ISSN: 2178-7727
DOI: 10.17648/acta.scientiae.6237

Dificultades de maestros en formación integrando tecnología en la resolución y enseñanza de problemas sobre el número racional

Antonio González [a]
Alberto Arnal-Bailera [b]

[a] Universidad de Sevilla, Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Sevilla, España
[b] Universidad de Zaragoza, Departamento de Matemáticas, Zaragoza, España

Recebido para publicação 18 nov. 2020. Aceito, após revisão, 25 mar. 2021
Editor designado: Claudia Lisete Oliveira Groenwald

RESUMEN

Antecedentes: El uso de tecnología en la enseñanza de las matemáticas tiene una especial importancia debido a la capacidad de esta para promover que los estudiantes activen procesos matemáticos básicos. Esto hace necesario la realización de estudios que permitan identificar los conocimientos que tienen los futuros docentes para poder integrar la tecnología en su enseñanza. Modelos como el TPACK han sido desarrollados precisamente con el propósito de analizar los resultados de este tipo de estudios. **Objetivos:** Describir las dificultades de los futuros maestros a la hora de integrar la tecnología en sus explicaciones. **Diseño:** El estudio realizado es exploratorio, con una finalidad de tipo descriptiva. **Contexto y participantes:** La investigación se realiza con una muestra de 47 parejas de maestros en formación de la Universidad de Zaragoza. **Recogida de datos y análisis:** Utilizamos un instrumento de recogida de datos consistente en una tarea que supone la resolución, y diseño de la correspondiente explicación para unos hipotéticos alumnos de Primaria, de un problema de productos de fracciones con y sin tecnología. Dichos datos son analizados bajo la óptica del marco TPACK. **Resultados:** Identificamos y analizamos las dificultades que nuestros estudiantes para maestro presentan ante ciertas relaciones entre tecnología y contenido y otras de carácter pedagógico-matemático para relacionar adecuadamente distintas interpretaciones del número racional, así como una tendencia a no incluir herramientas tecnológicas en el diseño de sus explicaciones. **Conclusiones:** Nuestro análisis nos permite plantear acciones para mejorar la formación de nuestros maestros en la inclusión de la tecnología en sus clases.

Palabras clave: Números racionales; formación de profesorado; TIC; educación matemática; explicaciones; investigación educativa.

Autor correspondiente: Alberto Arnal-Bailera. Email: albarnal@unizar.es

Dificuldades dos professores em formação para integrar a tecnologia na resolução e no ensino de problemas sobre o número racional

RESUMO

Contexto: O uso da tecnologia no ensino da matemática tem uma importância especial devido à sua capacidade de promover os alunos a ativar processos matemáticos básicos. Isso torna necessária a realização de estudos que identifiquem os conhecimentos que os futuros professores possuem para integrar a tecnologia ao seu ensino. Modelos como o TPACK foram desenvolvidos justamente com o propósito de analisar os resultados desse tipo de estudo. **Objetivos:** Descrever as dificuldades dos futuros professores ao integrar a tecnologia em suas explicações. **Design:** O estudo realizado é exploratório, com finalidade descritiva. **Ambiente e participantes:** A pesquisa é realizada com uma amostra de 47 pares de professores em formação da Universidade de Zaragoza. **Coleta e análise de dados:** Usamos um instrumento de coleta de dados que consiste em uma tarefa que envolve a resolução, e desenho da explicação correspondente para alguns alunos hipotéticos do primário, de um problema de produtos de fração com e sem tecnologia. Os referidos dados são analisados sob as lentes da estrutura TPACK. **Resultados:** Identificamos e analisamos as dificuldades que os nossos professores em formação apresentam perante certas relações entre tecnologia e conteúdo e outras de natureza pedagógico-matemática para relacionar adequadamente diferentes interpretações do número racional, bem como uma tendência de não incluir ferramentas tecnológicas na concepção das suas explicações**. Conclusões:** Nossa análise nos permite propor ações para melhorar a formação de nossos professores na inclusão da tecnologia em suas aulas.

Palavras-chave: Números racionais; formação de professores; TIC; educação matemática; explicações; pesquisa educacional.

INTRODUCCIÓN

Las tecnologías de la información y la comunicación han producido numerosos cambios en el ámbito del aprendizaje y la enseñanza, no sólo por ofrecer nuevas oportunidades a los estudiantes, sino porque estos han afectado a los métodos de enseñanza y a las creencias de los profesores (Erdogan y Sahin, 2010). Específicamente, en el caso de la clase de matemáticas, el uso de la tecnología es un tema de investigación de especial relevancia dada la necesidad de proveer a los estudiantes de experiencias que activen procesos fundamentales, como la conjetura y la argumentación (Ljajko, 2016; Morales-López, 2019). Sin embargo, existen numerosos estudios que muestran que los docentes, no sólo de matemáticas sino de otras disciplinas, no suelen aprovechar todas las ventajas que podría aportar la tecnología a su docencia (Bate et al., 2013). En la misma línea, otros trabajos de investigación concluyen que los profesores en formación y los profesores nóveles generalmente usan la tecnología de forma muy limitada y poseen un conocimiento reducido sobre su integración y uso en el aula (Durdu y Dag, 2017), en consonancia con la idea de que la inclusión de la tecnología en la formación de maestros es un reto todavía pendiente de superar (Cabero, 2014). Esta realidad hace necesaria la creación de marcos teóricos que faciliten el análisis de las distintas situaciones y contextos de enseñanza, para así poder encontrar vías que faciliten la inclusión de la tecnología en los mismos.

El modelo TPACK (Mishra y Koehler, 2006) fue diseñado precisamente con el propósito de poder identificar los tipos de conocimiento que el docente debe dominar para poder integrar la tecnología en su enseñanza. En los últimos años, numerosos investigadores han adoptado la óptica de este marco para analizar los resultados de sus estudios (Bate, 2010; Beltrán-Sánchez et al., 2019; Castellanos et al., 2017; Cózar et al., 2015; Kushner y Ward, 2013; Mouza et al., 2014; Tsai y Chai, 2012) específicamente sobre la enseñanza de las matemáticas, que es el área en la que se enmarca nuestro trabajo (Arnal-Bailera y Oller-Marcén, 2017; Dockendorff y Solar, 2018; Durdu y Dag, 2017; Morales-López, 2019; Özgün-Koca et al., 2010). De hecho, la componente tecnológica se concreta en estos últimos trabajos en el uso del software de geometría dinámica Geogebra, que es igualmente el que hemos escogido en nuestra investigación por sus potencialidades didácticas (fomento de la comprensión del contenido matemático, desarrollo de habilidades de resolución de problemas, etc.), como afirman los autores de dichos trabajos. Sin embargo, el contenido que subyace en nuestro estudio, en lugar de ser de tipo geométrico, es de carácter aritmético, concretamente sobre el número racional. La elección de este objeto matemático es debida, además de a la importancia que tiene en el currículo (Real Decreto 126/2014), a la necesidad de comprobar si nuestros maestros en formación han recibido una enseñanza del mismo en primaria y secundaria que pueda limitarles a la hora de realizar explicaciones desde las distintas interpretaciones del mismo, como ya se ha detectado en estudios previos (Clarke et al., 2008; Escolano y Gairín, 2005; Freudenthal, 1983; Gairín, 2001; Martínez-Juste et al., 2017; Olive y Vomvoridi, 2006; Simon et al., 2018; Shield y Dole, 2013).

Los trabajos que hemos citado no abordan de manera conjunta el uso de tecnología en procesos de enseñanza-aprendizaje y el contenido sobre el número racional, lo que nos ha llevado a plantear la siguiente pregunta de investigación: *¿Pueden nuestros maestros en formación abordar la explicación* *con apoyo tecnológico de problemas de multiplicación de fracciones en los que se conectan varias interpretaciones del número racional?* Para responder a esta pregunta, nos proponemos abordar los siguientes objetivos de investigación:

1. Describir las dificultades mostradas en la resolución de tareas relacionadas con la multiplicación de fracciones con tecnología.
2. Estudiar si están preparados para conectar diferentes interpretaciones del número racional necesarias en su práctica docente.
3. Indagar en la inclinación de los estudiantes para maestro a incluir tecnología en sus futuras actividades de enseñanza.

