculo não foi selecionada e aplicada, foi aparecendo" (Threlfall, 2009, p. 548), ou seja, os números que surgem num problema levam-nos a uma estratégia de cálculo de cunho pessoal e que é construída passo a passo. A estratégia por nós construída depende, por isso, do conhecimento que temos dos números, das suas propriedades e relações (composição, decomposição, aproximação, combinação, substituição, …) e do seu papel a nível operativo, ou seja, um maior conhecimento permite que dominemos um maior número de opções. Threlfall (2009) defende, por isso, que a flexibilidade em cálculo mental surge de uma "descoberta", que pode em parte ser não consciente, e que é influenciada por uma relação de confiança, de facilidade e de viabilidade experimentada por cada um no contexto em causa.

À flexibilidade de cálculo mental, considerada como uma forma apropriada de agir perante um problema, Rathgeb-Schnierer e Green (2013) juntam a ideia de que somente uma combinação dinâmica entre meios estratégicos (composição e decomposição de números, utilização de analogias entre as diferentes ordens na representação dos números, …), características dos problemas, regularidades numéricas e suas relações a permite evidenciar.

Neste estudo, conciliamos estas últimas propostas com as ideias de Threlfall (2009) e consideramos que a flexibilidade de estratégias (entendidas como procedimentos de cálculo) é um processo dinâmico que vamos definindo progressivamente. A construção da estratégia desenvolve-se ainda na relação entre o conhecimento de conceitos (compreender *porque* fazer) e de procedimentos (compreender *como* fazer), na influência que cada um determina no outro e no quanto ambos são imprescindíveis para a compreensão matemática. Segundo Sfard (1991), na construção do conhecimento matemático os termos estrutural (conceito) e operacional (processo) são inseparáveis, são "facetas de uma mesma coisa" (p. 9) e é esta dualidade que deve ser explorada e evidenciada no processo de ensino e aprendizagem.

## REPRESENTAÇÕES NA COMPARAÇÃO MULTIPLICATIVA

O papel das representações (externas) tem vindo a ser discutido e valorizado no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, numa ligação muito estreita com a compreensão de conceitos e de procedimentos e nas conexões entre ambos. De acordo com o NCTM (2000), “a representação é central para o estudo da matemática” (p. 280) e, no contexto de uma sala de aula, a exploração de diferentes representações na resolução de determinada tarefa, a sua discussão e reflexão conjunta sobre qual a mais adequada, fazem parte do processo de comunicação matemática a desenvolver ao longo de toda a escolaridade. A relevância das representações surge, segundo NCTM (2014), quer nas ações dos alunos (aprendizagem), por exemplo, quando utilizam várias formas de representação para darem sentido a uma situação problemática ou quando contextualizam ideias matemáticas em situações da vida real; quer nas ações dos professores (ensino), por exemplo, ao selecionarem tarefas que permitam aos alunos decidir sobre quais as representações a usar ou ao solicitarem que eles façam desenhos, esquemas ou outro suporte visual para explicarem e justificarem o seu raciocínio.

As conexões entre conceitos, entre modos de representação e entre conceitos e modos de representação são um fator positivo para o processo de aprendizagem. Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) referem especificamente as conexões entre o conceito de razão e os diferentes modos de representação defendidos por Bruner (1966) – ativo, icónico e simbólico – e que denominam por representações concretas, figurativas e simbólicas, respetivamente.

> Conceitos como fração, razão, decimal e percentagem constituem ideias chave a serem trabalhadas em situações significativas para os alunos e que lhes permitam a passagem de umas representações para outras, das concretas para as figurativas e destas para as simbólicas. (Abrantes *et al.*, 1999)

As representações são, portanto, consideradas como ferramentas de suporte à compreensão de novos conceitos ou procedimentos e à resolução de problemas. Vergnaud (1983, 1988) defende que a representação esquemática de problemas, tal como exemplificado anteriormente, se torna importante para a sua resolução e para realçar o papel das estruturas multiplicativas no conceito de comparação multiplicativa. Não faz referência ao tipo de números envolvidos e, como tal, as quantidades em cada um dos espaços de medida podem ser números inteiros ou não inteiros, representados sob diversas formas.

Numa fase inicial de aprendizagem os modelos de representação devem estar, de acordo com van Galen *et al*. (2008), muito próximos de situações contextualizadas, mas à medida que a escolaridade avança, devem permitir que os alunos raciocinem para além de uma situação concreta. Sugerem, por isso, que progressivamente surja a substituição de "modelos de situações concretas por modelos para pensar" (p. 18), que exemplificam com a utilização e exploração da barra dupla ou da linha numérica dupla com frações, percentagens, decimais e proporções.

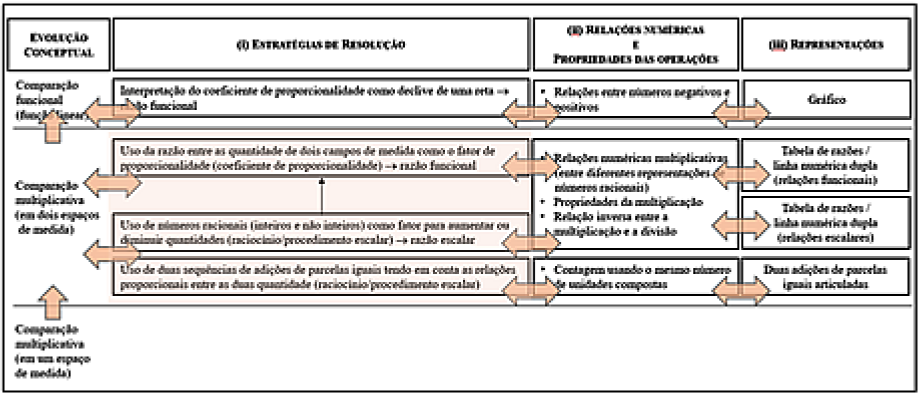
O uso de diversas representações, por parte dos alunos, na resolução de tarefas específicas surge, neste estudo, numa posição de destaque relativamente à discussão sobre flexibilidade na evolução conceptual da comparação multiplicativa. É realçada a representação de razão sob a forma de fração e a utilização de tabelas e linhas numéricas duplas, com números inteiros e não inteiros.

## MODELO DE FLEXIBILIDADE NA EVOLUÇÃO DA COMPREENSÃO DA COMPARAÇÃO MULTIPLICATIVA

No sentido de analisar a flexibilidade na compreensão da comparação multiplicativa, manifestada pelos alunos na resolução de tarefas, propomos um modelo baseado na sua evolução conceptual (Vergnaud, 1983, 1988) em que identificamos três níveis: comparação multiplicativa em um espaço de medida; comparação multiplicativa em dois espaços de medida; comparação funcional (função linear). Na figura 2 estes níveis estão indicados na coluna da esquerda e cada um é articulado (setas horizontais de sentido duplo) com as estratégias de resolução (segunda coluna, da esquerda para a direita) e as representações (última coluna, da esquerda para a direita) utilizadas pelos alunos. As referidas ligações entre estratégias e representações são conduzidas por aspetos numéricos, relações numéricas e propriedades das operações, escolhidas pelos alunos (setas horizontais de sentido duplo).

