




Génesis instrumental de una trayectoria de aprendizaje: el caso de la mirada profesional de Pedro

Gloria Sánchez-Matamoros ^a
 Mar Moreno Moreno ^b
 Julia Valls González ^b

^a Universidad de Sevilla, Facultad de Ciencias de la Educación, Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Sevilla, Spain

^b Universidad de Alicante, Facultad de Educación, Departamento de Innovación y Formación Didáctica, San Vicente del Raspeig, Alicante, Spain

Recibido para publicación 30 nov. 2020. Aceptado tras revisión 29 jul. 2021.

Editora designada: M. Mar Liñán García

RESUMEN

Contexto: Muchos programas de formación docente pretenden que los futuros profesores aprendan a mirar situaciones de enseñanza-aprendizaje de matemáticas apoyándose en trayectorias de aprendizaje de conceptos específicos. Sin embargo, no se ha profundizado en cómo usan el conocimiento de éstas para mirar el pensamiento matemático de los niños. **Objetivo:** identificar características del proceso de génesis instrumental en un estudiante para maestro de Educación Infantil cuando mira una situación de aula usando una trayectoria de aprendizaje de longitud y su medida como artefacto. **Diseño:** hemos adaptado el enfoque instrumental de *Rabardel*. **Escenario y Participante:** un estudiante para maestro resolviendo una tarea profesional (estudio de caso). **Recogida y análisis de datos:** se analiza la actividad del estudiante resolviendo la tarea considerando los procesos de la génesis instrumental. **Resultados:** proporcionan características de las destrezas de la mirada profesional: (a) dotar de significado matemático a los elementos permite construir esquemas de utilización para *identificar*; (b) considerar la inclusividad de los niveles de comprensión y la continuidad de la progresión en el aprendizaje permite construir esquemas de utilización para *interpretar*, y (c) considerar la secuencialidad de los niveles de comprensión permite construir esquemas de utilización para *tomar decisiones*. **Conclusiones:** la génesis instrumental permite identificar qué esquemas construye el estudiante para maestro y cómo adquiere su mirada profesional, y proporciona información al formador de profesores para tomar decisiones instruccionales. Por ejemplo, para el estudiante de este caso, el formador proporcionará tareas para dotar de significado al elemento transitividad y variedad de contextos relacionados con la conservación.

Palabras clave: génesis instrumental; trayectoria de aprendizaje; mirada profesional; longitud y su medida; educación infantil.

Autor correspondiente: Gloria Sánchez-Matamoros García. Email: gsanchezmatamoros@us.es

Instrumental Genesis of a Learning Trajectory: The Case of Pedro's Professional Noticing

ABSTRACT

Background: Many teacher education programmes aim for prospective teachers to learn to notice mathematics teaching-learning situations based on learning trajectories of specific concepts. However, there has not been a deeper study on how they use that knowledge to notice children's mathematical thinking. **Objective:** To identify characteristics of the instrumental genesis process in an early childhood prospective teacher as he notices a classroom situation using a learning trajectory of length and its measurement as an artefact. **Design:** We have adapted Rabardel's instrumental approach. **Settings and Participants:** An early childhood prospective teacher solving a professional task (case study). **Data collection and analysis:** We analyse the student's activity while solving the task, considering the processes of instrumental genesis. **Results:** The outcomes reveal characteristics of professional noticing skills: (a) providing mathematical meaning to the elements allows constructing utilisation schemes to *identify*; (b) considering the inclusiveness of levels of understanding and the continuity of progression in learning allows constructing utilisation schemes to *interpret*, and (c) considering the sequentiality of levels of understanding allows constructing utilisation schemes to *make decisions*. **Conclusions:** Instrumental genesis allows identifying which schemes a kindergarten prospective teacher constructs and how he/she acquires his/her professional noticing, and provides information for the teacher educator to make instructional decisions. For example, in our case, the teacher educator provides the prospective teacher of this case study with tasks to give meaning to the transitivity element and variety of contexts related to conservation.

Keywords: Instrumental genesis; Learning trajectory; Professional Noticing; Length and its measurement; Early childhood education.

Gênese instrumental de uma trajetória de aprendizagem: o caso do olhar profissional de Pedro

RESUMO

Contexto: Muitos programas de formação de professores têm como objetivo que os futuros professores aprendam a olhar para as situações de ensino-aprendizagem da matemática a partir de trajetórias de aprendizagem de conceitos específicos. No entanto, não se aprofundaram em conhecer como eles usam seu conhecimento para olhar para o pensamento matemático das crianças. **Objetivo:** Identificar características do processo de gênese instrumental em um futuro professor de educação infantil ao olhar para uma situação de sala de aula a partir de uma trajetória de aprendizagem de

comprimento e sua medição como artefato. **Design:** Adaptamos a abordagem instrumental de Rabardel. **Cenário e participante:** Um futuro professor resolvendo uma tarefa profissional (estudo de caso). **Coleta e análise de dados:** Analisa-se a atividade do aluno ao resolver a tarefa, considerando os processos de gênese instrumental. **Resultados:** Fornecem características das habilidades do olhar profissional: (a) dotar os elementos de significado matemático permite construir esquemas de utilização para identificar; (b) considerar a inclusividade dos níveis de compreensão e a continuidade da progressão na aprendizagem permite a construção de esquemas de utilização para interpretar, e (c) considerar a sequencialidade dos níveis de compreensão permite a construção de esquemas de utilização para tomar decisões. **Conclusões:** A gênese instrumental permite identificar quais esquemas o futuro professor constrói e como adquire seu olhar profissional, além de fornecer informações ao formador para a tomada de decisões instrucionais. Por exemplo, para o futuro professor, neste caso, o formador fornecerá tarefas para dar sentido ao elemento de transitividade e variedade de contextos relacionados à conservação.

Palavras-chave: gênese instrumental; trajetória de aprendizagem; olhar profissional; comprimento e sua medição; educação infantil.

INTRODUCCIÓN

Muchos programas actuales de formación docente diseñan módulos de enseñanza con el objetivo de ayudar a los estudiantes para maestros a aprender a mirar situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas (Bartell et al., 2013; Llinares, 2012; Stokero, 2014; Wilson et al., 2013). Existen diferentes conceptualizaciones sobre la mirada profesional (Mason, 2002; Sherin & van Es, 2009), si bien todas ellas se centran en interpretar situaciones de aula para tomar decisiones de enseñanza-aprendizaje.

Las investigaciones sobre el desarrollo profesional se han centrado sobre todo en el nivel de Educación Primaria (Krupa et al., 2017), siendo más escasas las que centran su atención en la Educación Infantil (Parks & Wager, 2015). Recientes investigaciones en esta etapa consideran que los maestros de Educación Infantil necesitan habilidades para reconocer situaciones cotidianas y convertirlas en situaciones de enseñanza-aprendizaje (Gasteiger & Benz, 2018; Gasteiger et al., 2020). Este tipo de situaciones de exploración y reconocimiento del concepto deben permitir que los niños transformen los conocimientos matemáticos informales en conocimientos matemáticos formales (Empson & Junk 2004); para lo cual, es necesario que los maestros de Educación Infantil dispongan de un conocimiento específico para interpretar situaciones matemáticas y favorecer la progresión en el aprendizaje de los niños (Lee, 2017).