MARCO TEÓRICO

En esta sección, introducimos primeramente los conceptos básicos del modelo TPACK (Technological Pedagogical Content Knowledge), que va a ser nuestro marco de referencia para estudiar el conocimiento que nuestros estudiantes pueden necesitar a la hora de integrar la tecnología en sus futuras secuencias de enseñanza. Seguidamente, presentamos las concreciones específicas de este modelo en nuestro trabajo.

Modelo TPACK

Este modelo teórico, propuesto por Mishra y Koehler (2006), fue diseñado a partir de la inclusión de la tecnología en el constructo de Shulman (1986) sobre conocimiento del contenido pedagógico (PCK), el cual emerge de la interacción entre los dominios de conocimiento sobre contenido (CK) y de conocimiento sobre pedagogía (PK). La aparición de este tercer dominio (TK) genera nuevos subdominios (ver Figura 1) sobre conocimientos del profesor, de manera que las componentes del modelo TPACK se configuran como sigue:

- CK (*Content Knowledge*). Dominio acerca del conocimiento del contenido, es decir, del tema que se va a aprender o enseñar, el cual irá en función del contexto y nivel académico en que nos situemos. Este es el tipo de conocimiento que los profesores deben conocer y comprender a cerca de las materias que enseñan, incluido el conocimiento de hechos, conceptos e ideas y las conexiones que existen entre los mismos, así como de teorías y procedimientos que se utilicen según el campo que corresponda.
- PK (*Pedagogical Knowled*ge). Dominio sobre el conocimiento pedagógico, que abarca a los procesos de enseñanza y aprendizaje, así como a valores y objetivos educativos generales. Este tipo de

conocimiento se refiere a cuestiones tales como la gestión del aula, el desarrollo e implementación de planes de lecciones acorde con el currículo, la elección de métodos de evaluación apropiados, etc. El conocimiento pedagógico es el que habilita a los profesores para comprender cómo sus estudiantes van desarrollando sus habilidades y actitudes hacia el aprendizaje, lo cual requiere un cierto manejo de teoría cognitivas, sociales y del desarrollo del aprendizaje.

- TK (*Technological Knowledge*). Dominio del conocimiento tecnológico para aplicarlo a la realización de diferentes tareas, abarcando desde las tecnologías más primitivas, como los libros y las pizarras, hasta las más avanzadas, como son las tecnologías digitales. Respecto a estas últimas, mencionar que incluyen tanto el manejo e instalación del hardware (dispositivos periféricos, por ejemplo) como del software (procesadores de texto, hojas de cálculo, etc.).
- PCK (*Pedagogical Content Knowledge*). El subdominio del conocimiento del contenido pedagógico, que surge de la combinación de los dominios CK y PK, se refiere a aquel conocimiento de la pedagogía aplicable a la enseñanza de contenidos específicos, incluyendo el manejo de los enfoques apropiados para un determinado contenido y la capacidad para organizar los elementos de ese contenido durante el proceso de enseñanza. En este subdominio tiene especial relevancia la habilidad del docente de escoger representaciones y formulaciones apropiadas de conceptos, según estas faciliten o no su comprensión.
- TCK (*Technological Content Knowledge*). Subdominio que surge de la interacción entre los dominios TK y CK, el cual comprende las interacciones y limitaciones mutuas entre tecnología y contenido, esto es, cómo el contenido puede ser cambiado debido a la utilización de la tecnología. En efecto, aunque la tecnología puede llegar a restringir los tipos de representación de un determinado concepto, en numerosos casos ocurre que las nuevas tecnologías aportan una mayor flexibilidad a la hora de manejar estas representaciones. Un ejemplo de esto es el programa GeoGebra mencionado anteriormente, que permite al usuario manipular objetos geométricos de forma más rápida que si lo hiciera dibujándolos de forma estática, contribuyendo así en procesos de aprendizaje de habilidades como son por ejemplo la conjetura y la demostración. Por tanto, este es un caso en el que la materia a impartir puede cambiarse según la aplicación que se efectúe de la tecnología,

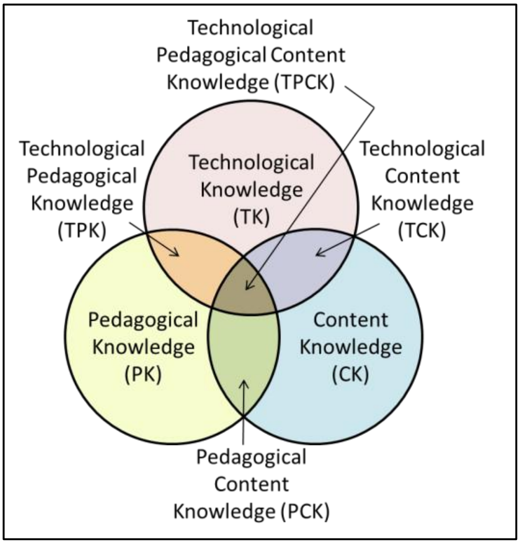
pues esta aporta formas de representación que previo a su aparición no se tenían disponibles.

- TPK (*Technological Pedagogical Knowledge*). Subdominio que relaciona los dominios TK y PK, considerando los cambios que la tecnología produce en la enseñanza-aprendizaje y, recíprocamente, cómo la enseñanza podría cambiar como resultado del uso de tecnologías particulares. La primera vía incluye el conocimiento de diversas tecnologías tal como se utilizan en entornos educativos; la segunda abarca al conocimiento de las estrategias pedagógicas necesarias para poder usar distintas tecnologías.
- TPCK (*Technological Pedagogical Content Knowledge*). Este es el subdominio que representa la combinación de tecnología (TK), pedagogía (PK) y contenido (CK), el cual se ocupa de sustentar una enseñanza eficiente con tecnología que requiere del manejo de las distintas representaciones de conceptos dentro de contenidos específicos. Así mismo, esta forma de conocimiento atañe, entre otros aspectos, a los métodos de enseñanza que emplean tecnología para enseñar contenidos concretos, así como a los factores que facilitan o dificultan la comprensión de conceptos y cómo la tecnología puede intervenir.

El modelo TPACK pone su énfasis en trabajar todos estos dominios y subdominios a la hora de abordar la formación del profesorado (Mouza et al., 2014). Existen numerosos estudios que proponen diversos enfoques sobre qué dominios y subdominios son más importantes a la hora de conseguir integrar la tecnología en su práctica educativa (Kaplon-Schilis y Lyublinskaya, 2019), como por ejemplo el de Mishra y Koehler (2006), que proponen un equilibrio entre estos dominios y subdominios, en contraste con el de Kushner y Ward (2013), que dan más un especial protagonismo al desarrollo del subdominio TPK.

Figura 1

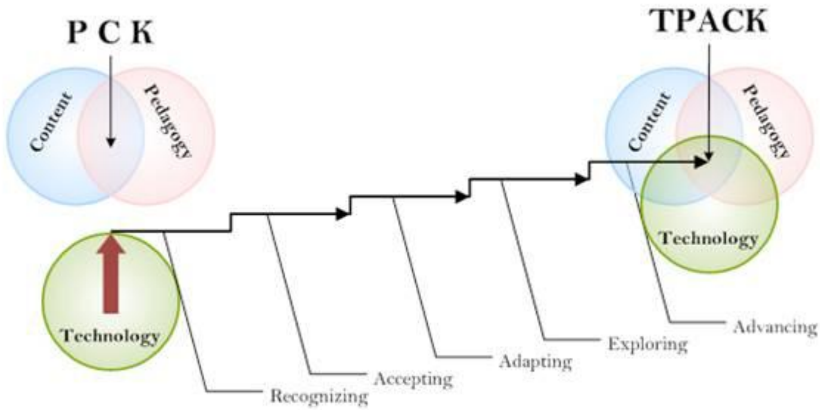
Dominios y subdominios del modelo TPACK (Mishra y Koehler, 2006)



Además de analizar el conocimiento del profesor en un momento determinado sobre los distintos dominios y subdominios del modelo TPACK, es necesario también el estudio del proceso de adquisición de esos conocimientos y de las barreras a superar. Por ejemplo, la integración de la tecnología en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es descrita por Niess et al. (2009), que desarrollan un esquema (ver Figura 2) con descriptores cualitativos detallados para cinco niveles de desarrollo del TPACK:

Figura 2

Descripción visual de los 5 niveles de integración de una tecnología concreta en los procesos de enseñanza y aprendizaje de matemáticas (Niess et al. 2009)



1. *Reconocimiento*, cuando los profesores son capaces de usar la tecnología y reconocer el alineamiento de la tecnología con el contenido matemático, aunque sin integrar la tecnología en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.
2. *Aceptación*, cuando los profesores forman una actitud favorable o desfavorable hacia la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas con una tecnología apropiada.
3. *Adaptación*, cuando los profesores se embarcan en actividades que llevan a una elección de adoptar o rechazar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas con una tecnología apropiada.
4. *Exploración*, cuando los profesores integran de forma activa la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas con una tecnología apropiada.
5. *Avance*, cuando los profesores evalúan los resultados de la decisión de integrar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas con una tecnología apropiada.