**Figura 2**

*Flexibilidade e evolução conceptual da comparação multiplicativa.*




A flexibilidade é suportada pelas relações horizontais, de sentido duplo, entre as quatro colunas e pelas articulações verticais, de baixo para cima, que simbolizam o desenvolvimento conceptual da comparação multiplicativa. É considerada um processo dinâmico no sentido de adaptação das estratégias de resolução e do uso de representações às características das tarefas, no qual as relações numéricas e as propriedades das operações adquirem um papel de destaque.

## METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO

Tendo como objetivo a construção de uma teoria local sobre a promoção flexível da comparação multiplicativa este estudo segue uma metodologia de Investigação Baseada em *Design* (IBD) (Gravemeijer & Cobb, 2013) com dois ciclos de investigação.

A opção pela IBD justifica-se por o objetivo do estudo se alicerçar na compreensão, por parte dos alunos, de um tópico matemático particular quando se explora, na sala de aula, uma sequência de tarefas que se constituem como uma trajetória hipotética de aprendizagem definida a partir da teoria (Simon & Tzur, 2004).

O primeiro ciclo de investigação é realizado numa turma de 6.º ano de escolaridade com dezoito alunos (dos quais dezassete têm onze anos e um treze anos de idade), cuja professora de Matemática, Sofia, leciona há 16 anos. O segundo ciclo de investigação, ocorre no ano letivo seguinte e assenta num ajuste da trajetória de aprendizagem usada no primeiro. É realizado numa outra turma de 6.º ano com vinte alunos (dos quais quinze têm onze anos, quatro têm dez anos e um tem treze anos de idade), e cuja professora, Vera, tem 28 anos de experiência docente. Nos dois ciclos de investigação a primeira autora deste artigo promove reuniões de trabalho com as professoras, nas quais, após uma explicação das linhas gerais do projeto, se efetua uma apresentação e discussão aprofundada de cada tarefa. São analisados e discutidos documentos escritos em que se propõem os enunciados das tarefas, os seus objetivos de aprendizagem, o seu enquadramento no Programa de Matemática em vigor, as indicações de exploração das tarefas na sala de aula, incluindo a antecipação de resoluções e os prováveis erros dos alunos. É nestas reuniões que se ajusta também a planificação a médio prazo anteriormente estabelecida pelas professoras e é acordada a calendarização da experiência de ensino.

A primeira autora deste artigo construiu um esboço inicial da trajetória hipotética de aprendizagem a partir da teoria (ver secção seguinte), que foi ajustado de acordo com os contributos das duas professoras, essencialmente nas reuniões referidas anteriormente, e da análise preliminar dos dados relativos ao primeiro ciclo de investigação.

Os dados recolhidos[1] incluem a transcrição dos registos vídeo das aulas dos dois ciclos de investigação e todas as produções escritas dos alunos.

A análise de dados começou com as descrições detalhadas de cada aula que incluíram as intervenções orais no decorrer das apresentações/discussões aí efetuadas e das produções escritas registadas pelos alunos. Este corpo de dados foi sucessivamente revisto visando identificar os aspetos que integram o modelo teórico (figura 2): (i) as estratégias de resolução usadas pelos alunos – traduzem ou não quantificação, são estratégias aditivas associadas a adição de parcelas iguais e à decomposição de números, são estratégias multiplicativas; (ii) os números usados pelos alunos – inteiros, pares ou ímpares, múltiplos de …, não inteiros representados sob a forma de fração, de decimal, de numeral misto ou de percentagem; (iii) representações usadas pelos alunos – razões representadas sob a forma de fração, linhas numéricas duplas, tabelas de razão; (iv) relações entre os elementos considerados nas alíneas anteriores – prevalência ou não de associações entre a estratégia, o tipo de números e as

[1] O Termo de Consentimento Livre e Esclarecido foi assinado pelos encarregados de educação dos alunos participantes no estudo. A investigação seguiu as orientações da Carta de Ética para a Investigação em Educação e Formação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa (http://www.ie.ulisboa.pt/download/carta-etica-e-regulamento-da-comissao-de-etica), instituição em que foi aprovada a tese de Doutoramento a que este artigo diz respeito (http://hdl.handle.net/10451/42867).

representações usadas, estabilidade das associações (são, ou não, sempre do mesmo tipo, alteram-se, ou não, ao longo da exploração das tarefas).

Este artigo incide nas estratégias de resolução usadas pelos alunos dos 1.º e 2.º ciclos de investigação na exploração da Tarefa 1 (Misturas de chocolates) e da Tarefa 4 (Fazer limonadas). A seleção destas duas tarefas prende-se com a identificação de que os dados a elas relativos abrangem todos os tipos de estratégias identificadas na investigação.

## AS TAREFAS E O MODELO

As perspetivas conceptuais (conceitos e procedimentos) da comparação multiplicativa permitem idealizar uma trajetória de aprendizagem baseada no *design* de uma sequência de tarefas, a apresentar e explorar na sala de aula, em que as propostas de resolução e os argumentos apresentados pelos alunos ilustram diferentes níveis de compreensão na construção do seu conhecimento matemático.

As tarefas escolhidas, num total de cinco, e os respetivos os objetivos de aprendizagem, são apresentadas no esquema do Anexo 1, na ordem cronológica em que foram exploradas, a primeira é "Mistura de chocolates" e a última "Qual devo comprar?!". Sob o ponto de vista curricular, em ambos os ciclos da investigação, o tema Proporcionalidade era ainda desconhecido dos alunos e, como tal, esta trajetória hipotética de aprendizagem é uma sua abordagem inicial.

Estas tarefas têm o seu foco conceptual no nível intermédio referido na figura 2, comparação multiplicativa em dois espaços de medida, com evidência para a exploração de um procedimento/raciocínio escalar. Desta forma, no percurso sobre as estratégias de resolução (correspondente, no modelo teórico, à parte sombreada da figura 2), assinalamos os modos de representação e os aspetos numéricos relevantes nas respostas de alguns dos alunos para ilustrar as ligações (setas horizontais, de duplo sentido) que permitem evidenciar a flexibilidade.

O estudo realizado inclui tarefas que, ao considerarmos tal como Ponte (2005) duas das suas dimensões fundamentais, o grau de desafio matemático e o grau de estrutura, têm características de problemas, uma vez que apresentam um elevado grau de desafio, mas com uma estrutura fechada.

A contextualização fenomenológica destas tarefas surge através de conexões matemáticas com a vida real, alguns dos problemas podem ilustrar situações do dia a dia, e dentro da própria Matemática, na exploração direta de relações numéricas, entre diferentes tipos de números e entre diversas operações.