Actualmente las investigaciones que se centran en caracterizar y en favorecer el desarrollo de la mirada profesional (Amador, 2020; Fernández & Choy, 2020), enfatizan la necesidad de una guía que ayude a los futuros docentes a estructurar su atención (Santagata et al., 2007; Ivars et al., 2018). En esta investigación, asumimos que los estudiantes para maestros podrían desarrollar sus habilidades para mirar profesionalmente a partir de una síntesis del conocimiento proporcionado por las investigaciones sobre el pensamiento matemático de los estudiantes. En particular, el conocimiento proporcionado por las trayectorias de aprendizaje (Clements & Sarama, 2004; Lobato & Walters, 2017).

Una trayectoria de aprendizaje sintetiza una secuencia gradual de adquisición de conceptos matemáticos por un estudiante, por lo que esta ayudaría a los futuros maestros a interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes (Wilson et al., 2013; Wilson, et al., 2017; Ivars et al., 2018; Ivars et al., 2020). Los resultados de estas investigaciones indican el valor de la trayectoria de aprendizaje como guía para mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes y como facilitadora de los cambios en el discurso de los futuros maestros manifestados por un lenguaje más específico que hace referencia a las componentes de la trayectoria de aprendizaje.

Sin embargo, no se comprende suficientemente cómo los futuros maestros aprenden a mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes usando el conocimiento que proporcionan las trayectorias de aprendizaje. De ahí que, en esta investigación, nos apoyemos en el enfoque instrumental (Rabardel, 2002), el cual permite el análisis de las tareas profesionales desde un modelo cognitivo que da cuenta de la actividad realizada por los futuros maestros al resolverlas.

El enfoque instrumental surge para analizar los efectos de los artefactos en el aprendizaje matemático de los estudiantes (procesos de instrumentación) y los efectos de la acción de los estudiantes en los artefactos (procesos de instrumentalización). Generalmente, este enfoque se ha usado con artefactos materiales (calculadoras, ordenadores, etc.) (Trouche, 2020). En esta investigación adaptamos este enfoque usando una trayectoria de aprendizaje como artefacto conceptual (Moreno et al., 2021).

Por tanto, el objetivo de esta investigación es identificar características del proceso de génesis instrumental en un estudiante para maestro de Educación Infantil cuando mira profesionalmente una situación de aula usando una Trayectoria de Aprendizaje como artefacto conceptual.

ANTECEDENTES TEÓRICOS

El marco teórico de esta investigación se apoya en dos referentes, una adaptación de la teoría del enfoque instrumental de Rabardel (2002) y Verillon y Rabardel (1995) citados en distintos estudios (Trouche, 2004; Trouche, 2020; Trouche, & Drijvers, 2014) y la mirada profesional (Mason, 2002; Sherin & van Es, 2009) desde la perspectiva de Jacobs et al. (2010).

Teoría del enfoque instrumental

El enfoque instrumental contribuyó a la comprensión de la complejidad del uso de herramientas (materiales o conceptuales) en la educación matemática a partir de considerar la noción de esquema como una fuente para construir conocimiento.

Las tres ideas claves del enfoque instrumental, tomadas de la ergonomía cognitiva, son: la distinción entre artefacto e instrumento; entre instrumentalización e instrumentación y la génesis instrumental.

El **artefacto** es considerado como un objeto material o conceptual que se utiliza para realizar una tarea. En esta investigación, consideramos como artefacto conceptual, una trayectoria de aprendizaje de longitud y su medida, como contenido a ser aprendido por los futuros maestros y usado para interpretar las situaciones de enseñanza-aprendizaje. La Trayectoria de Aprendizaje de longitud y su medida usada en esta investigación es una adaptación de Sarama y Clements (2009) que consta de: (a) un objetivo de aprendizaje; (b) una progresión del aprendizaje considerando los elementos matemáticos que definen la magnitud longitud (reconocimiento de la longitud, conservación y transitividad) y la medida de la longitud (unidad de medida-unicidad, iteración, acumulación-, universalidad de la medida y relación entre el número y la unidad de medida) (Tabla 1); y (c) un conjunto de tareas instruccionales.

Por su parte, un **instrumento** no existe en sí mismo, se convierte en instrumento cuando el sujeto se apropia del artefacto y lo integra en su actividad. El instrumento está formado por un artefacto o la parte de un artefacto, movilizado en la actividad, y esquemas de utilización.

Tabla 1

Una progresión del aprendizaje de la magnitud longitud y su medida (adaptado de Sarama & Clements, 2009)

| Nivel | Progresión del aprendizaje | |
|-------|--|----------------------|
| 1 | Reconocen la magnitud longitud: Identifican las cualidades de la magnitud longitud. Realizan comparaciones directas considerando la longitud de forma intuitiva. | |
| 2 | Reconocen la conservación de la longitud: Realizan comparaciones directas por desplazamiento de los objetos. | Magnitud Longitud |
| 3 | Utilizan la propiedad transitiva para realizar: Comparaciones indirectas Ordenaciones de objetos. Medidas de longitudes. | |
| 4 | Identifican una unidad de medida Realizan iteraciones de la unidad de medida Reconocen la propiedad de acumulación. | |
| 5 | Reconocen la universalidad de la unidad de medida. Reconocen la relación entre número y unidad de medida. | Medida Longitud |

Según el diccionario de la lengua española (RAE), el esquema es la idea o concepto que alguien tiene de algo y que condiciona su comportamiento. Para Piaget (1936), un esquema es una estructura mental determinada que puede ser transferida y generalizada. Vergnaud (1996 citado en Trouche, 2003, p. 789) redefinió el esquema, a partir de Piaget, como la "organización invariante de la conducta para una clase dada de situaciones", siendo este una entidad funcional dinámica. En esta investigación definimos **esquema** como una estructura mental dinámica para una clase dada de situaciones que condiciona la respuesta del individuo a las situaciones dadas. Si la estructura mental está formada por proposiciones falsas, las respuestas del individuo no serán adecuadas y, en consecuencia, el esquema construido será inadecuado.

Desde la perspectiva de resolver una tarea mediada por un artefacto, Rabardel (1995, citado en Trouche, 2004) introdujo la noción de **esquema de utilización** de un artefacto como el esquema que organiza la actividad con un artefacto asociado a la realización de una tarea determinada. Así mismo, el autor distingue dos tipos de esquemas de utilización: esquemas de uso (orientados hacia la gestión del artefacto) y esquemas de acción mediados por el *instrumento* (orientados a llevar a cabo una tarea específica). Los **esquemas de uso**, orientados a la gestión del artefacto, son esquemas elementales lo que significa que no pueden desglosarse en unidades más pequeñas susceptibles de cumplir un sub-objetivo identificable. Estos esquemas se corresponden con acciones y actividades específicas directamente relacionadas con el artefacto, en nuestro caso, por ejemplo, seleccionar elementos matemáticos de la trayectoria de aprendizaje presentes en una situación de enseñanza.