Respecto al avance de un profesor de un nivel al siguiente, Ertmer (1999) sugirió la existencia de dos barreras a la hora de integrar la tecnología en la práctica educativa. La primera, de carácter externo, referida a la falta de medios o formación para su uso; la segunda, de carácter personal, referida a las creencias de los profesores sobre las interacciones entre tecnología y enseñanza. Tsai y Chai (2012) introducen una tercera barrera, también de carácter personal, que denominan *design thinking*. Esta barrera hace referencia a la (falta de) capacidad del profesorado para crear y adaptar su práctica docente a los cambios tecnológicos.

Algunas concreciones del modelo TPACK en nuestro trabajo

Respecto del subdominio PCK, en nuestro trabajo analizamos la comprensión de nuestros estudiantes del número racional respecto de las diferentes formas de interpretarlo que dan lugar a diferentes modelos de enseñanza del mismo. Behr et al. (1993) y Kieren (1980) proponen cinco constructos o interpretaciones que, siguiendo a Clarke et al. (2008), podemos describirlas de forma resumida, en la representación del número racional en forma de fracción, como:

- Parte-todo, consistente en la división de una cantidad continua en partes iguales (habitualmente área o longitud) o la construcción de subconjuntos de igual tamaño dado un conjunto discreto de objetos. Así, el denominador de la fracción representa las partes en las que la cantidad continua o el conjunto discreto están divididos y el numerador el número de partes que se consideran.
- Medida, en la cual el número racional compara una cantidad de magnitud con una unidad de esa magnitud. Así, el denominador de la fracción serán las partes iguales en las que la unidad se ha dividido para medir la cantidad de magnitud y el numerador el número de esas partes que se han necesitado para realizar la medida.
- División o cociente, en la que el número racional representa el resultado de repartir de forma igualitaria un cierto número de objetos (numerador) entre un cierto número de personas (denominador).
- Operador, que es aquella en la que el número racional modifica una cantidad de magnitud multiplicándola y obteniendo otra cantidad de magnitud, mayor o menor, expresada en la misma unidad que la inicial.
- Razón, que utiliza el número racional para comparar los tamaños de dos conjuntos o de dos medidas, expresando la medida de una de las cantidades de magnitud respecto a la unidad de medida de la otra magnitud.

De todas las interpretaciones anteriores, la más frecuente en los libros de texto españoles es la interpretación parte-todo (Gairín y Muñoz, 2005; Olive y Vomvoridi, 2006; Simon et al., 2018), a pesar de los inconvenientes que esto supone para los estudiantes. En efecto, Freudenthal (1983) analiza, tanto fenomenológica como matemáticamente, las limitaciones que supone la adopción exclusiva de la interpretación parte-todo en la enseñanza, que implica, entre otras desventajas, un aprendizaje mecánico de los algoritmos y dificultades en la comprensión de la fracción impropia, dado que en la interpretación parte-todo la cantidad de magnitud es a la vez el total y la unidad. Incluso, existen estudios que ponen de manifiesto la escasez de interpretaciones en muchos libros de texto, tratando la fracción de manera meramente formal, sin contextualizar (Gairín y Muñoz, 2005; Martínez-Juste et al., 2017; Shield y Dole, 2013).

Respecto del subdominio TCK, analizamos la utilización de GeoGebra y sus interacciones con el contenido matemático en cuestión. Dockendorf y Solar (2018) informan sobre la influencia que tiene el uso de este software en la promoción del aprendizaje en la escuela secundaria y sobre su impacto en las concepciones de los profesores sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Ahora bien, es importante atender a este subdominio del modelo sin separar las componentes que lo conforman, como se deduce de un estudio realizado en Australia por Bate (2010). En el estudio se encontró, por una parte, que los maestros recién titulados se mostraban favorables a propiciar un aprendizaje significativo del contenido; por otra parte, también se encontró que estos maestros eran competentes en el uso de herramientas TIC básicas. Sin embargo, la suma de estos dos elementos no revertía en un uso significativo de la tecnología en la enseñanza de contenidos específicos, lo cual hace que este subdominio deba ser especialmente potenciado en la formación de maestros, como sugieren Durdu y Dag (2017).

En el subdominio TPK se discuten cuestiones sobre la forma en que la tecnología puede influir en los enfoques docentes que se emplean en el aula. Este subdominio, al igual que el dominio PK, traspasa los límites de nuestra área de conocimiento, la didáctica de la matemática, siempre ligada a un contenido específico, por lo que en este trabajo analizamos directamente la interacción contenido-pedagogía-tecnología, a través del subdominio TPCK. Para ello, estudiamos los niveles de desarrollo (Niess et al., 2009) y las barreras de distinto orden (Ertmer, 1999; Tsai y Chai, 2012) que afectan al proceso de inclusión de la tecnología en las explicaciones de nuestros maestros en formación, categorizadas desde la perspectiva de Charalambous et al. (2011). Estos autores obtienen en su estudio, realizado con estudiantes para maestro que diseñaban explicaciones sobre el número racional, cuatro factores asociados a la calidad de dichas explicaciones: el conocimiento de la materia (por ejemplo, citan la comprensión del concepto de unidad), reflexión activa sobre la práctica, desarrollo de imágenes alternativas de la enseñanza (por ejemplo, el uso de gráficos adecuados) y desarrollar una disposición productiva para dar explicaciones y una confianza en sí mismo para participar de manera autónoma en esta práctica.

MÉTODO Y MUESTRA

La experimentación fue realizada con 47 parejas de estudiantes de tercer curso del Grado en Magisterio de Educación Primaria de la Universidad de Zaragoza en el curso 2017/2018, al finalizar la asignatura Didáctica de la Aritmética II, que cubre contenidos sobre la enseñanza del número racional.

La tarea que mostramos a continuación, diseñada como instrumento de recogida de datos para esta investigación, comienza con el planteamiento de un problema (word-problem en el sentido de Borasi (1986)) sobre la comparación de distintas cantidades de magnitud. Seguidamente, continúa con preguntas sobre su resolución a través de distintos métodos y sobre el diseño de una posible explicación del mismo a alumnos de Educación Primaria. Notar que nuestros alumnos habían estudiado previamente los contenidos necesarios para abordar la tarea, que supone un enlace entre las interpretaciones de medida y cociente estudiadas a lo largo de la asignatura. Igualmente, nuestros alumnos disponían de ordenadores para la realización de la misma.

TAREA – Dado el siguiente problema:

Antonio participa en dos repartos de tortillas, uno el lunes y otro el jueves. En el reparto del lunes hay 3 tortillas para 5 personas y en el del jueves 5 tortillas para 8 personas. De lo que obtiene el lunes, su hermana Sara se come la cuarta parte y él se come el resto. El jueves decide no compartir su tortilla, pero sin embargo se le cae al suelo 1/5 de lo que obtuvo ese día y no se lo come. ¿Qué día comió Antonio más tortilla? (Nota: todas las tortillas que aparecen en este problema son iguales).