## FLEXIBILIDADE NA COMPARAÇÃO MULTIPLICATIVA – MARCOS DE RELEVO

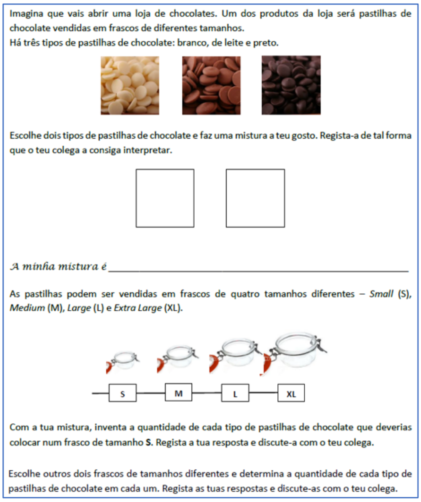
Tendo em conta que o objetivo definido é fundamentar empiricamente e ilustrar um modelo que traduz a flexibilidade na evolução conceptual da comparação multiplicativa (figura 2), apresentamos a análise e discussão dos dados a partir das estratégias de resolução usadas pelos alunos.

### *Estratégias que não traduzem quantificação*

A estratégia associada à não quantificação surge quando os alunos não sentem ser necessário quantificar, isto é, contabilizar os elementos mencionados nos contextos das tarefas, e a sua preocupação baseia-se unicamente na identificação de atributos qualitativos.

**Figura 3**

*Misturas de chocolates.*


Imagina que vais abrir uma loja de chocolates. Um dos produtos da loja será pastilhas de chocolate vendidas em frascos de diferentes tamanhos.
Há três tipos de pastilhas de chocolate: branco, de leite e preto.

Escolhe dois tipos de pastilhas de chocolate e faz uma mistura a teu gosto. Regista-a de tal forma que o teu colega a consiga interpretar.

*A minha mistura é* ________________________________

As pastilhas podem ser vendidas em frascos de quatro tamanhos diferentes – *Small* (S), *Medium* (M), *Large* (L) e *Extra Large* (XL).

S M L XL

Com a tua mistura, inventa a quantidade de cada tipo de pastilhas de chocolate que deverias colocar num frasco de tamanho **S**. Regista a tua resposta e discute-a com o teu colega.

Escolhe outros dois frascos de tamanhos diferentes e determina a quantidade de cada tipo de pastilhas de chocolate em cada um. Regista as tuas respostas e discute-as com o teu colega.

Na Tarefa 1 – *Misturas de chocolates*[2] (figura 3), em que se trabalha num universo discreto (pastilhas de chocolate inquebráveis), não está expresso nenhum dado numérico e a questão inicial também não torna explícita essa

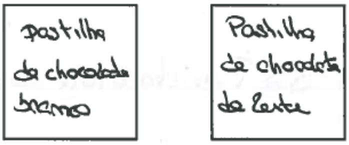
[2] Conceção da tarefa: Jean Marie Kraemer, 2015 (Projeto Pensamento numérico e cálculo flexível: Aspetos críticos).

situação, o que pode ter influenciado a opção de alguns alunos pela não quantificação.

Filipe regista (figura 4) a escolha da sua mistura de pastilhas de chocolate apenas em linguagem natural, mas não quantifica nenhum dos tipos (branco e chocolate de leite).

**Figura 4**

*Registo de Filipe – mistura não quantificada.*




Para Filipe é suficiente esta informação na identificação da sua mistura e só vai perceber que ela está efetivamente definida quando indicar a quantidade de cada um dos tipos de pastilhas de chocolate depois de a professora pormenorizar que, para fazer “uma mistura igual”, precisa de mais informação e que a quantidade vai influenciar a mistura no sentido de ficar “ou mais branco ou mais preto ou mais escuro”.

***Estratégias aditivas que traduzem quantificação e comparação multiplicativa***

Uma estratégia de características aditivas – adicionar parcelas iguais – mas em que as relações proporcionais entre duas quantidades são mantidas, pressupõe implicitamente que a associemos à comparação multiplicativa e a um raciocínio escalar.

A estratégia está ligada à contagem na utilização do mesmo número de unidades compostas e na representação simbólica do raciocínio desenvolvido através de duas adições de parcelas iguais.

Mário e Helena escolhem 6 pastilhas de chocolate branco e 6 de chocolate de leite para a sua mistura. Consideram-na como “Dados” (figura 5) e justificam a sua opção, para a quantidade de pastilhas de chocolate no frasco de tamanho S, no registo que intitulam de “Cálculo”. Adicionam duas vezes a mesma quantidade (12) e representam, por isso, sob a forma de adição de parcelas iguais, a ideia de que a transformação efetuada nas quantidades dos dois tipos de pastilhas tem de ser a mesma.

**Figura 5**

*Resolução de Mário – frasco de tamanho S.*

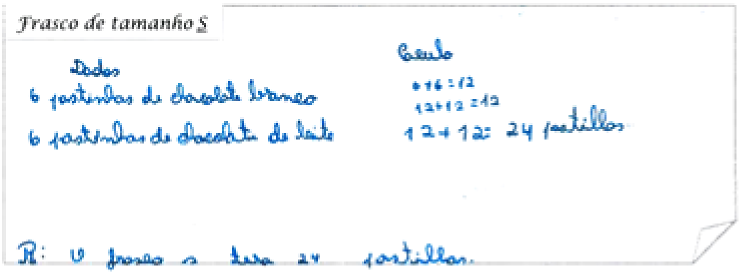
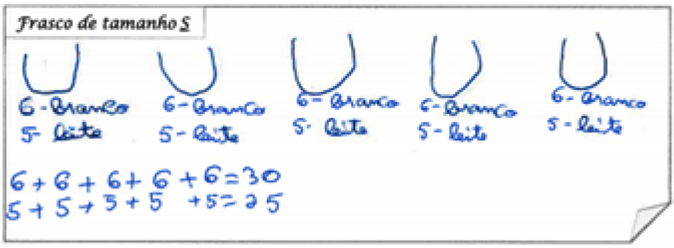



**Figura 6**

*Resolução de Bruno – frasco de tamanho S.*




***Estratégias de comparação multiplicativa e razão escalar***

Um outro par de alunos, Bruno e Vítor, apresentam uma relação aditiva entre as quantidades de pastilhas de chocolate da mistura que escolheram (30 de chocolate branco e 25 de chocolate de leite) e as do frasco de tamanho S. Partem de valores que são ambos múltiplos de 5 e distribuem equitativamente as duas quantidades por cinco frascos (de tamanho S). Na figura 6, podemos observar como registam a sua ideia, primeiramente, através de representações icónicas legendadas (desenhos muito simples, sem quaisquer pormenores e pouco realistas) e, de seguida, numa representação simbólica (tradução numérica de duas adições de cinco parcelas iguais, cada uma).