Los **esquemas de acción mediados por el instrumento**, orientados a la realización de tareas específicas, implican una reestructuración de la actividad dirigida hacia el objetivo principal del sujeto. Estos esquemas incorporan esquemas de uso como parte de ellos. En nuestro caso, por ejemplo, un esquema de acción mediado por la trayectoria de aprendizaje, vinculado a la destreza interpretar, sería relacionar los elementos matemáticos identificados en la situación de aula con el nivel de comprensión de los niños, teniendo en cuenta la inclusividad de los niveles y la continuidad de la progresión del aprendizaje. Estos esquemas de acción mediados por el instrumento permiten al sujeto entender las potencialidades y restricciones del propio artefacto.

La tercera idea de la ergonomía cognitiva, **génesis instrumental**, fue definida por Rabardel (2002) como el proceso de desarrollar un instrumento a partir de la interacción entre un sujeto y un artefacto para enfrentar una clase de situaciones. En este proceso de génesis instrumental se pueden observar dos procesos interrelacionados: la instrumentalización en la que el sujeto influye en el artefacto; y la instrumentación en la que el artefacto influye en la actividad del sujeto. Por tanto, un estudiante elabora un instrumento, a partir de un artefacto, durante una génesis instrumental combinando los procesos de instrumentalización e instrumentación (Rabardel & Bourmaud, 2003).

La **instrumentalización** permite que el sujeto adapte el artefacto a sus necesidades; su conocimiento lo guiará para seleccionar y utilizar las funciones que necesite para la acción en curso. Puede definirse como un proceso de enriquecimiento de las propiedades del artefacto por parte del sujeto. En nuestra investigación, el futuro maestro podría utilizar su conocimiento para seleccionar y utilizar los elementos matemáticos, la progresión del aprendizaje

y el conjunto de tareas instruccionales que conforman la trayectoria de aprendizaje dada (artefacto), o también podría enriquecerla si diseña nuevas tareas instruccionales.

La **instrumentación** permite desarrollar una actividad dentro de las limitaciones y potencialidades del artefacto. Es importante señalar que la utilización de un artefacto por parte del sujeto introduce en este una actividad cognitiva de construcción o de evolución de esquemas de utilización (Rabardel, 2002). En nuestra investigación, el proceso de instrumentación se evidencia cuando la trayectoria de aprendizaje se convierte en instrumento conceptual. Por ejemplo, cuando se relacionan los elementos matemáticos identificados con la progresión del aprendizaje de la trayectoria dada para interpretar el pensamiento matemático del niño que se evidencia en la situación de aula.

Mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes

La mirada profesional ha sido conceptualizada como la habilidad de reconocer los sucesos importantes en un aula y dar respuestas efectivas (Mason, 2002). Los maestros tienen que enfrentarse a situaciones e interacciones simultáneas en el aula, lo que dificulta su capacidad de prestar atención a todas ellas. En este contexto, los maestros deben saber cómo enfrentarse eficazmente a las situaciones o interacciones del aula para enriquecer potencialmente el aprendizaje de los estudiantes (Mason, 2002). Desde esta perspectiva, Jacobs et al. (2010) conceptualizan la percepción del pensamiento matemático de los niños como tres habilidades interrelacionadas: identificar detalles en las estrategias de los niños, interpretar su comprensión a partir del análisis de sus estrategias y decidir cómo responder en base a la comprensión de los niños.

Aprender a usar la información sobre las trayectorias de aprendizaje como un instrumento conceptual, para mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes, puede interpretarse en términos de los procesos de instrumentalización e instrumentación que constituyen la génesis instrumental. Las destrezas que conforman la mirada profesional están interrelacionadas y, a su vez, el proceso de adquisición y desarrollo de cada una de estas, por parte del futuro maestro, depende de la construcción de los esquemas de utilización vinculados a cada una de las destrezas (Tabla 2).

Tabla 2

Proceso de Génesis Instrumental y desarrollo de la mirada profesional

| | | Procesos | | Destrezas |
|---------------------|--------|--|--------------------------------------|------------------|
| Instrumentalización | | Instrumentación | | |
| Esquemas | de uso | Selecciona los elementos matemáticos que aparecen en la situación de aula | de acción mediada por el instrumento | Identificar |
| | de uso | Percibe la necesidad de vincular los elementos matemáticos con los diferentes niveles de comprensión de la progresión de aprendizaje de la Trayectoria | de acción mediada por el instrumento | Interpretar |
| | de uso | Percibe la necesidad de vincular una tarea, elegida entre las proporcionadas en la Trayectoria o diseñada con el nivel de comprensión interpretado | de acción mediada por el instrumento | Tomar decisiones |

A partir del objetivo de investigación, nos planteamos la siguiente pregunta de investigación:

¿Qué procesos de instrumentalización e instrumentación se evidencian cuando un futuro maestro mira profesionalmente una situación de aula

METODOLOGÍA

Contexto del estudio de caso

El estudiante para maestro participante en este estudio de caso, Pedro (seudónimo dado al estudiante para preservar su identidad), había realizado prácticas profesionales en un centro de Educación Infantil (niños de 3 a 6 años) cuyo objetivo era conocer la organización institucional de los centros (Practicum I), pero aún no había planificado ni implementado ninguna programación de aula (Practicum II y III). Pedro participó en un módulo de enseñanza sobre la magnitud longitud y su medida para niños de 3 a 6 años, en el contexto de la asignatura “Aprendizaje de la Geometría”, situada en el sexto semestre del “Grado en Maestro en Educación Infantil” antes del Practicum II.

El objetivo del módulo de enseñanza, diseñado ad hoc, era desarrollar la mirada profesional del pensamiento matemático sobre la magnitud longitud y su medida en los estudiantes para maestro. El módulo constaba de un documento teórico que incluía una trayectoria de aprendizaje de la longitud y su medida, tres tareas profesionales compuestas por situaciones de aula (registros de la práctica en forma de videos y/o de interacción entre alumnos y maestra) con tres preguntas para realizar un análisis estructurado de cada situación; y una tarea de planificación de la enseñanza en la que se les pedía que seleccionaran tareas, establecieran objetivos coherentes con las mismas, anticiparan posibles respuestas de niños y tomaran decisiones para favorecer la progresión del aprendizaje.

El módulo se implementó en cinco sesiones de 100 minutos cada una. En la primera sesión se presentó a los estudiantes para maestro un documento teórico y resolvieron la primera tarea profesional. Las restantes sesiones se iniciaron con la discusión en gran grupo de la tarea profesional realizada en la sesión anterior y resolvían la siguiente tarea. Todas las tareas profesionales se realizaban individualmente. En la última sesión se propuso una tarea

profesional para evaluar los contenidos del programa formativo adquiridos por los estudiantes para maestro.