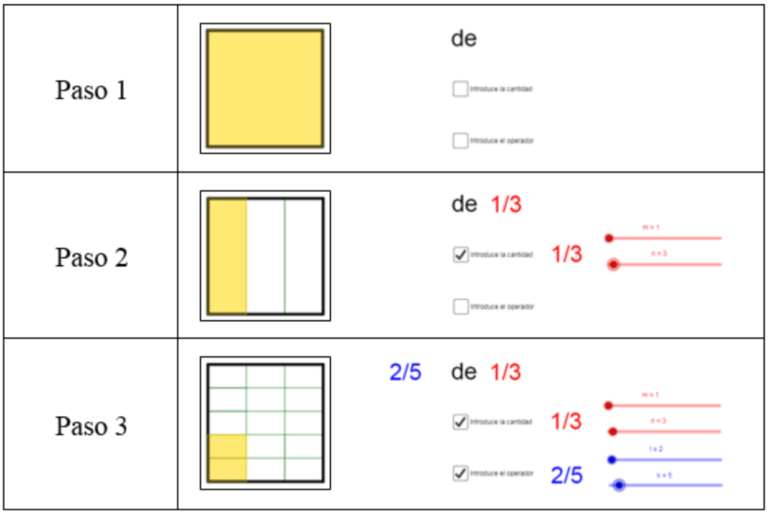
a) Resuélvelo sin hacer uso de operaciones aritméticas usando como soporte gráfico el applet “Multiplicación de Fracciones 1”. Argumenta tu respuesta. (Puedes las capturas de pantalla que creas necesarias para que quede clara la resolución.)
b) En los razonamientos empleados en el apartado anterior, ¿qué condiciones tienen que cumplir los gráficos que has insertado?
c) Resuélvelo ahora sin usar ninguna estrategia gráfica, solo mediante operaciones aritméticas.

d) Imagina que vas a dar una clase de matemáticas a alumnos de Educación Primaria en la que tienes que explicar cómo resolver problemas de comparación entre cantidades de magnitud procedentes de la aplicación de operadores. Describe paso a paso las indicaciones matemáticas que darías a tus alumnos para que aprendan a resolver el problema dado al inicio de esta tarea.

El applet "Multiplicación de fracciones 1" (https://www.geogebra.org/m/b3XaeVVV) permite representar gráficamente el producto de fracciones en la interpretación de medida: una de las fracciones se corresponde con una cantidad de magnitud (área en este caso) y la otra es un operador que la modifica (ver Figura 3).

Figura 3

Tres pasos para representar 2/5 de 1/3 de unidad de área con ayuda del applet: unidad (Paso 1), introducción de la cantidad (Paso 2) e introducción del operador de la figura (Paso 3)



Esta tarea nos permite analizar distintos dominios y subdominios del modelo TPACK que demuestran nuestros alumnos para su realización:

- En el apartado a, se pide a los alumnos que resuelvan el problema inicial con ayuda del applet y argumenten su respuesta. Realizar este apartado implica el manejo de tecnología (TK), la relación de la misma con el contenido matemático (TCK) para la resolución de un problema matemático (CK) y la posterior argumentación vía distintas interpretaciones del número racional que generan distintos modelos de enseñanza (PCK).
- En el apartado b, inducimos a los alumnos a que reflexionen sobre cómo deberían haber insertado los gráficos del apartado anterior, pues supusimos que los alumnos no harían explícitas estas consideraciones por sí mismos. Esto supone, además de una reflexión sobre el contenido matemático (CK), un uso adecuado de tecnología específica para ese contenido (TCK), en este caso la creación de imágenes (que representaban la unidad) de igual tamaño.
- El apartado c requiere a los alumnos del uso exclusivo de operaciones formales, en contraste con el apartado a. Así, este apartado se centra únicamente en aspectos de contenido matemático de nuestros estudiantes (CK).
- El apartado d supone la integración de la resolución del problema en una hipotética explicación (PCK) a un grupo de alumnos, lo cual implica, según han podido comprobar en el apartado a, la posibilidad de incluir la tecnología en dicha explicación (TPCK).

En los apartados a, b y c las variables son de carácter emergente (excepto por la interpretación del número racional) y surgen tras repetidas lecturas de las respuestas de los estudiantes. Señalamos a continuación las variables que aparecen en cada uno de ellos junto con las categorías correspondientes entre paréntesis:

- En el apartado a estudiamos la presencia de errores conceptuales en la resolución (confusión de la parte con el total), interpretación del número racional presente en las argumentaciones (medida con apoyo gráfico, medida con apoyo verbal, cociente o ausencia de interpretación) y la corrección del resultado (correcto o incorrecto).
- En el apartado b estudiamos la relevancia del tamaño de las unidades y subunidades (relevante o irrelevante en ambos casos).
- En el apartado c estudiamos la presencia de errores conceptuales en la resolución (confusión de la parte con el total o aplicación incorrecta del operador) y la corrección del resultado (correcto o incorrecto).

En el apartado d, nuestras variables se basan en algunas de las descritas por Charalombous et al. (2011) sobre la calidad de las explicaciones. Por una parte, el conocimiento de la materia se analiza a través de los contenidos matemáticos explicitados en la explicación (referencias al operador y a la comparación de cantidades); por otra parte, el desarrollo de imágenes alternativas de la enseñanza se estudia a través de dos variables: la interpretación del número racional (medida, cociente o ausencia de interpretación) y las reflexiones de tipo heurístico (sobre el resultado de la tarea, sobre el número de diferentes formas de resolución, sobre la presencia de tecnología en la resolución y sobre aspectos matemáticos).

Nuestro estudio tiene carácter exploratorio y ha sido realizado con fines descriptivos (Edmonds y Kennedy, 2017). El procedimiento que hemos adoptado para recoger la información que discutimos en las siguientes secciones ha sido el análisis de las producciones escritas de las parejas de alumnos mencionadas anteriormente.

RESULTADOS

Apartado a

Para la resolución de este apartado, los alumnos debieron utilizar el applet en dos ocasiones, una por reparto. En cada ocasión, debía introducirse primeramente el resultado obtenido de cada reparto (lunes y jueves), y a continuación el operador correspondiente (obteniendo 9/20 y 10/20 de tortilla, respectivamente). En ambas ocasiones, los alumnos debían hacer capturas de pantalla con los resultados obtenidos, que posteriormente se insertarían en el fichero de respuestas para compararlas visualmente (debiendo concluir con que Antonio comió más tortilla el jueves). Queremos hacer notar la adecuación del applet propuesto para este apartado porque, aunque el problema está situado en la interpretación de cociente, su solución es la cantidad recibida en el reparto por Antonio (y no por el resto de participantes), lo cual el applet expresa directamente.

Respecto de la corrección en el uso del applet, solo un 13% del total cometieron errores al introducir los datos en el mismo. Respecto de la corrección matemática, obtuvimos que un 55% de las parejas resolvieron de modo satisfactorio la tarea. Las resoluciones calificadas como incorrectas fueron aquellas que, o bien carecían de la comparación entre las cantidades de tortilla, o bien las cantidades que proponían para cada día eran incorrectas. Este último caso ocurre en ocasiones por un error que denominaremos “confusión de la parte con el total" y que fue cometido por 12 parejas (57% de las que no resolvieron correctamente la tarea). En este error se confunde la fracción complementaria respecto al total representado (1 tortilla) con la fracción complementaria respecto a la parte correspondiente a Antonio (3/5 de tortilla). En efecto, una vez calculados los 3/20 de tortilla que come la hermana de Antonio, los estudiantes afirman que este último comió el complementario con respecto al total representado, es decir, 17/20 de tortilla, en lugar de hacerlo respecto a lo que había ganado Antonio en el reparto, es decir, 3/4 de 3/5 de tortilla.