Uma estratégia com características multiplicativas emerge quando é aplicado um fator representado por um número racional (inteiro ou não inteiro), com o objetivo de aumentar ou diminuir duas quantidades, de espaços de medida distintos, e manter relações proporcionais entre ambas. O raciocínio/procedimento desenvolvido é do tipo escalar, ou seja, origina-se uma mesma concretização/alteração dentro de cada um dos espaços de medida implicados.

O modo de representação que prevalece é o simbólico através de razões representadas sob a forma de fração, da utilização de tabelas de razões ou de linhas numéricas duplas, numa relação escalar, ou seja, como foi referido, dentro de cada um dos espaços de medida.

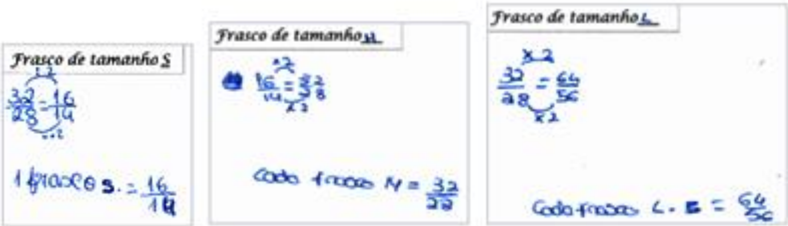
Os números inteiros que surgem têm, maioritariamente, um ou dois dígitos e são múltiplos de dois ou de cinco; os números não inteiros são representados sob a forma de fração, de decimal ou de numeral misto. As concretizações/alterações, induzidas pelas próprias tarefas, no sentido de explorar a igualdade ou não de razões, baseiam-se, muitas vezes, na utilização do 2 como fator e como divisor, na tradução do conceito elementar "dobro de" e no cálculo de "metade de" através da operação divisão, respetivamente.

As operações multiplicação e divisão são encaradas como inversas uma da outra quando se identifica um fator desconhecido com o quociente da divisão entre o produto e o fator já conhecido. A relação inversa entre estas duas operações surge também quando, numa igualdade de razões, os termos respetivos de um mesmo espaço de medida surgem multiplicados ou divididos, por exemplo, por dois. Este facto é uma alusão que explicita que: se dentro de um mesmo espaço atuamos num sentido, utilizamos uma das operações; se agimos em sentido contrário a operação que lhe corresponde é a sua inversa. No entanto, se mantivermos a operação nos dois sentidos de atuação, então os números que surgem são inversos um do outro, isto é, dividir por um dado número (diferente de zero) equivale a multiplicar pelo seu inverso.

O trabalho realizado pelo par Rita e Beatriz na Tarefa 1 ilustra o uso desta estratégia, da representação e relações numéricas referidas. As alunas escolhem a sua mistura inicial (32 pastilhas de chocolate branco e 28 de chocolate de leite) e para indicar as quantidades de pastilhas dos frascos de tamanhos S, M e L utilizam o inteiro 2, primeiro para calcular metade e de seguida para duplicar, cada uma das quantidades (figura 7). Em cada questão optam permanentemente por trabalhar com a última razão encontrada e representam-nas sempre sob a forma de fração. De uma para outra razão, especificam o procedimento efetuado em cada um dos seus termos através de arcos não orientados e legendados. Assim, dividem ambas as quantidades da mistura inicial por 2 e obtêm o conteúdo do frasco de tamanho S, depois multiplicam cada uma das quantidades por 2 e obtêm as do frasco de tamanho M e, por fim, com o mesmo procedimento, obtêm as quantidades de pastilhas do frasco de tamanho L.

**Figura 7**

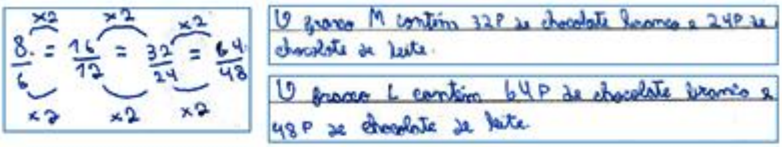
*Registos de Rita e Beatriz – frascos de diversos tamanhos.*




Manuel e Filipe, com uma mistura inicial composta por 8 pastilhas de chocolate branco e 6 de chocolate de leite, utilizam uma estratégia, representações e relações idênticas às usadas por Rita e Beatriz. No entanto, o fator de comparação 2 traduz uma relação apenas num sentido (da esquerda para a direita) para determinar a quantidade de pastilhas de um frasco relativamente a outro. Num registo da sua resposta (figura 8) surge uma sequência de igualdades entre as várias razões, todas representadas sob a forma de fração.

**Figura 8**

*Registos de Manuel e Filipe – frascos de tamanhos M e L.*



Na Tarefa 4 – *Fazer limonadas*[3] (figura 9), explora-se um universo contínuo (líquido) em que o "fazer limonadas" impõe uma ação de misturar dois líquidos de tipos diferentes (água e concentrado de sumo de limão) e utilizar unidades de medida também diferentes (litro e chávena, respetivamente), para se obter um líquido com características distintas dos iniciais.

[3] Adaptado de Using Proportional Reasoning in Mathematics Assessment Project (2015). University of Nottingham & UC Berkeley.

**Figura 9**

*Fazer limonadas (problema 1).*

Quando o João e os amigos se juntam para brincar, a mãe dele faz limonada para todos, misturando concentrado de sumo de limão e água fresca.

Na sexta-feira, a mãe do João fez limonada e misturou 3 chávenas de concentrado de sumo de limão e 4 litros de água.

No sábado, na festa de anos do João, a mãe fez limonada e misturou 4 chávenas de concentrado de sumo de limão e 5 litros de água.

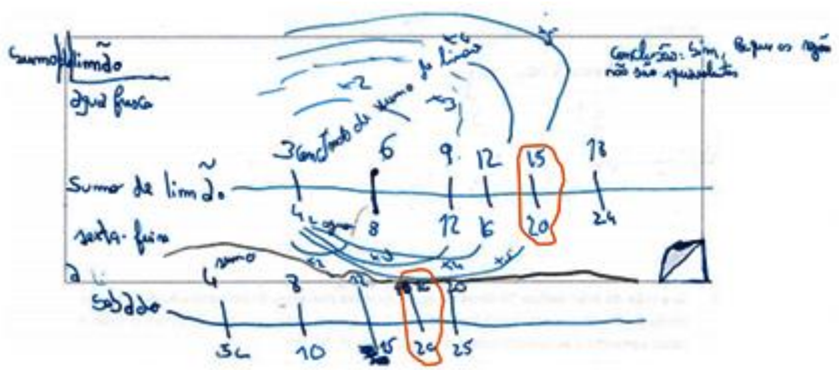
1. Alguns amigos do João disseram que a limonada de sexta-feira tinha um sabor a limão diferente da de sábado. Concordas com eles? Explica como pensaste e apresenta todos os cálculos que efetuaste.