Pedro para resolver las tareas profesionales disponía de la información proporcionada en el documento teórico.

Instrumento de recogida de datos

La tarea evaluativa constituye el instrumento de recogida de datos de esta investigación. Dicha tarea está compuesta por (a) una situación de aula que incluye una tarea propuesta por una maestra y por la interacción de la maestra y cuatro niños (Tabla 3), y (b) por tres preguntas profesionales.

En la tabla 3 se presenta la tarea propuesta por la maestra a los niños de la situación de aula de la tarea profesional y en la figura 1 los abalorios y cuerdas utilizados por los niños para realizar los collares propuestos por la maestra.

Tabla 3

Tarea propuesta por la maestra

Alicia es una maestra de Educación Primaria. Este curso está dando clase en el primer ciclo. Hace una semana que empezó a trabajar la magnitud longitud y su medida. Hoy aprovechando la clase de plástica propone a los niños hacer collares usando diferentes materiales (cuentas de colores y distintos macarrones) y cordones de varios tamaños (A, B y C) (Figura 2). Una vez que le ha propuesto la tarea, los niños eligen sus cuerdas y accesorios y empiezan a confeccionar los collares Alicia les pregunta a los niños ¿Quién ha hecho el collar más largo?

Figura 1

Accesorios de la tarea planteada a los niños en la tarea profesional evaluativa



En la tabla 4 se muestran las interacciones de la maestra con los niños, sobre la resolución tarea propuesta por ella, que forman parte de la situación de aula.

Tabla 4

Interacciones de la maestra con los niños

Mario: *He hecho el collar con la cuerda con forma de bastón [cuerda C] y he usado 13 macarrones [ha utilizado macarrones de varios tipos]*

Almudena: *Seño, yo he hecho un collar con la cuerda rosa [cuerda A] y he usado 15 estrellitas [las estrellitas están muy separadas]*

Luis: *El mío tiene 12 macarrones [ha utilizado todos del mismo tipo] y he cogido la cuerda que tiene forma de ensaimada [cuerda B], pero es más largo que el de Mario porque la cuerda es más larga*

Elena: *Yo también he utilizado la cuerda rosa [cuerda A] y he usado 20 estrellitas [las estrellitas están todas juntas]*

Almudena: *Luego el más largo de todos los collares es el de Elena*
A partir de las respuestas dadas por los niños, Alicia les pregunta si están de acuerdo.

Mario: *No seño, yo no estoy de acuerdo con Luis porque el mío tiene más macarrones*

Justificación del instrumento de recogida de datos

Las tres preguntas profesionales planteadas para facilitar, a los estudiantes para maestro, el análisis estructurado de la situación de aula fueron las siguientes:

- Cuestión 1. Indica los **elementos matemáticos** que, desde el punto de vista de la maestra, son necesarios para realizar la tarea. Justifica tu respuesta.
- Cuestión 2. ¿En qué **nivel de comprensión** situarías a cada uno de los niños del diálogo? Razona tu respuesta a partir de las características puesta de manifiesto y justifica usando las intervenciones de los niños.
- Cuestión 3. Suponiendo que eres Alicia, **propón una tarea** para seguir profundizando en la comprensión de la magnitud longitud y su medida para el niño/a que consideras está en el nivel más bajo y para el que está en el nivel más alto. Justifica tu respuesta.

Con la cuestión 1, pretendemos que el estudiante para maestro anticipe los elementos matemáticos necesarios para realizar la tarea, seleccionándolos de la Trayectoria de Aprendizaje (Tabla 5).

Con la cuestión 2, pretendemos que el estudiante para maestro identifique, de entre los elementos matemáticos anticipados en la tarea, aquellos que han usado cada uno de los niños de la situación de enseñanza y, en virtud de estos, sitúe a cada uno de ellos en el nivel de comprensión correspondiente (Tabla 6). Es decir, pretendemos que relacione la destreza identificar los elementos matemáticos con la de interpretar el nivel de comprensión de la progresión en el aprendizaje.

Con la cuestión 3, pretendemos que el estudiante para maestro, una vez situado cada niño en el nivel de comprensión correspondiente, diseñe una nueva tarea o elija alguna de entre las propuestas en la trayectoria de aprendizaje y establezca el objetivo correspondiente, para que el niño progrese en su aprendizaje. Es decir, pretendemos que relacione las tres destrezas identificar-interpretar-tomar decisiones.

Tabla 5

Elementos matemáticos necesarios para realizar la tarea propuesta por la maestra

| Elementos magnitud | Elementos de medida |
|--|--|
| <ul style="list-style-type: none"> reconocimiento de la magnitud longitud, si los niños se dan cuenta de que las cuerdas tienen diferentes largos, conservación, si los niños valoraban la longitud de las cuerdas independientemente de la forma en la que se les presentan, transitividad, si los niños comparan indirectamente la longitud de tres o de cuatro cuerdas usadas para hacer el collar | <ul style="list-style-type: none"> unidad de medida-unicidad, si los niños usan un único accesorio para hacer el collar, <ul style="list-style-type: none"> iteración, si los niños repiten el accesorio elegido a lo largo de la cuerda elegida sin dejar huecos, acumulación, si los niños indican el número de accesorios usados para hacer el collar, relación entre el número y la unidad de medida, si los niños observan que el tamaño del accesorio influye en el número de iteraciones para hacer dos collares con la misma cuerda |

Tabla 6

Características de la comprensión de los niños de la situación de aula

| Niños | Características de la comprensión | Nivel |
|-----------------|--|--------------|
| Mario | Hay evidencias de que <ul style="list-style-type: none"> NO comprende la conservación de la longitud (elemento de magnitud). Mario considera que su collar es más largo que el de Luis y no advierte que la cuerda B es más larga que la C, pero con distinta forma. NO considera la unicidad de la unidad de medida (elemento de medida) Mario usa macarrones de distinto tamaño. | 1 |
| Almudena | Hay evidencias de que <ul style="list-style-type: none"> NO comprende la conservación de la longitud (elemento de magnitud). | |

- Almudena, indica que el collar de Elena es el más largo, cuando ambas han utilizado la misma cuerda.
- Sí considera la **unicidad** de la unidad de medida (elemento de medida)
Usa únicamente estrellitas para hacer su collar
 - NO considera la **iteración** de la unidad de medida (elemento de medida)
Deja huecos entre las estrellitas usadas para hacer el collar.
- Hay evidencias de que
- Sí comprende la **conservación** de la longitud (elemento de magnitud).
Luis compara la cuerda de Mario (forma de bastón) y la suya (enrollada) e indica que el collar de Mario es más largo por ser la cuerda más larga
- Luis**
- Sí considera la **unicidad** de la unidad de medida (elemento de medida)
Usa un único tipo de macarrón
 - Sí considera la **iteración** y la **acumulación** (elementos de medida) 4
No deja huecos entre los macarrones e indica el número de ellos que ha usado
- Hay evidencias de que
- Sí considera la **unicidad** de la unidad de medida (elemento de medida)
Elena, usa solo estrellitas del mismo tipo
- Elena**
- Sí considera la **iteración** y la **acumulación** (elementos de medida)
No deja huecos entre las estrellitas e indica que su collar tiene 20 estrellitas.