En referencia a la argumentación, todas las parejas salvo 5 de ellas dieron algún tipo de argumento basado en alguna de las siguientes interpretaciones (10 parejas argumentaron en más de una):

- Interpretación medida (con apoyo gráfico): se apoya en que la cantidad de área coloreada del cuadrado que genera el applet es visualmente mayor para el reparto del jueves que para el del lunes. Por ejemplo, la pareja 1 escribe "Como puede observarse en los siguientes gráficos, la cantidad coloreada sobre la unidad es menor en lunes que en jueves…".
- Interpretación medida (con apoyo verbal): razona en base al número de subunidades o partes en las que se divide la unidad y a su tamaño. Por ejemplo, la pareja 29 escribe "…dos subunidades del segundo dibujo equivalen a una del primero…".
- Interpretación cociente: razona para cada reparto en base al número de tortillas a repartir y al número de comensales. La pareja 42 escribe "…igualando el número de personas en los dos repartos…".
- Ausencia de interpretación: resuelve la comparación a través de operaciones aritméticas formales. La pareja 2 escribe "…como tienen el mismo denominador…".

Recontando las argumentaciones mayoritarias, obtuvimos que 15 parejas razonaron solo interpretando la fracción como medida (con apoyo gráfico) y 14 lo hicieron sin dar interpretación. El argumento menos utilizado fue el de cociente, empleado solo por 8 parejas.

Observamos que no hay una relación estadística significativa entre la corrección de la respuesta con la presencia o ausencia de interpretaciones de la fracción en los argumentos debido a la proximidad que existe entre los valores de la Tabla 1.

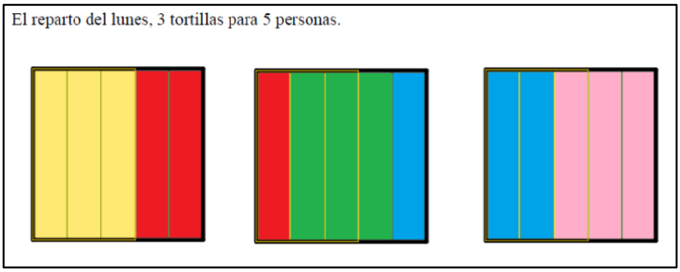
Tabla 1

Relación entre la corrección de la tarea y la presencia de interpretaciones de la fracción

	Presencia de interpretaciones de la fracción	Sin interpretaciones de la fracción
Resolución correcta	18 (38%)	8 (17%)
Resolución incorrecta	11 (24%)	10 (21%)

Figura 4

Ejemplo de adaptación del applet a la interpretación como cociente



Queremos notar que cuatro parejas hicieron un uso del applet diferente del propuesto, aunque solo una resolvió correctamente la tarea. Estas parejas representaron el reparto como se muestra en la Figura 4 (extraído de la pareja 9), dibujando las tres unidades a repartir y marcando con colores diferentes lo que correspondía a cada participante en el reparto.

Apartado b

La condición que deben cumplir los gráficos de las capturas de pantalla realizadas es que las unidades, en este caso representadas por cuadrados, tengan el mismo tamaño para que al comparar visualmente sus zonas sombreadas se determine correctamente cuál de las dos representa más cantidad de tortilla. Sin embargo, no es necesario que el tamaño de las subunidades sea el mismo en ambas capturas, pues esto no influye en la cantidad de área coloreada. Por tanto, una respuesta correcta a esta tarea considera relevante la igualdad del tamaño de las unidades y no considera relevante la igualdad del tamaño de las subunidades.

Solo un 23% de los alumnos (ver Tabla 2) resolvieron correctamente la tarea. Por un lado, el 51% de las parejas no mencionaron que el tamaño de las unidades fuera relevante para realizar la comparación; por otra parte, el 47% de las parejas dieron importancia al tamaño de las subunidades, cometiendo un 21% del total de parejas ambos errores.

Tabla 2

Relación entre la percepción de la relevancia del tamaño de unidades y subunidades

	Tamaño subunidades relevante	**Tamaño subunidades irrelevante**
Tamaño unidades relevante	12 (26%)	11 (23%)
Tamaño unidades irrelevante	10 (21%)	14 (30%)

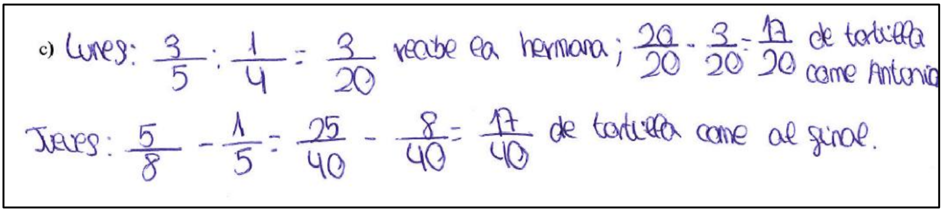
Apartado c

En esta tarea, la resolución es correcta cuando se aplican adecuadamente los operadores apropiados a las cantidades de magnitud asociadas a cada día, obteniendo las fracciones correspondientes, y se efectúa una comparación entre ellas.

Tuvieron una resolución correcta 31 de las 47 parejas participantes (66%). Los errores más frecuentes fueron denominados “aplicación incorrecta del operador” (5 parejas) y “confusión de la parte con el total” (9 parejas). Entendemos como aplicación incorrecta del operador no interpretar la función del operador como un producto. En la Figura 5 la pareja 18 plantea un cociente de fracciones (lunes) y una diferencia (jueves) en lugar de dos productos. Asimismo, en la línea del apartado a, entendemos confusión de la parte con el total el considerar que el total de cantidad disponible es la unidad. En el mismo ejemplo la pareja realiza el complementario respecto de una unidad (tortilla), en lugar de hacerlo respecto de la cantidad disponible.

Figura 5

Ejemplo de aplicación incorrecta del operador en la pareja 18



Relacionando ahora la corrección en las resoluciones de los apartados c y a, aportamos la Tabla 3, a partir de cuyos datos se obtiene una relación estadísticamente significativa al 95%.

Tabla 3

Relación entre la corrección de las tareas a y c

	Apartado c correcto	**Apartado c incorrecto**
Apartado a correcto	25 (53%)	1 (2%)
Apartado a incorrecto	5 (11%)	16 (34%)

Notar finalmente que 14 parejas (30%) han obtenido diferentes resultados en ambos apartados sin haber comentado este hecho (8 resolvieron incorrectamente los dos apartados y 6 alguno de ellos).

Apartado d

Este apartado, que fue respondido por 42 de las 47 parejas, es de corte más didáctico que los anteriores, por lo que no podemos hablar de respuestas correctas o incorrectas en términos absolutos. Para abordar su estudio atendemos primero a dos variables: qué contenidos matemáticos aparecen cuando diseñan explicaciones nuestros alumnos y qué interpretaciones de la fracción son más frecuentes en sus explicaciones.

En primer lugar, respecto de los contenidos matemáticos explicitados, hemos estudiado la presencia de referencias al operador y a la comparación de cantidades, que son los contenidos que aparecen en el problema propuesto. Estos contenidos están relacionados con las dificultades matemáticas esperables en alumnos de Primaria y, por tanto, deberían ser la base de una explicación de calidad (Charalambous et al., 2011). Destacamos el equilibrio que existe entre el número de parejas (20) que han considerado la necesidad de incluir en sus explicaciones referencias a los dos aspectos matemáticos destacados (operador y comparación) y las que no. De las 22 parejas que no han considerado esta necesidad, 15 no hablan de la comparación y 10 no hablan del operador.

Consideramos de interés relacionar la selección de contenidos matemáticos que requiere este apartado con los apartados a y c. Observamos que las parejas que realizan explicaciones parciales, sin hacer alusión a los dos contenidos matemáticos destacados (operador y comparación), tuvieron mejores resoluciones matemáticas de partida; concretamente, un 68% de estas parejas resolvió correctamente la tarea en los apartados anteriores. Recíprocamente, entre las 20 parejas que consideran necesario hacer referencia a las ideas de operador y comparación, solo un 45% resolvió correctamente la tarea en los apartados anteriores.

Respecto de las interpretaciones de la fracción que aparecen propuestas, destacamos que en 10 casos, ninguna de las fracciones se apoyaba en ningún significado, siendo consideradas de manera meramente formal. Entre los que utilizan alguna interpretación para dar significado al número racional, destacan 23 parejas que utilizan en (toda o parte de) su explicación la de medida; igualmente ocurre con 15 parejas que utilizan en este sentido la de cociente.