As resoluções desta tarefa de José e de Renato ilustram igualmente a estratégia de comparação multiplicativa, escolhendo fatores que lhes permitem relacionar multiplicativamente as quantidades dentro de um mesmo espaço de medida e usando a linha numérica dupla.

José regista duas linhas numéricas duplas na resolução do problema 1, tal como se observa na figura 10. Os valores surgem, em cada linha, através da aplicação dos respetivos múltiplos naturais dos números que inicialmente identificam as quantidades utilizadas nas limonadas de sexta-feira, 3 e 4, e de sábado, 4 e 5. A comparação entre os elementos respetivos das duas linhas permite-lhe compreender que as limonadas têm sabores diferentes quando, num dado momento, surge o mesmo número de chávenas de concentrado de sumo de limão (12) e um número diferente de litros de água (16, na sexta-feira, e 15, no sábado).

**Figura 10**

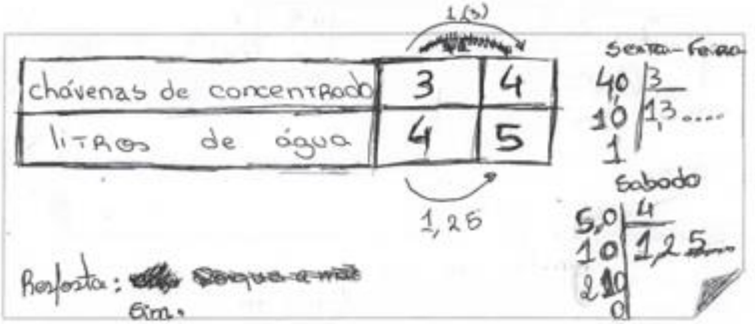
*Linhas numéricas duplas de José.*



Renato regista (figura 11) os dados relativos às limonadas de sexta-feira e de sábado numa tabela de razões e mostra que o fator que lhe permite comparar multiplicativamente a quantidade de cada um dos ingredientes da limonada de sábado com os respetivos ingredientes da de sexta-feira não é o mesmo. Utiliza o algoritmo da divisão para determinar esse fator e regista-o como legenda das setas que ilustram a relação de uma coluna com a outra, ou seja, mostra que a relação escalar das quantidades dos dois ingredientes das limonadas de sexta-feira e de sábado não se mantém.

**Figura 11**

*Tabela e fatores de Renato.*

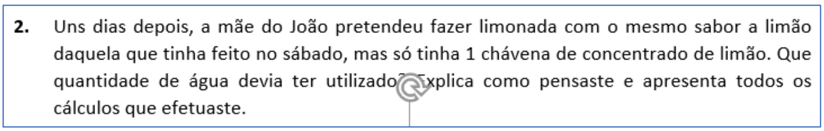



No entanto, enquanto José trabalha com sequências de múltiplos (fatores inteiros) e relaciona razão e fração através dos conceitos de razões iguais e frações equivalentes, Renato opta por determinar os fatores que lhe permitem, dentro de um determinado espaço de medida, comparar as quantidades indicadas e fá-lo através de números não inteiros. Os fatores procurados são obtidos por Renato através do quociente da divisão, numa aplicação direta da relação inversa entre as operações multiplicação e divisão.

Alexandre e Hugo, na resolução do problema 2 desta tarefa (figura 12) também usam a linha numérica dupla, mas não mantêm a ordenação dos números na linha numérica (por ordem crescente, da esquerda para a direita), mas sim a ordem indicada no enunciado, como se a considerassem uma tabela.

**Figura 12**

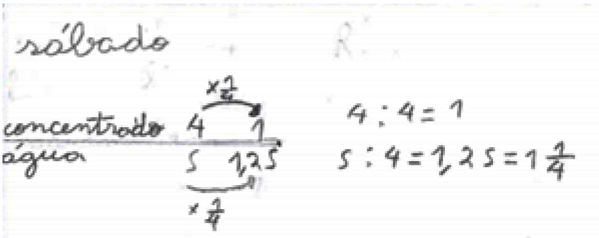
*Fazer limonadas (problema 2).*


**2.** Uns dias depois, a mãe do João pretendeu fazer limonada com o mesmo sabor a limão daquela que tinha feito no sábado, mas só tinha 1 chávena de concentrado de limão. Que quantidade de água devia ter utilizado? Explica como pensaste e apresenta todos os cálculos que efetuaste.

Alexandre complementa a representação anterior (figura 13) com a indicação simbólica das divisões efetuadas e cujo quociente não inteiro é indicado sob a forma de decimal e de numeral misto.

**Figura 13**

*Resolução de Alexandre.*




Alexandre explica o seu raciocínio à professora (figura 14), que aproveita para todos os alunos recordarem a relação entre as operações multiplicação e divisão.

**Figura 14**

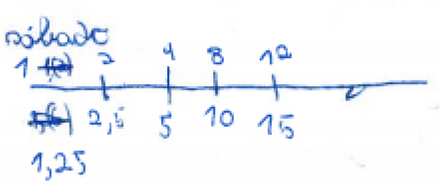
*Relação entre dividir por 4 e multiplicar por* $\frac{1}{4}$.

Professora – No sábado havia...
Alexandre – Quatro de concentrado e cinco litros de água [aponta na linha numérica dupla] e eles querem só com um de concentrado [aponta o 1 na linha numérica dupla]. Portanto, temos que ver por quanto é que temos que multiplicar ou dividir o quatro para dar um.
Professora – Pronto. Quatro para um, o que é que eu fiz? Dividi por...
Aluno – Quatro.
Professora – Por quatro. Todos pensaram nisto. Vou dividir por quatro e vai-me dar um. Então, fizeram praticamente isto e puseram... então vou dividir o cinco por quatro também. Mas o Alexandre... podes sentar[-te] Alexandre. Obrigada. O Alexandre fez aqui uma coisa que nenhum fez.
Alunos – Vezes um quarto.
Professora – Que nós já vimos que dividir por quatro é o mesmo do quê?
Daniel – Vezes... fazer... vezes um quarto.
Professora – Multiplicar por um quarto. Porquê?
Aluno – Pelo inverso.
Professora – Pelo inverso.
Daniel – Pelo inverso.

Manuel apresenta (figura 15) uma linha numérica dupla com vários pontos em que os números surgem colocados de forma crescente da esquerda para a direita. Não compara diretamente 4 e 1, nem 5 e 1,25, mas indica um percurso de cálculo baseado em sucessivas divisões por 2. Determina, por isso, os valores intermédios respetivos, 2 e 2,5 e, de modo similar, indica mais dois pontos à direta dos valores iniciais (4 e 5) e que surgem pelas respetivas multiplicações por 2 e 3. Não há registos escritos de cálculos, o que nos leva a pressupor que foram efetuados mentalmente, num domínio de conhecimentos básicos de cálculo com números inteiros e não inteiros.