Análisis del estudio de caso

Las respuestas a las tres preguntas planteadas en la tarea profesional evaluativa (datos) se han analizado considerando los procesos de instrumentalización (esquemas de uso) e instrumentación (esquemas de acción mediado por el instrumento o instrumentada) de la Trayectoria de Aprendizaje a través de las evidencias manifestadas por Pedro (futuro maestro), en sus respuestas a dicha tarea profesional (Tabla 7).

Tabla 7

Procesos de Génesis Instrumental en la situación de aula planteada

| Cuestiones de la tarea | Procesos | |
|------------------------|---|---|
| | Instrumentalización | Instrumentación |
| Cuestión 1 | Si Pedro anticipa los elementos matemáticos que permitirían resolver la tarea propuesta por la maestra en la situación de aula seleccionándolos de la Trayectoria de Aprendizaje | Si Pedro justifica la selección de cada uno de estos elementos matemáticos anticipados, vinculándolos a la tarea propuesta por la maestra en la situación de aula |
| | Si Pedro selecciona de entre todos los elementos matemáticos anticipados aquellos que aparecen en la situación de aula a la vista de los diálogos de los niños. | Si Pedro justifica con evidencias los elementos matemáticos seleccionados al dotarlos de su significado matemático. |
| Cuestión 2 | Si Pedro percibe la necesidad de vincular los elementos matemáticos , tanto de magnitud como de medida, con los diferentes niveles de comprensión manifestados en la progresión de la Trayectoria de Aprendizaje. | Si Pedro relaciona los elementos matemáticos identificados en la respuesta de cada niño con un único nivel de comprensión a cada uno de ellos al haber considerado la inclusividad de los niveles y la continuidad de la progresión en el aprendizaje. |
| Cuestión 3 | Si Pedro elige una tarea de entre las tareas de la Trayectoria de Aprendizaje, o bien diseña una nueva, percibiendo, en cualquier caso, la necesidad de vincular la tarea con el nivel de comprensión interpretado. | Si Pedro elige o diseña una tarea para favorecer la progresión en el aprendizaje considerando la secuencialidad de los niveles en relación con el nivel de comprensión interpretado. |

Tabla 8

Ejemplo del proceso de análisis cualitativo realizado

| Respuesta de Pedro | Instrumentalización | Instrumentación | Destrezas |
|---|--|------------------------|------------------|
| Mario se encuentra en el nivel 1 ya que no reconoce la conservación. | Esquemas de uso no reconoce la conservación | Adecuado ¹ | Identifica |
| Él no observa la medida de las cuerdas, solo se fija en el número de macarrones, afirmando que “el mío tiene más macarrones”. | Esquemas de uso Mario se encuentra en el nivel 1 | Adecuado ³ | Interpreta |

no observa la medida de las cuerdas, solo se fija en el número de macarrones, afirmando que “el mío tiene más macarrones”
 Esquemas de acción instrumentada
 Esquemas de acción instrumentada
 ya que no reconoce la conservación

1. Selecciona el elemento conservación, implicado en la situación de aula, de entre los elementos anticipados.
2. Justifica con evidencias el elemento conservación dotándolo de su significado matemático.
3. Percibe y vincula el elemento conservación con el nivel de comprensión de la progresión en el aprendizaje.
4. Relaciona el no tener el elemento conservación con el nivel 1 de comprensión

El análisis cualitativo realizado y triangularizado por las investigadoras ha permitido dar cuenta de cómo Pedro ha sido capaz de transformar el artefacto conceptual, Trayectoria de Aprendizaje de la longitud y su medida, en un instrumento conceptual.

Para realizar el análisis la información se organizó en tablas de la siguiente manera: en la primera columna aparecen las respuestas de Pedro y en las siguientes columnas, se seleccionan de las respuestas las evidencias que permiten inferir cada uno de los esquemas de utilización construidos por Pedro, indicando si estos son adecuados y por qué, y a qué destreza están vinculados.

Para realizar este análisis se tomó de referencia la tabla 7. Un ejemplo de este proceso de análisis para las destrezas identificar e interpretar se muestra en la tabla 8.

RESULTADOS

Los resultados obtenidos se han organizado en tres secciones, en las que se describen cada uno de los procesos de instrumentalización e instrumentación, contruidos por Pedro, vinculados a las destrezas de identificar, interpretar y tomar decisiones.

Proceso de instrumentalización e instrumentación en la destreza de identificar

Pedro manifiesta procesos instrumentalización en los esquemas de uso utilizados al resolver la cuestión 1, seleccionando de la Trayectoria de Aprendizaje los elementos matemáticos de magnitud y medida que supone que la maestra considera necesarios para resolver la tarea, tal como se evidencia en sus respuestas. Además, tenemos evidencias del proceso de instrumentación ya que, en la justificación de Pedro, de cada uno de los elementos seleccionados, se pone de manifiesto cómo los usarían los niños para resolver la tarea propuesta por la maestra en la situación de aula. Pedro justifica cada uno de los elementos seleccionados, por ejemplo, en relación con el elemento acumulación indica: “acumulación (saber contabilizar las iteraciones y el resultado final equivale al número total de iteraciones realizadas)”.

Respuesta de Pedro:

Los elementos matemáticos necesarios para realizar la actividad serían todos los de la trayectoria de aprendizaje.

| Elementos magnitud | Elementos de medida |
|--|--|
| <ul style="list-style-type: none"> • Reconocimiento de la magnitud longitud • Conservación (reconocer la igualdad de las longitudes en distintos casos usando el mismo material) | <ul style="list-style-type: none"> • Unidad de medida <ul style="list-style-type: none"> ○ Iteración de la unidad de medida (realizar correctamente las iteraciones, sin saltos ni solapamientos) ○ Acumulación (saber contabilizar las iteraciones y el resultado final equivale al |

| | |
|---|--|
| <ul style="list-style-type: none"> • Transitividad (a la hora de comparar, se hará referencia) | <p>número total de iteraciones realizadas)</p> <ul style="list-style-type: none"> ○ Reconocimiento de la universalidad de la unidad de medida (saber que hay que medir en todos los casos con el mismo instrumento) • Relacionar la palabra número con la unidad de medida (saber que usando accesorios más grandes harán falta menos) |
|---|--|

En la cuestión 2, Pedro ha realizado un proceso de instrumentalización desde el esquema de uso construido, al seleccionar de entre todos los elementos matemáticos anticipados, los elementos de magnitud: conservación, transitividad y los de medida: unidad de medida, unicidad, iteración y acumulación, fijándose en los diálogos de los niños. Asimismo, Pedro ha realizado un proceso de instrumentación construyendo esquemas de acción adecuados mediados por el instrumento- al justificar con evidencias los elementos de medida seleccionados: unidad de medida, unicidad, iteración y acumulación, poniendo de manifiesto que ha dotado de su significado matemático a dichos elementos.