Asimismo, podemos observar características generales relativas a la resolución de problemas y a las herramientas a las que se recurre para las explicaciones: solo dos parejas de las 42 que resolvieron la tarea plantean que el problema se puede resolver de más de una manera con el fin de relacionar varias formas de resolución o comprobar que el resultado deber ser el mismo.

Figura 6

Ejemplo de explicación que incluye el uso del applet propuesto por la pareja 31

d) Para representar las fracciones usando la aplicación, deberán poner la fracción que representa el primer reparto donde pone "introduce la cantidad" que en ente caso será 3/5, que indica que son 3 tortillas para 5 personas.
Y donde pone "introduce el operador" deberan poner la fracción que indica la cantidad de tortilla que se come, en ente caso 3/4, que indica las tres cuartas partes del reparto. Así en la gráfica aparecera representado 3/4 de 3/5. Se realizara lo mismo con el 2º reparto y así podrían compararlo gráficamente.

Revisando globalmente las explicaciones propuestas por todas las parejas resulta notable que, a pesar de que los primeros apartados de la tarea involucran un uso intensivo de tecnología, solo 3 parejas usaron el applet en sus indicaciones (ver Figura 6). En ellas, el uso que se propone de la tecnología, en este caso del applet de GeoGebra utilizado en el apartado a, se limita exclusivamente a su función de calculadora gráfica que resuelve la necesidad de representar la fracción resultante de aplicar un operador a una cantidad de magnitud. Tampoco se reflexiona sobre cuestiones matemáticas ligadas a su uso, como podrían ser el tamaño de la unidad o la subunidad. Particularizando en las parejas que antes realizaban una adaptación del applet para utilizarlo con una interpretación de cociente, podemos decir que dos de ellas son coherentes y mantienen dicha adaptación cuando diseñan sus explicaciones, no así las otras dos. Es de reseñar que ninguna de las cuatro utiliza la tecnología en sus explicaciones a pesar de haber mostrado una buena comprensión de la misma anteriormente.

DISCUSIÓN E IMPLICACIONES

A continuación, discutimos los resultados obtenidos en la sección anterior desde la mirada del modelo TPACK, analizándolos desde cada uno de los dominios y subdominios presentes en nuestras tareas.

TK

El desarrollo del dominio TK, que comprende las habilidades de nuestros estudiantes en el uso general de tecnologías, no supuso un impedimento para la resolución del apartado a. En efecto, apenas unos pocos casos mostraron dificultades para utilizar el applet o para situar los datos en el mismo. Más aún, prácticamente todos los alumnos dieron una respuesta al problema, correcta o no, lo que va en la línea de que al plantear una tarea tecnológica los alumnos tienden a dar una respuesta independientemente de su comprensión del contenido matemático que se les plantea (Ljajko, 2016). Estos hechos podrían ser indicios de un desarrollo aceptable del dominio TK, aunque para valorarlo con más precisión necesitaríamos tener información sobre el conocimiento de nuestros alumnos respecto de otras herramientas tecnológicas (Kushner y Ward, 2013).

CK

El desarrollo del dominio CK de nuestros maestros en formación está relacionado con los errores matemáticos que mostraron en la resolución de los distintos apartados. El error más común es el que denominamos "confusión parte con el total" (apartados a y c), posiblemente originado por uno de los inconvenientes de la enseñanza tradicional, generalmente limitada a la interpretación parte-todo, en la cual el alumno no necesita reconocer la unidad porque esta coincide con la cantidad total de magnitud (Gairín, 2001; Gairín y Muñoz, 2005). También Simon et al. (2018) remarcan esta y otras dificultades en ciertos conceptos avanzados sobre fracciones cuando la enseñanza se limita exclusivamente a la interpretación parte-todo y cómo estas pueden ser paliadas vía secuencias de tareas en la interpretación como medida, como también aseguran Olive y Vomvoridi (2006). Por otra parte, el error "aplicación incorrecta del operador" (apartado c) podría estar influenciado por la falsa concepción de que la multiplicación incrementa la cantidad, como afirman Clarke et al. (2008).

Son notables las incoherencias observadas entre las respuestas a los apartados a y c, pues muchas parejas obtuvieron resultados numéricos diferentes sin hacerlo notar. Esto refleja una dificultad en la ejecución de la fase de verificación de la solución de un problema (Piñeiro et al., 2019), lo cual es llamativo dado que el currículum español aborda explícitamente el tratamiento de la coherencia de las soluciones de un problema (Real Decreto 126/2014). Una posible explicación a esto, en el caso particular del número racional, es el predominio de la interpretación parte-todo que acabamos de comentar, lo cual dificulta la búsqueda de soluciones vía dos interpretaciones distintas.

El error que cometieron las parejas que dieron importancia al tamaño de las subunidades (apartado b) puede ser debido a que estuvieran pensando en las condiciones necesarias para realizar comparaciones de tipo formal entre números racionales. En efecto, para comparar fracciones formalmente suelen igualar sus denominadores, por lo que tenderían a pensar que siempre es necesario hacer coincidir el tamaño de las subunidades. Este error puede estar relacionado con el uso anterior de libros de texto que acostumbran a dar mucha importancia a los ejercicios formales y en los que se ejercitan sobre todo las técnicas aritméticas (Gairín y Muñoz, 2005; Martínez-Juste et al., 2017; Shield y Dole, 2013).

Los errores y dificultades discutidos en este apartado son claros indicadores de debilidades en el desarrollo del dominio CK de nuestros maestros en formación (Alguacil et al., 2016), las cuales podrán condicionar el desarrollo de los subdominios derivados de este.

TCK

Las destrezas que mostraron nuestros alumnos en el subdominio TCK quedaron reflejadas en su realización de los apartados a y b. En el primero, casi la mitad de las parejas no supo aprovechar las funcionalidades del applet que facilitaban la comprensión del contenido matemático subyacente. Además, solo detectamos un escaso grupo de parejas que utilizaron el applet para adaptarlo a la interpretación como cociente, entre las cuales solo una de ellas resolvió correctamente la tarea. En el apartado b, respecto del error relativo a no dar importancia al tamaño de las unidades, cabe destacar que el enunciado ya explicitaba que ambas eran iguales. Lo que debían considerar los alumnos es que las representaciones de las mismas debían tener igual tamaño para poder realizar una comparación visual. Este error es posiblemente ocasionado porque al capturar pantallas dos veces del mismo applet no era necesario modificar el tamaño de las mismas. Todas estas interacciones entre tecnología y contenido reflejan unas limitaciones de nuestros estudiantes en su desarrollo del subdominio TCK, lo cual refuerza la validez de la propuesta de Durdu y Dag (2017) acerca de centrar la instrucción de futuros docentes especialmente en este subdominio.

PCK

Los aspectos tratados en nuestro estudio que condicionan el subdominio PCK (apartados a y d) de nuestros estudiantes son: la capacidad para argumentar, la completitud de las explicaciones y el uso de las distintas interpretaciones del número racional. Respecto a la primera, incluso algunos de los que resuelven incorrectamente, hacen el esfuerzo de argumentar dentro de una sola interpretación, lo cual les supondría una ventaja a la hora de elaborar futuras explicaciones. En contraste, otros alumnos que resuelven correctamente razonan, o bien mezclando ideas de varias interpretaciones del número racional, o bien sin utilizar interpretación alguna, por lo que los números pierden su significado y esto podría derivar en una dificultad didáctica a la hora de explicar a sus futuros alumnos (Gairín, 2001). Estas consideraciones irían en la línea expresada por algunos autores (Ruíz de Gauna et al., 2013) que muestran la existencia de un perfil de alumno de magisterio de corte mayormente matemático y otro perfil de tipo fundamentalmente pedagógico-didáctico. Estos resultados indican un escaso desarrollo en el subdominio PCK (Mishra y Koehler, 2006), que se acentúa cuando hay un desequilibrio entre las destrezas correspondientes a los dominios CK y PK, sobre todo cuando el primero está mucho más desarrollado que el segundo (Kushner y Ward, 2013).