**Figura 15**

*Linha numérica dupla de Manuel.*




Também Rodrigo, sem indicar qualquer explicitação de cálculos, utiliza (figura 16) uma linha numérica dupla, na qual marca três pontos a que correspondem valores corretos de limonadas com o mesmo sabor da de sábado. Considera quatro arcos de dupla orientação legendados em duplicado com os procedimentos de multiplicar por 2, "× 2", e de dividir por 2, ": 2", numa evidência de conhecimento da relação inversa entre as operações multiplicação e divisão.

**Figura 16**

*Resolução de Rodrigo – linha numérica dupla.*

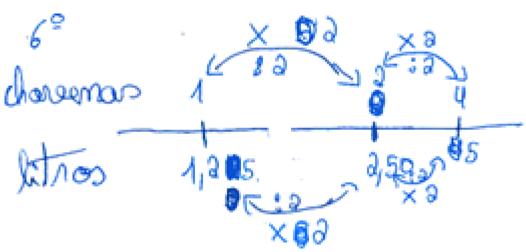


**Figura 17**

*Fazer limonadas (problema 3).*

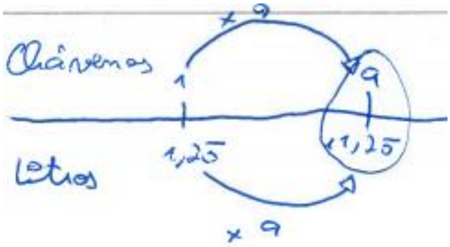
**3.** Quando foram à excursão, a mãe do João voltou a fazer limonada com o mesmo sabor da que tinha feito no sábado e, nesse momento, misturou 9 chávenas de concentrado de sumo de limão com água. És capaz de dizer quantos litros de água utilizou? Explica como pensaste e apresenta todos os cálculos que efetuaste.

Neste momento, determinada a razão unitária no problema anterior, pressupõe-se que a resolução do problema 3 (figura 17) possibilite tornar clara uma relação com as respostas anteriores, no intuito de facilitar os procedimentos de cálculo, não algorítmicos, e de uma forma rápida e eficiente chegar à solução.

Bruno representa (figura 18) uma linha numérica dupla com dois pontos, dois arcos orientados e legendados com o procedimento a efetuar ("× 9") e, sem escrever a resposta ao problema, circunda o ponto que relaciona 9 chávenas de concentrado de limão com 11,25 litros de água e que lhe permite obter uma limonada nas condições indicadas.

**Figura 18**

*Estratégia de Bruno, baseada na razão unitária.*




Não se sabe como efetuou os cálculos, mas Bruno adapta a sua estratégia ao não trabalhar com os dados iniciais da tarefa, mas sim com os valores obtidos no problema anterior e explica (figura 19) de onde partiu e porquê, quando é interpelado pela professora.

**Figura 19**

*Justificação de Bruno para a escolha dos números.*

Professora – Partiu de onde?

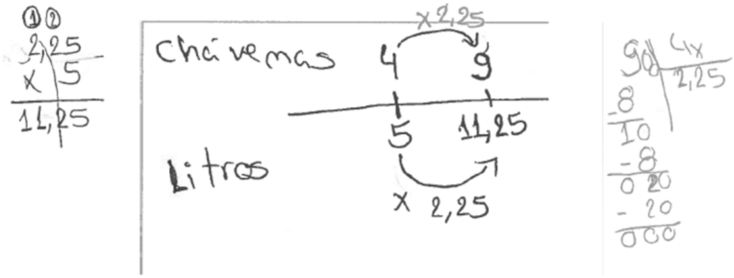
Bruno [com o indicador direito, aponta na linha numérica dupla o 1 e depois o 1,25] – De... do resultado que nos tinha dado no exercício anterior.

Professora – Muito bem! Porquê? Porque é que foste pegar nesse?
Bruno – Então, porque eu achei que era o mais fácil. Pensei logo mentalmente um vezes nove era nove. [Com o indicador direito contorna o arco do 1 até ao 9.] E a nossa... aqui no problema pedia… hamm... nove chávenas... que ela tinha que juntar nove chávenas.

Nem todos os alunos apresentam um procedimento idêntico ao de Bruno, alguns escolhem trabalhar com os valores iniciais da tarefa, com uma razão representada sob a forma de fração, $\frac{4}{5}$. A resolução de Andreia (figura 20) indica-nos que determina primeiro o fator escalar através do algoritmo da divisão aplicado a 9 : 4 e, de seguida, multiplica o quociente não inteiro obtido por 5, novamente por aplicação do algoritmo respetivo. Nesta operação, regista, como auxiliar de cálculo, os valores intermédios dos reagrupamentos.

**Figura 20**

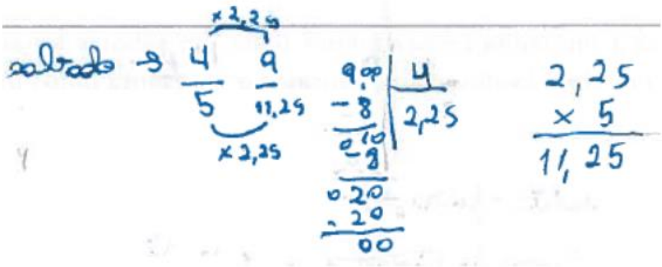
*Estratégia de Andreia, baseada numa razão inicial do problema.*




Mário, tal como Andreia, inicia a sua resolução com a razão $\frac{4}{5}$, mas utiliza unicamente a representação sob a forma de fração. Calcula primeiro o quociente não inteiro de 9 a dividir por 4, através do algoritmo da divisão e depois 5 × 2,25, por aplicação do algoritmo da multiplicação. Regista (figura 21), lado a lado, as duas razões e coloca arcos legendados com o procedimento a efetuar (× 2,25) que ligam, respetivamente, os primeiros e os segundos termos de uma para outra razão.

**Figura 21**

*Resolução de Mário, baseada numa razão inicial do problema.*




No quarto problema desta tarefa (figura 22) pretende-se determinar um dos termos de uma razão, quando simultaneamente é conhecido o outro e indicada a relação multiplicativa a manter, isto é, o sabor da limonada confecionada num determinado dia.

**Figura 22**

*Fazer limonadas (problema 4).*

> **4.** Se a mãe do João utilizar 18 litros de água, quantas chávenas de concentrado de sumo de limão deve misturar para que a limonada tenha o mesmo sabor que a de sexta-feira? Explica como pensaste e apresenta todos os cálculos que efetuaste.

Bruno opta por obter duas razões iguais a $\frac{3}{4}$ e representa a sua estratégia através de duas linhas numéricas duplas com dois pontos (figura 23). Na primeira indica dois arcos orientados da direita para a esquerda e legenda-os com o procedimento de dividir por 2; na segunda coloca também dois arcos orientados, mas da esquerda para a direita, e legenda-os com o procedimento de multiplicar por 9.