Sin embargo, el esquema de acción mediado por el instrumento, construido por Pedro, para el elemento transitividad es inadecuado. Pedro justifica la selección de este elemento con la evidencia “el más largo es el de Elena”, procedente de la respuesta de Almudena, sin tener en cuenta que esta niña, para hacer esta comparación, se ha fijado en el número de accesorios utilizados por cada niño y no en los largos de las cuerdas; por lo que Pedro no ha vinculado dicha evidencia con el significado matemático de este elemento. En relación con el elemento conservación, Pedro ha construido el esquema de acción mediado por el instrumento, evidenciándolo en Mario y Luis, y no en Almudena al no explicitar en su respuesta que esta no reconoce dicho elemento.

Respuesta de Pedro:

Mario [...] no reconoce la conservación, debido a que no observa la medida de las cuerdas, solo se fija en el número de macarrones, afirmando que “el mío tiene más macarrones”. Asimismo, no realiza la

transitividad porque no reconoce la medida de las cuerdas y no es capaz de compararlas y tampoco usa una única unidad de medida que como dice en el texto, usa macarrones de distinto tipo.

Almudena [...] percibe la unicidad de la unidad de medida “usa siempre estrellitas”, no tiene el concepto iteración “aún no domina correctamente la iteración” al realizar, “saltos, lo que provoca que aumente la longitud”, y [...] domina la propiedad transitiva cuando dice que “el más largo es el de Elena”.

Luis [...] itera de manera correcta, sin saltos ni superposiciones. Y reconoce la conservación porque sabe que las cuerdas tienen medidas distintas y la suya es más larga que la de Mario “es más larga que la de Mario, aunque los accesorios sean diferentes”

Elena [...] realiza correctamente las iteraciones y usa siempre la misma unidad de medida [unicidad] “las estrellitas”. Reconoce la unidad de medida y las iteraciones.

Por tanto, Pedro ha realizado ambos procesos de génesis instrumental en la identificación de los elementos de medida: unidad de medida, unicidad, iteración y acumulación, al haber construido distintos esquemas de utilización, vinculando correctamente los elementos de medida seleccionados a las correspondientes evidencias extraídas de los diálogos de cada uno de los niños manifestando que los ha dotado de su significado matemático. Sin embargo, no ha completado con éxito ambos procesos de instrumentación para algunos elementos de magnitud. De esta forma diríamos que Pedro ha adquirido la destreza identificar en relación con la medida de la longitud, pero muestra dificultades en relación con algunos elementos de magnitud, que reconoce solo en algunos contextos.

Proceso de instrumentalización e instrumentación en la destreza de interpretar

Pedro manifiesta procesos de instrumentalización en los esquemas de uso construidos en su respuesta a la cuestión 2, al vincular cada uno de los elementos matemáticos, tanto de magnitud como de medida, con los diferentes niveles de comprensión manifestados en la progresión de la Trayectoria de Aprendizaje. Igualmente, Pedro manifiesta procesos de instrumentación en los esquemas de acción mediados por el instrumento al relacionar los elementos matemáticos identificados con un único nivel de comprensión de los niños al tener en cuenta la inclusividad y la continuidad de los niveles de la progresión del aprendizaje.

Por ejemplo, Pedro es consciente que Mario, a pesar de mostrar evidencias de realizar iteraciones correctamente y de reconocer la propiedad de acumulación (elementos matemáticos vinculados al nivel 4), interpreta un nivel de comprensión inferior (nivel 1) para Mario, al no reconocer la conservación. Pedro ha tenido en cuenta la inclusividad de los niveles y la continuidad de los mismos para interpretar el nivel de comprensión de Mario y del resto de niños de la situación de aula, tal como se evidencia en su respuesta. No obstante, cabe señalar que el nivel de comprensión interpretado para Almudena (transición del nivel 3 al 4), no se correspondería con el nivel de comprensión de la niña al no haber dotado, Pedro, de significado matemático al elemento transitividad y no mostrar evidencias de que el elemento conservación estaba implícito en la respuesta de Almudena.

Respuesta de Pedro:

Mario se encuentra en el nivel 1 ya que no reconoce la conservación, [ver justificación en sección anterior].

Almudena se encuentra en la transición del nivel 3 al 4 ya que percibe la unicidad de la unidad de medida [...], no tiene el concepto iteración [...], y podemos ver que el nivel 3 lo ha alcanzado al dominar la propiedad transitiva [...].

Luis se encuentra en el nivel 4 porque ya ha adquirido la iteración [...]. Y reconoce la conservación porque [...].

Elena está en el nivel 4 [...]. Reconoce la unidad de medida [unicidad] y las iteraciones.

Por tanto, Pedro ha realizado ambos procesos de génesis instrumental para interpretar los niveles de comprensión de Mario, Almudena, Luis y Elena al considerar la inclusividad de los niveles de comprensión y la continuidad de la progresión del aprendizaje. En consecuencia, ha adquirido la destreza interpretar para el concepto de magnitud longitud y su medida y ha interrelacionado las destrezas de identificar e interpretar. Sin embargo, en el caso de Almudena, Pedro no ha identificado el elemento conservación lo que le ha impedido interpretar correctamente el nivel de comprensión en que se encuentra esta niña.

Proceso de instrumentalización e instrumentación en la destreza de tomar decisiones

Pedro manifiesta procesos de instrumentalización en los esquemas de uso construidos al responder a la cuestión 3, al vincular las tareas diseñadas, a

partir del tipo de tareas proporcionadas en la trayectoria, con el nivel de comprensión interpretado para Mario (nivel inferior) y, para Luis y Elena (nivel superior). Asimismo, Pedro manifiesta procesos de instrumentación en los esquemas de acción mediados por el instrumento construidos al responder a la cuestión 3, al vincular las tareas diseñadas a los niveles de comprensión interpretados para los niveles inferior y superior, considerando la secuencialidad de estos.

Pedro diseña para Mario una tarea que le permita reconocer la conservación y utilizar la propiedad transitiva para realizar comparaciones indirectas y así, progresar entre niveles, del nivel 1 al 2 y del nivel 2 al 3. Para los niños de nivel superior diseña una tarea para que reconozcan la relación entre número y unidad de medida, lo que les permitirá progresar del nivel 4 de comprensión al nivel 5.

Respuesta de Pedro:

Para Mario, el objetivo sería que reconocer la conservación y la transitividad.

Tarea que propongo: realizar comparaciones directas e indirectas con cuerdas colocadas de formas diferentes y posiciones distintas.

Para los más adelantados, el objetivo es reconocer la relación entre el número y la unidad de medida.