En referencia a la completitud de las explicaciones, en la tarea d nuestros estudiantes abordan la comparación menos frecuentemente que el operador. Para construir una buena explicación hay que atender a todas las características de la tarea que pueden suponer una dificultad o un error de concepto de los alumnos (Charalambous et al., 2011). Un alto porcentaje de nuestros alumnos no atendió a ambas dificultades en sus explicaciones, pudiendo esto afectar a su capacidad para construir explicaciones de calidad, y por tanto al desarrollo del subdominio PCK. Notamos la existencia de un cierto grupo que aporta explicaciones incompletas junto con un buen desempeño matemático, lo que puede ser otra muestra más de desequilibrio entre los dominios PK y CK, empobreciendo el desarrollo del subdominio PCK ya indicado anteriormente por Kushner y Ward (2013).

Finalmente, en lo relativo al uso de las distintas interpretaciones del número racional, observamos debilidades pedagógico-matemáticas en algunas parejas que se restringen en sus explicaciones a operaciones formales entre fracciones, desaprovechando el contexto que ofrecía el problema. Gairín (2001) destaca que los estudiantes para maestro que muestran una menor comprensión de las distintas interpretaciones del número racional diseñan unas explicaciones meramente formales, lo cual puede estar relacionado con la instrucción recibida durante su educación matemática preuniversitaria, guiada por libros de texto en los que predominan la resolución de ejercicios fundamentalmente procedimentales (Gairín y Muñoz, 2005; Martínez-Juste et al., 2017; Shield y Dole, 2013). En particular, todo lo anterior muestra un bajo desarrollo del dominio PCK de nuestros estudiantes.

TPCK

El apartado d permite evaluar el subdominio TPCK de nuestros estudiantes, que comprende las interacciones entre las tres componentes fundamentales del modelo TPACK. En la realización del último apartado, fueron pocas las parejas que integraron el uso de la tecnología en sus indicaciones. Este hecho podría indicar un cierto escepticismo entre nuestros maestros en formación sobre la capacidad de la tecnología para transformar la enseñanza, incluso teniendo preparación tecnológica suficiente, como muestra el estudio de Özgün-Koca et al. (2010). En la línea de estos autores, esto podría estar relacionado con el hecho de que nuestros alumnos aún se sienten más identificados con el rol de estudiantes de matemáticas que con el de docente de matemáticas. Desde otro punto de vista (Ertmer, 1999; Tsai y Chai, 2012), lo dicho anteriormente podría interpretarse también como que nuestros futuros maestros no han superado todavía las barreras de segundo orden (escepticismo) o de tercer orden (adaptación de las tareas para la inclusión de la tecnología). En términos de Niess et al. (2009), nuestros alumnos no habrían llegado al nivel 3 (adaptación) de los cinco niveles propuestos para la integración de las TIC en la enseñanza. Estas reflexiones nos permiten concluir este apartado haciendo notar un bajo desarrollo del subdominio TPCK de nuestros alumnos, lo cual es coherente con las habilidades mostradas por los mismos en otros subdominios.

CONCLUSIONES E IMPLICACIONES PARA LA FORMACIÓN DE MAESTROS

Respecto del primer objetivo, describir las dificultades mostradas por nuestros alumnos en la resolución de tareas relacionadas con la multiplicación de fracciones con tecnología, hemos observado que estos no han aprovechado las funcionalidades que el applet ofrecía para resolver la tarea matemática, así como tampoco han sabido explicitar las condiciones matemáticas necesarias para resolver el problema en un entorno tecnológico. Aunque en nuestra enseñanza usamos la tecnología en diferentes momentos del curso como instrumento para abordar el contenido matemático, vemos necesario propiciar un uso más reflexionado de la misma en la formación de maestros. Para ello, proponemos focalizar la atención en las relaciones entre las acciones tecnológicas y su significado matemático, esperando así superar las limitaciones que hemos señalado en el desarrollo del subdominio TCK de los futuros maestros.

Respecto del segundo objetivo, estudiar si nuestros estudiantes están preparados para conectar diferentes interpretaciones del número racional necesarias en su práctica docente, los resultados de este trabajo muestran ciertas dificultades. Específicamente encontramos que, o bien no son capaces de mantener sus explicaciones dentro de una misma interpretación del número racional, o bien prescinden de cualquier interpretación. Aunque en nuestra enseñanza abordamos de forma sucesiva todas las interpretaciones del número racional mencionadas en este trabajo, los resultados nos advierten de la importancia de poner especial énfasis en las conexiones que existen entre estas. Esta idea, que fomentaría el desarrollo del subdominio PCK, podría llevarse a cabo de distintas maneras: estudio de libros de texto de otros países que muestren una mayor riqueza de interpretaciones del número racional, o realización de actividades que implicaran replantear un problema en términos de una interpretación del número racional distinta a la dada.

Respecto del tercer objetivo, indagar en la inclinación de los estudiantes para maestro a incluir tecnología en sus futuras actividades de enseñanza, hemos observado un bajo nivel de desarrollo que podría estar condicionado por la existencia de barreras de carácter personal. Nuestra asignatura requiere, a nivel tecnológico, del uso de applets de GeoGebra que permiten realizar gráficos con una comodidad y precisión que no pueden conseguirse a mano. Para ampliar este uso, que no abarca aspectos pedagógicos, los formadores debemos promover situaciones en las que los maestros en formación se vean obligados a integrar la tecnología en sus explicaciones, analizando las posibles dificultades (tanto matemáticas como tecnológicas) que podrían encontrar sus futuros alumnos. Tanto esta propuesta como las que hemos realizado respecto de los dos objetivos anteriores, creemos que contribuirán a desarrollar el subdominio TPCK de los estudiantes para maestro.

AGRADECIMIENTOS

Queremos agradecer especialmente al profesor Dr. Rafael Escolano Vizcarra por todo lo que nos ha transmitido sobre la enseñanza y el aprendizaje del número racional, así como por sus aportaciones y comentarios a las primeras versiones de este trabajo.

Este trabajo fue parcialmente financiado por el Ministerio de Ciencia e Innovación de España MICINN (proyecto PID2019-104964GB-I00) y por el “VI Plan Propio de Investigación y Transferencia” de la Universidad de Sevilla (España), así como por los grupos de investigación “Investigación en Educación Matemática” (S60_20R) reconocido oficialmente por el Gobierno de Aragón y “Grupo de Investigación en Educación Matemática” (FQM226) reconocido oficialmente por la Junta de Andalucía.

DECLARACIÓN DE CONTRIBUCIÓN DE LOS AUTORES

Los autores AG y AA-B discutieron juntos la metodología, la base teórica, la recogida y análisis de datos y los resultados y contribuyeron por igual a la versión final del artículo.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos que respaldan los resultados de este estudio serán proporcionados por el autor de correspondencia, AA-B, previa solicitud razonable.

REFERENCIAS

Alguacil, M., Boqué, M. C. y Pañellas, M. (2016). Dificultades en conceptos matemáticos básicos de los estudiantes para maestro. *International Journal of Developmental and Educational Psychology INFAD, 1*, 419-429. http://dx.doi.org/10.17060/ijodaep.2016.n1.v1.162

Arnal-Bailera, A. y Oller-Marcén, A. M. (2017). Formación del Profesorado y Demostración Matemática. Estudio Exploratorio e Implicaciones. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *31*(57), 135-157. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a07

Bate, F. (2010). A bridge too far? Explaining beginning teachers' use of ICT in Australian schools. *Australasian Journal of Educational Technology*, *26*(7), 1042-1061. https://doi.org/10.14742/ajet.1033

Bate, F. G., Day, L. y Macnish, J. (2013). Conceptualising Changes to Pre-Service Teachers’ Knowledge of how to Best Facilitate Learning in

Mathematics: A TPACK Inspired Initiative. *Australian Journal of Teacher Education*, *38*(5), 14-30. http://ro.ecu.edu.au/ajte/vol38/iss5/2

Behr, M. J., Harel, G., Post, T. y Lesh, R. (1993). Rational numbers: Toward a semantic analysis-emphasis on the operator construct. En T.P. Carpenter, E. Fennema y T. A. Romberg (Eds.), *Rational Numbers: An Integration of Research* (pp. 13-47). Lawrence Erlbaum.