**Figura 23**

*Resolução de Bruno – linhas numéricas duplas.*

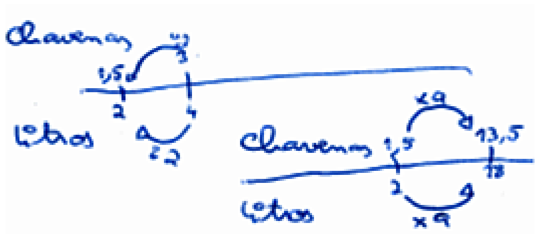


**Figura 24**

*Como Bruno justifica os seus procedimentos de cálculo.*

Bruno – Então, eu fui pegar neste número aqui [com o indicador direito aponta 4 na linha numérica dupla onde surgem os pontos correspondentes às razões $\frac{3}{4}$ e $\frac{1,5}{2}$] e fui dividir por dois porque eu pensei logo de cabeça que dois vezes nove era dezoito [aponta rapidamente para a linha numérica de baixo, onde surgem os pontos correspondentes às razões $\frac{1,5}{2}$ e $\frac{13,5}{18}$] e então fui achar uma equivalência para ser mais fácil para os meus cálculos. E depois, deu-me... eu fiz o três a dividir por dois deu-me um vírgula cinco e o quatro a dividir por dois deu-me dois. Depois (…) multiplicava por nove.

Não explicita como efetuou os cálculos, mas justifica oralmente a sua estratégia e os seus procedimentos (figura 24). Os conhecimentos que já adquiriu de múltiplos e divisores de um número natural, permitem-lhe afirmar que enquanto 4 não é um fator de 18, 2 é um seu fator e, por isso, o escolhe para construir a sequência de procedimentos que, na sua opinião, originam cálculos intermédios mais acessíveis.

Os procedimentos de Bruno, Andreia e Mário são similares, mas Bruno mostra uma gestão apropriada dos cálculos a efetuar quando, por um lado, utiliza a informação que tem ao seu dispor e que obteve num momento anterior e, por outro lado, aplica propriedades dos números para obter os que lhe sejam mais acessíveis ao cálculo mental.

### *Estratégias de comparação multiplicativa e razão funcional*

Uma outra estratégia de comparação multiplicativa torna-se dominante quando perante um conjunto de dados se determina o fator, inteiro ou não, que permite relacionar uma quantidade de um espaço de medida com uma quantidade do outro espaço de medida, através de uma única constante. Esta situação, sendo baseada na relação entre dois espaços de medida, evidencia um procedimento/raciocínio funcional e possibilita identificar o coeficiente de proporcionalidade. A análise dos dados registados numa coleção de razões, representadas sob a forma de fração, permite identificar uma regularidade numérica que relaciona multiplicativamente, em cada momento, uma quantidade com outra, de um para outro espaço de medida (razão funcional).

Perante algumas das misturas de pastilhas de chocolate sugeridas na Tarefa 1 e registadas no quadro, os alunos identificam como sendo misturas iguais as que são representadas pelas razões $\frac{10}{5}$ (10 pastilhas de chocolate branco e 5 de chocolate de leite), $\frac{100}{50}$ (100 pastilhas de chocolate branco e 50 de chocolate de leite) e $\frac{20}{10}$ (20 pastilhas de chocolate branco e 10 de chocolate de leite). Um deles justifica estas opções porque como afirma "a divisão vai dar sempre 2" (10 : 5 = 2; 100 : 50 = 2; 20 : 10 = 2).

Deste modo, comparar multiplicativamente a quantidade de pastilhas de chocolate branco em relação à quantidade de pastilhas de chocolate de leite é considerar que o fator que permite representar a quantidade de pastilhas de chocolate branco em função da quantidade de pastilhas de chocolate de leite é constante e, neste caso, igual a dois: $10 = 2 \times 5$; $100 = 2 \times 50$; $20 = 2 \times 10$.

Num momento posterior, a exploração desta situação permite utilizar propriedades dos números não inteiros e propriedades da operação multiplicação em que, por exemplo, na primeira das razões, $\frac{10}{5}$, podemos, como referido, comparar a quantidade de pastilhas de chocolate branco, 10, relativamente à quantidade de pastilhas de chocolate de leite, 5, e registar que $10 = 2 \times 5$. No entanto, uma vez que $\frac{10}{5} = 2$, também $10 = \frac{10}{5} \times 5$, e $\frac{10}{5}$ é, por isso, uma razão funcional.

## CONCLUSÕES E DISCUSSÃO

A análise de dados permite ilustrar e ajustar o modelo que caracteriza a flexibilidade ao nível da evolução conceptual da comparação multiplicativa fundamentando uma sua especificação, traduzida na figura 25.

**Figura 25**

*Modelo ajustado de flexibilidade na evolução da comparação multiplicativa.*


Relativamente à evolução conceptual da comparação multiplicativa identificamos um nível, usado inicialmente por alguns alunos, em que embora trabalhando em dois espaços de medida, a sua estratégia de resolução é baseada na não quantificação, limitando-se a uma descrição qualitativa dos elementos envolvidos (caso de Filipe, na Tarefa 1).

Mantendo-se sempre na comparação multiplicativa em dois espaços de medida, a estratégia de resolução destes alunos evolui para situações quantificadas em que realçamos: por um lado, estratégias aditivas, nas quais a operação que surge é a adição de parcelas iguais que é traduzida simbolicamente (casos de Mário e Bruno, na Tarefa 1) e em que os números envolvidos são inteiros, múltiplos de 2 e de 5, tidos como acessíveis sob o ponto de vista de cálculo; por outro lado, estratégias multiplicativas, em que a razão é representada sob a forma de fração, de tabelas de razões ou de linhas numéricas duplas e cuja interpretação conduz ao procedimento adotado.

Quando a razão é representada sob a forma de fração, os números envolvidos são inteiros que surgem através da determinação de múltiplos de 2 (casos de Manuel e Filipe, na Tarefa 1). Na razão representada em linhas numéricas duplas ou em tabelas, os números são inteiros ou não inteiros, determinados através da procura de fatores comuns em cada um dos espaços de medida, com a utilização da operação divisão (casos de Alexandre e de Andreia, na Tarefa 1, e de Renato, na Tarefa 4). Um e outro caso permitem tornar notória a relação inversa entre as operações multiplicação e divisão. Rodrigo regista (figura 16) essa correspondência quando coloca arcos orientados, nos dois sentidos, entre os valores correspondentes de pontos da linha numérica dupla. Uma outra conexão torna-se também visível quando Alexandre, ao relacionar quantidades dentro do mesmo espaço de medida, regista um fator não inteiro, $\frac{1}{4}$, determinado depois de ter dividido por 4. Alexandre compreende que o procedimento de dividir por 4 é equivalente ao de multiplicar pelo seu inverso (figura 13).