La tarea: les presentaría collares realizados con las mismas cuerdas, pero diferentes abalorios para que al contar observaran que la medida se mantiene [pero no el número de iteraciones]; también les presentaría collares de diferentes longitudes. De paso, se profundizaría en el concepto de acumulación, al ser constante siempre la medida de los collares, cuando corresponda

Por tanto, Pedro ha realizado ambos procesos de génesis instrumental para tomar decisiones para que los niños de nivel de comprensión inferior y superior progresen en su aprendizaje, al considerar la secuencialidad de los niveles de comprensión. En consecuencia, ha adquirido la destreza tomar decisiones de la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los niños y ha interrelacionado las tres destrezas.

Pedro ha sido capaz de transformar el artefacto conceptual, Trayectoria de Aprendizaje de la longitud y su medida, en un instrumento conceptual. Pedro se ha dado cuenta de la idea de progresión del aprendizaje en el sentido de que los niveles de comprensión son cada vez más sofisticados y que no se puede

alcanzar un determinado nivel de comprensión sin haber adquirido todos los anteriores (inclusividad, secuencialidad de los niveles). Además, percibe la progresión del aprendizaje como un proceso continuo.

CONCLUSIONES

El objetivo de esta investigación era identificar características del proceso de génesis instrumental en un estudiante para maestro de Educación Infantil cuando mira profesionalmente una situación de aula usando una Trayectoria de Aprendizaje de longitud y su medida como artefacto conceptual.

Los resultados indican que Pedro, en términos generales, ha transformado el artefacto conceptual en un instrumento, a través de la coordinación de los procesos de instrumentalización e instrumentación de la génesis instrumental, al haber construido simultáneamente los siguientes esquemas de uso y de acción mediada por el instrumento, respectivamente (esquemas de utilización): seleccionar dotando de significado a los elementos matemáticos de la trayectoria; vincularlos con los niveles de comprensión asumiendo la inclusividad de los mismos y la continuidad de la progresión del aprendizaje; y elegir/diseñar tareas vinculadas a dichos niveles de comprensión asumiendo la secuencialidad de estos, para mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los niños en la situación de aula planteada. Este hecho evidencia como Pedro se ha apropiado del conocimiento proporcionado por la Trayectoria de Aprendizaje para mirar profesionalmente situaciones de aula (Moreno et al., 2021).

La génesis instrumental mediada por una Trayectoria de Aprendizaje permite dar cuenta de cómo se han construido los esquemas de utilización para transformar la Trayectoria de Aprendizaje en un instrumento conceptual y, por tanto, dar cuenta de cuándo esta construcción de esquemas ha sido adecuada o no. Dotar de significado matemático a los elementos permite construir adecuadamente los esquemas de utilización vinculados a la destreza identificar. Considerar la inclusividad de los niveles de comprensión y la continuidad de la progresión en el aprendizaje permite construir adecuadamente los esquemas de utilización vinculados a la destreza interpretar. Finalmente, considerar la secuencialidad de los niveles de comprensión permite construir adecuadamente los esquemas de utilización vinculados a la destreza tomar decisiones. La construcción de estos esquemas vinculados a cada una de las destrezas se puede hacer de forma aislada, aunque para desarrollar la competencia docente que permita favorecer la progresión del aprendizaje de todos los estudiantes es

necesario dotar de sentido a todas las componentes de la trayectoria de aprendizaje (elementos matemáticos, progresión del aprendizaje y tareas) e interrelacionarlas.

La teoría de la génesis instrumental, usada en el análisis del caso de Pedro, nos ha permitido dar cuenta de cómo este futuro maestro tiene construidos los esquemas de utilización vinculados a las tres destrezas de la mirada profesional. Así, Pedro ha construido adecuadamente los esquemas de utilización vinculados a las destrezas interpretar y tomar decisiones, pero no los vinculados a la destreza identificar al no haber dotado de significado matemático al elemento transitividad, evidenciado por su respuesta en relación con Almudena; además, Pedro parece tener dificultades con el elemento conservación al no haber generalizado el esquema de acción mediado por el instrumento construido para Almudena. Por tanto, aunque interrelacione las tres destrezas, al hacerlo desde algunos esquemas de utilización inadecuados, su mirada profesional, en una situación real de aula relacionada con los elementos matemáticos transitividad y conservación, no le permitirá favorecer la progresión del aprendizaje de todos los niños. Este hecho corrobora resultados de investigaciones previas en las que se considera el conocimiento de las matemáticas como una condición necesaria para desarrollar la mirada profesional (Fernández et al., 2013; Son, 2013).

Otro aspecto relevante del que damos cuenta en esta investigación es el referido a la especificidad del lenguaje usado por el futuro maestro vinculado a la Trayectoria de Aprendizaje que le ha permitido dar sentido matemático a la situación de aula proporcionada. Esta especificidad en el discurso empleado por el futuro maestro está avalada por las investigaciones de Ivars et al. (2018) e Ivars et al. (2020).

Por otro lado, desde la perspectiva del formador de futuros docentes, la génesis instrumental es un marco conceptual potente que permite discriminar entre los procesos de la génesis instrumental que el futuro maestro tiene construidos adecuadamente y los que no, en relación con las destrezas de la mirada profesional. Esta potencialidad de la génesis instrumental podría permitir al formador discriminar entre los esquemas de utilización, vinculados a alguna de las destrezas, que tiene construidos adecuadamente el futuro maestro y, entre aquellos, vinculados a otras destrezas, que no los tenga, y adoptar las decisiones instruccionales necesarias para que los construya adecuadamente. En el caso de Pedro, el formador debería adoptar decisiones que incidieran en el significado matemático del elemento transitividad y facilitar distintos contextos que conlleven el elemento conservación. Estas

decisiones deberían proporcionar variedad de situaciones cotidianas relacionadas con estos elementos para convertirlas en situaciones de enseñanza-aprendizaje, tal y como avalan otras investigaciones (Gasteiger & Benz, 2018; Gasteiger et al., 2020).

A partir de los resultados de esta investigación, se pueden sugerir cómo diseñar módulos de enseñanza para desarrollar la competencia docente mediada por una Trayectoria de Aprendizaje en la formación de futuros maestros. El formador puede diseñar tareas profesionales que incidan, inicialmente, en cada una de las destrezas de forma independiente a fin de que el futuro maestro construyese los esquemas de utilización vinculados a cada una de las destrezas. Una vez construidos estos esquemas de utilización, se diseñarían tareas cuyas resoluciones exigieran al futuro maestro coordinar los esquemas de utilización necesarios para relacionar dos de las tres destrezas, y finalizar con otras tareas que exigieran al futuro maestro coordinar los esquemas de utilización necesarios para interrelacionar las tres destrezas. De esta forma, el formador podría discriminar entre los esquemas de utilización construidos adecuadamente y los que no, y entre la coordinación de estos o no, lo que le permitiría tomar decisiones para desarrollar la competencia docente.

AGRADECIMIENTOS

Esta investigación fue financiada por el Proyecto Nacional Español: EDU2017-87411-R and PID2020-116514GB-I00 - “Ministerio de Economía y Competitividad, Gobierno de España”.