Beltrán-Sánchez, J. A., García, R. I., Ramírez-Montoya, M. S. y Tánori, J. (2019). Factores que influyen en la integración del Programa de Inclusión y Alfabetización Digital en la docencia en escuelas primarias. *Revista Electrónica de Investigación Educativa, 21*(1), 1-11. https://doi.org/10.24320/redie.2019.21.e31.2088

Borasi, R. (1986). On the nature of problems. *Educational studies in mathematics*, *17*(2), 125-141. https://doi.org/10.1007/BF00311517

Cabero, J. (2014). Formación del profesorado universitario en TIC. Aplicación del método Delphi para la selección de los contenidos formativos. *Educación XX1, 17*(1), 111-132. http://hdl.handle.net/11441/16394

Castellanos, A., Sánchez, C. y Calderero, J. F. (2017). Nuevos modelos tecnopedagógicos. Competencia digital de los alumnos universitarios. *Revista electrónica de investigación educativa, 19*(1), 1-9. http://dx.doi.org/10.24320/redie.2017.19.1.1148

Charalambous, C. Y., Hill, H. C. y Ball, D. L. (2011). Prospective teachers' learning to provide instructional explanations: how does it look and what might it take? *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*(6), 441-463. https://doi.org/10.1007/s10857-011-9182-z

Clarke, M. D., Roche, A. y Mitchell, A. (2008). Ten practical tips for making fractions come alive and make sense. *Mathematics Teaching in the Middle School, 13*(7), 372-380. https://www.nctm.org/Publications/Mathematics-Teaching-in-Middle-School/2008/Vol13/Issue7/Ten-Practical-Tips-for-Making-Fractions-Come-Alive-and-Make-Sense/

Cózar, R., Zagalaz, J. y Sáez, J. (2015). Creando contenidos curriculares digitales de ciencias sociales para educación primaria. Una experiencia TPACK para futuros docentes. *Educatio Siglo XXI, 33*(3), 147-168. https://doi.org/10.6018/j/240921

Dockendorff, M. y Solar, H. (2018). ICT integration in mathematics initial teacher training and its impact on visualization: the case of GeoGebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *49*(1), 66-84. https://doi.org/10.1080/0020739X.2017.1341060

Durdu, L. y Dag, F. (2017). Pre-Service Teachers' TPACK Development and Conceptions through a TPACK-Based Course. *Australian Journal of Teacher Education,* *42*(11), 150-171. http://dx.doi.org/10.14221/ajte.2017v42n11.10

Edmonds, W. A. y Kennedy, T. D. (2017). *An applied reference guide to research designs: Qualitative, quantitative and mixed methods*. SAGE.

Erdogan, A. y Sahin, I. (2010). Relationship between math teacher candidates' technological pedagogical and content knowledge (TPACK) and achievement levels. *Procedia-Social and Behavioral Sciences, 2*(2), 2707-2711. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2010.03.400

Ertmer, P. A. (1999). Addressing first- and second-order barriers to change: Strategies for technology integration. *Educational Technology Research and Development,* *47*(4), 47-61. https://doi.org/10.1007/BF02299597

Escolano, R. y Gairín, J. M. (2005). Modelos de medida para la enseñanza del número racional en educación primaria. *Unión, 1*, 17-35. http://www.fisem.org/www/union/revistas/2005/1/Union_001_006.pdf

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Reidel.

Gairín, J. M. (2001). Sistemas de representación de números racionales positivos: un estudio con maestros en formación. *Contextos Educativos, 4*, 137-159. http://dx.doi.org/10.18172/con.490

Gairín, J. M. y Muñoz, J. M. (2005). El número racional positivo en la práctica educativa: Estudio de una propuesta editorial. En *IX Simposio SEIEM*. http://www.seiem.es/docs/comunicaciones/GruposIX/pna/gairinmunoz.pdf

Kaplon-Schilis, A. y Lyublinskaya, I. (2019). Analysis of relationship between five domains of TPACK framework: TK, PK, CK Math, CK Science, and TPACK of pre-service special education teachers. *Technology,* *Knowledge and Learning, 25,* 25-43. https://doi.org/10.1007/s10758-019-09404-x

Kieren, T. (1980). The rational number construct — its elements and mechanisms. En T. E. Kieren (Ed.), *Recent research on number learning* (pp. 125-149). ERIC/SMEAC. https://eric.ed.gov/?id=ED212463

Kushner, S. N. y Ward, C. L. (2013). Teaching with technology: Using TPACK to understand teaching expertise in online higher education. *Journal of Educational Computing Research, 48*(2), 153-172. https://doi.org/10.2190/EC.48.2.c

Ljajko, E. (2016). Does the problem complexity impact students' achievements in a computer aided mathematics instruction? *Teaching of Mathematics, 19*(1), 41-55. http://www.teaching.math.rs/cap/browse.php?p=TM191

Martínez-Juste, S., Muñoz-Escolano, J. M., Oller-Marcén, A. M. y Ortega, T. (2017). Análisis de problemas de proporcionalidad compuesta en libros de texto de 2º de ESO. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 20*(1), 95-122. http://dx.doi.org/10.12802/relime.17.2014

Mishra, P. y Koehler, M. (2006). Technological pedagogical content knowledge: a framework for teacher knowledge. *Teachers college record, 108*(6), 1017-1054. https://www.tcrecord.org/content.asp?contentid=12516

Morales-López, Y. (2019). Conocimientos que evidencian los futuros profesores cuando realizan una tarea que involucre geometría, enseñanza y uso de tecnologías. *Acta Scientiae, 21*(2), 75-92. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.v21iss2id5081

Mouza, C., Karchmer-Klein, R., Nandakumar, R., Ozden, S. Y. y Hu, L. (2014). Investigating the impact of an integrated approach to the development of preservice teachers' technological pedagogical content knowledge (TPACK). *Computers & Education, 71*, 206-221. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2013.09.020

Niess, M. L., Ronau, R. N., Shafer, K. G., Driskell, S. O., Harper S. R., Johnston, C., Browning, C., Özgün-Koca, S. A. y Kersaint, G. (2009). Mathematics teacher TPACK standards and development model. *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education, 9*(1), 4-24. https://www.citejournal.org/volume-9/issue-1-

09/mathematics/mathematics-teacher-tpack-standards-and-development-model

Olive, J. y Vomvoridi, E. (2006). Making sense of instruction on fractions when a student lacks necessary fractional schemes: The case of Tim. *Journal of Mathematical Behavior, 25*, 18-45. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2005.11.003

Özgün-Koca, S. A., Meagher, M. y Edwards, M. T. (2010). Preservice teachers' emerging TPACK in a technology-rich methods class. *The Mathematics Educator, 19*(2), 10-20. http://tme.journals.libs.uga.edu/index.php/tme/article/view/210

Piñeiro, J. L., Castro-Rodríguez, E. y Castro, E. (2019). Concepciones de profesores de primaria sobre problemas matemáticos, su resolución y enseñanza. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 16*, 57-72. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i16.253

Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado*. Madrid, 1 de marzo de 2014, núm. 52, pp. 19349-19420. https://www.boe.es/buscar/act.php?id=BOE-A-2014-2222

Ruíz de Gauna, J., García, J. y Sarasua, J. (2013). Perspectiva de los alumnos de grado de educación primaria sobre las matemáticas y su enseñanza. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 82*, 5-15. http://www.sinewton.org/numeros/numeros/82/Volumen_82.pdf

Shield, M. y Dole, S. (2013). Assessing the potential of mathematics textbooks to promote deep learning. *Educational Studies in Mathematics, 82*(2), 183-199. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9415-9

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14. https://doi.org/10.3102/0013189X015002004

Simon, M. A., Placa, N., Avitzur, A. y Kara, M. (2018). Promoting a concept of fraction-as-Measure: a study of learning through activity. *Journal of Mathematical Behavior, 52*, 122-133. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.03.004

Tsai, C. C. y Chai C. S. (2012). The "third"-order barrier for technology-integration instruction: Implications for teacher education.

Australalasian Journal of Educational Technology, 28(6), 1057-1060. https://doi.org/10.14742/ajet.810