Embora a aplicação algorítmica das operações (multiplicação e divisão) tenha grande adesão nos procedimentos de cálculo efetuados por estes alunos, Bruno manifesta conhecimentos de relações numéricas básicas e o *olhar de uma certa forma para os números* (figuras 18, 19, 23 e 24) permite-lhe ir construindo e adaptando as suas estratégias de cálculo, por exemplo, ao aproveitar resultados de questões anteriores.

Os alunos mostram-se confortáveis nas diversas representações de um número não inteiro (sob a forma de fração, de decimal ou de numeral misto) porque além de as interpretarem, alternam-nas e escolhem aquela que mais se adequa aos seus cálculos.

### *Implicações a nível curricular*

O modelo que propomos (figura 25), ao especificar e concretizar o modelo teórico inicialmente apresentado (figura 2), contribui para aprofundar a discussão acerca do ensino e aprendizagem da comparação multiplicativa. Destaca aspetos que o NCTM (2014) salienta serem fundamentais para o desenvolvimento da proficiência matemática – compreensão conceptual, competência estratégica e raciocínio adaptativo – que aqui se traduz na articulação entre estratégias, relações numéricas/propriedades das operações e representações, permitindo especificar características de cada um deles.

Realça, por isso, a importância de o professor ter em conta na organização do ensino marcos que, relativamente à compreensão conceptual, se identificam como: (i) necessidade de quantificar a comparação; (ii) usar a operação multiplicação; (iii) usar o fator escalar e (iv) usar o fator funcional. Quanto à competência estratégica, o professor deve incentivar a exploração e utilização de relações numéricas (múltiplos e divisores, números inversos,…), de propriedades das operações (comutativa da multiplicação e distributiva da multiplicação em relação à adição) e de representações que podem estar associadas aos conceitos em causa (tabela de razões, linha numérica dupla e razão sob a forma de fração). Finalmente, ao nível do raciocínio adaptativo, o professor deve estimular a diversidade de modos de pensar que suportam a resolução de problemas que envolvem a comparação multiplicativa.

Este modelo evidencia ainda a necessidade de estudar minuciosamente o trabalho de relações multiplicativas com números racionais, de modo a incluir o uso de operadores inteiros diversos e não apenas do 2 e do 5. Evidencia, igualmente, a tendência dos alunos para permanecerem nas relações que se estabelecem dentro de cada espaço de medida e a dificuldade em progredirem naturalmente para a relação funcional (entre espaços de medida).

Subjacente a este modelo destaca-se a recomendação curricular de Thompson e Saldanha (2003) de focar o entendimento de que um número racional representado sob a forma de fração, $\frac{a}{b}$, corresponde ao número pelo qual se deve multiplicar $b$ para obter $a$ ($a = \frac{a}{b} \times b$), conhecimento fundamental para a compreensão conceptual de operador funcional.

Finalmente, o estudo realizado sublinha o que Lamon (2007) e van Galen et al. (2008) referem relativamente à proporcionalidade, considerada como conceito charneira entre diferentes níveis de escolaridade, e situa igualmente a compreensão dos conceitos de razão e de proporção num nível mais complexo de entendimento, que requer uma exploração sistemática com contextos diversos e articulada com a multiplicação de números racionais (Freudenthal, 2002).

## DECLARAÇÃO DE CONTRIBUIÇÕES DOS AUTORES

G. C. e J. B. conceberam a conceptualização do artigo, decidindo sobre a incidência teórica e a metodologia. G. C. foi responsável pela recolha dos dados e pela organização da experiência de ensino. Ambas as autoras discutiram ainda as evidências empíricas a incluir na análise dos dados, as conclusões a destacar e a discussão final.

## DISPONIBILIDADE DE DADOS

Os dados que suportam os resultados deste estudo estão disponíveis abertamente em Repositório da Universidade de Lisboa através do http://hdl.handle.net/10451/42867.

## REFERÊNCIAS

Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A matemática na educação Básica*. Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.

Bruner, J. (1966). *Toward a theory of instruction*. Havard University Press.

Cramer, K., Post, T., & Currier, S. (1993). Learning and teaching ratio and proportion: research implications. In D. T. Owens (Ed.), *Research ideas for the classroom – Middle grades mathematics* (pp. 159-178). Macmillan.

Freudenthal, H. (2002). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Kluwer.

Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2013). Design research from the learning design perspective. In T. Plomp, & N. Nieveen (Eds.), *Educational design research* (pp. 72-113). Netherlands Institute for Curriculum Development (SLO).

Lamon, S. (2007). Rational numbers and proportional reasoning – Toward a theoretical framework for research. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629-667). National Council of Teachers of Mathematics.

Langrall, C., & Swafford, J. (2000). Three balloons for two dollars – Developing proportional reasoning. *Mathematics Teaching in the Middle School, 6,* 254-261.

Lobato, J., Ellis, A., Charles, R., & Zbiek, R. (2010). *Developing essential understanding of ratios, proportions, and proportional reasoning for teaching mathematics in grades 6-8.* National Council of Teachers of Mathematics

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. Versão Portuguesa. Associação de Professores de Matemática.

National Research Council. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics.* J. Kilpatrick, J. Swafford, & B. Findell (Eds.). Mathematics Learning Study Committee, Center for Education, Division of Behavioral and Social Sciences and Education. National Academy Press.

Pittalis, M., Christou, C., & Papageorgiou, E. (2003). Students' ability in solving proportional problems. In *Proceedings of the 3rd European Research Conference in Mathematics Education*. Bellaria: Italy, 3, http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG3/TG3_list .

Ponte, J. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Associação de Professores de Matemática.

Rathgeb-Schnierer, E., & Green, M. (2013). Flexibility in mental calculation in elementary students from different math classes. In B. Ubuz, Ç. Haser, & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of* the *European Society for Research in Mathematics Education, CERME 8 – Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 353-362). Middle East Technical University.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 1-36.

Simon, M., & Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: an elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(2), 91-104.

Thompson, P. (1994). The development of the concept of speed and its relationship to concepts of rate. In G. Harel, & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 181-234). Suny.

Thompson, P., & Saldanha, L. (2003). Fractions and multiplicative reasoning. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to the principles and standards for school mathematics* (pp. 95-114). National Council of Teachers of Mathematics.

Threlfall, J. (2009). Strategies and flexibility in mental calculation. *ZDM Mathematics Education*, *41*(5), 541-555.

van Galen, F., Feijs, E., Figueiredo, N., Gravemeijer, K., Herpen, E., & Keijer, R. (2008). *Fractions, Percentages, Decimals and Proportions*. Sense.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R. Lesh, & M. Landau (Eds.), *Acquisiton of mathematics concepts and processes* (pp. 127-174). Academic Press.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. In J. Hiebert, & M. Behr (Eds.) *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 141-161). Lawrence Erlbaum & NCTM.

## ANEXO 1

*Sequência de tarefas e respetivos objetivos de aprendizagem*