DECLARACIONES DE CONTRIBUCIONES DE LOS AUTORES

Todos los autores han contribuido igualmente al desarrollo de este estudio en todas sus partes.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos que respaldan los resultados de este estudio serán puestos a disposición por el autor correspondiente, GSM, previa solicitud razonable.

REFERENCIAS

- Amador, J. (2020). Noticing as a tool to analyze mathematics instruction and learning. In S. Llinares, & O. Chapman (eds.), *International Handbook of Mathematics Teacher Education. Volume 2: Tools and Processes in Mathematics Teacher Education*. (p. 310-336). Brill Sense.
- Bartell, T.G., Webel, C., Bowen, B., & Dyson, N. (2013). Prospective teacher learning: recognizing evidence of conceptual understanding. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 16, 57-79.
- Clements, D.H., & Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical thinking and Learning*, 6, 81-89.
- Empson, S., & Junk, D. (2004). Teachers “knowledge of children” mathematics after implementing a student-centered curriculum. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 7(2), 121–144.
- Fernández, C., & Choy, B.H. (2020). Theoretical Lenses to develop Mathematics Teacher Noticing. In S. Llinares, & O. Chapman (eds.), *International Handbook of Mathematics Teacher Education. Volume 2: Tools and Processes in Mathematics Teacher Education*, (p. 337-360). Brill Sense.
- Fernández, C., Llinares, S., & Valls, J. (2013). Primary school teacher’s noticing of students’ mathematical thinking in problem solving. *The Mathematics Enthusiast*, 10(1), 441-468.
- Gasteiger, H., & Benz, C. (2018). Enhancing and analyzing kindergarten teachers’ professional knowledge for early mathematics education. *Journal of Mathematical Behavior*, 51, 109–117. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.01.002>.
- Gasteiger, H., Bruns, J., Benz, C., Brunner, E., & Sprenger, P. (2020). Mathematical pedagogical content knowledge of early childhood teachers: a standardized situation-related measurement approach. *ZDM Mathematics Education* 52, 193–205. <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01103-2>.
- Ivars, P., Fernández, C., Llinares, S., & Choy, B.H. (2018). Enhancing Noticing: Using a Hypothetical Trajectory to Improve Pre-service Primary Teachers’ Professional Discourse. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 14(11), em1599. <https://doi.org/10.29333/ejmste/93421>

- Ivars, P., Fernández, C., & Llinares, S. (2020). A Learning Trajectory as a Scaffold for Pre-service Teachers' Noticing of Students' Mathematical Understanding. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 18, 529-548.
- Jacobs, V.R., Lamb, L.C., & Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41(2), 169-202.
- Krupa, E. E., Huey, M., Lesseig, K., Casey, S., & Monson, D. (2017). Investigating secondary preservice teacher noticing of students' mathematical thinking. In E. O. Schack et al. (Eds.). *Teacher Noticing: Bridging and Broadening Perspectives, Contexts, and Frameworks* (pp. 49-71). Springer.
- Lee, J.E. (2017). Preschool Teachers' Pedagogical Content Knowledge in Mathematics. *International Journal of Early Childhood*, 49, 229-243. <https://doi.org/10.1007/s13158-017-0189-1>.
- Llinares, S. (2014). Experimentos de enseñanza e investigación. Una dualidad en la práctica del formador de profesores de matemáticas. *Educación matemática*, 25 años. (p. 31-51).
- Llinares, S. (2012). Construcción de conocimiento y desarrollo de una Mirada profesional para la práctica de enseñar matemáticas en entornos en línea. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática*, 2, 53-70.
- Lobato, J., & Walters, C.D. (2017). A taxonomy of approaches to learning trajectories and progressions. In J. Cai (Ed.). *Compendium for Research in Mathematics Education*, 74-101.
- Mason, J. (2002). *Researching your own practice. The discipline of noticing*. Routledge.
- Moreno, M., Sánchez-Matamoros, G., Callejo, M. L., Pérez-Tyteca, P., & Llinares, S. (2021). How prospective kindergarten teachers develop their noticing skills: the instrumentation of a learning trajectory. *ZDM—Mathematics Education*, 53(1), 57-72.
- Parks, A. M., & Wager, A. A. (2015). What knowledge is shaping teacher preparation in early childhood mathematics? *Journal of Early Childhood Teacher Education*, 36 (2), 124-141. <https://dx.doi.org/10.1080/10901027.2015.1030520>.

- Rabardel, P. (2002). *People and technology – a cognitive approach to contemporary instruments*. Université Paris 8.
- Rabardel, P., & Bourmaud, G. (2003). From computer to instrument system: a developmental perspective. *Interacting with computers*, 15(5), 665-691.
- Sánchez-Matamoros, G., Moreno, M., Perez-Tyteca, P., & Callejo, M.L. (2018). Trayectorias de aprendizaje de la longitud y su medida como instrumento conceptual usado por futuros maestros de educación infantil. *RELIME - Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 21(2), 203-228.
- Santagata, R., Zannoni, C., & Stigler, J. W. (2007). The role of lesson analysis in pre-service teacher education: An empirical investigation of teacher learning from a virtual video-based field experience. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10(2), 123–140.
- Sarama J., & Clements D. (2009). *Early Childhood Mathematics Education Research. Learning Trajectories for Young Children*. Routledge.
- Sherin, M.G., & Van Es, E. A. (2009). Effects of video club participation on teachers' professional vision. *Journal of teacher education*, 60(1), 20-37.
- Son, J. (2013). How preservice teachers interpret and respond to student errors: ratio and proportion in similar rectangles. *Educational Studies in Mathematics*, 84, 49-70.
- Stockero, S.L. (2014). Transitions in prospective mathematics teacher noticing. In J. L. Lo et al. (eds.), *Research Trends in Mathematics Teacher Education*. (pp. 239- 259). Springer.
- Trouche, L. (2003). From artifact to instrument: mathematics teaching mediated by symbolic calculators. *Interacting with Computers*, 15(6), 783–800.
- Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for mathematical learning*, 9(3), 281-307.
- Trouche, L. (2020). Instrumentalization in mathematics education. *Encyclopedia of Mathematics Education*. (p. 404-412). Springer.

- Trouche, L., & Drijvers, P. (2014). Webbing and orchestration. Two interrelated views on digital tools in mathematics education. *Teaching Mathematics and Its Applications: International Journal of the IMA*, 33(3), 193-209.
- Vergnaud, G. (1996). The theory of conceptual fields. *Theories of mathematical learning*. (p. 219-239).
- Wilson, P.H., Mojica, G., & Confrey, J. (2013). Learning trajectories in teacher education: Supporting teachers' understanding of students' mathematical thinking. *Journal of Mathematical Behavior*, 32, 103-121.
- Wilson, P.H., Sztajn, P., Edgington, C., Webb, J., & Myers, M. (2017). Changes in Teachers' Discourse about students in a professional Development on Learning Trajectories. *American Educational Research Journal*, 54(3), 568-604.