ACTA SCIENTIAE

ISSN: 2178-7727
DOI: 10.17648/acta.scientiae.6205

Rede de Conhecimentos Especializados Ativados em Formação Docente para Responder a um Porquê Matemático sobre Divisão de Frações

Jeferson Gomes Moriel Junior[a]

[a] Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso (IFMT), Cuiabá, MT, Brazil.

Recebido para publicação 18 out. 2020. Aceito, após revisão, 25 mar. 2021
Editor designado: Claudia Lisete Oliveira Groenwald

RESUMO

Contexto: Uma das formas de tentar dar conta da complexidade inerente à docência é avançar na compreensão das relações entre os diversos tipos conhecimentos utilizados em situações de prática docente. **Objetivo**: Caracterizar conhecimentos docentes especializados e suas conexões estabelecidas num contexto formativo de elaboração de uma resposta para estudantes sobre o porquê inverter-e-multiplicar para dividir frações. **Design**: Estudo qualitativo analítico-descritivo, associando o Mathematics Teachers' Specialized Knowledge (MTSK) e uma formação ancorada em situação de prática docente. **Ambiente e Participantes**: Uma oficina formativa para professores de ensino básico e licenciandos em Matemática, da qual aprofundamos neste artigo análise dos dados de dois participantes (um licenciando e uma professora). **Coleta e análise de dados**: Obtivemos dados durante a oficina e a entrevista com os sujeitos e utilizamos na análise de conteúdo, o instrumento de análise iMTSK, o MTSK Cluster e a Rede de MTSK ativado para descrever as conexões entre conhecimentos. **Resultados**: A rede ativada contém conhecimentos de todos os subdomínios MTSK, exercendo diferentes níveis de protagonismo e papéis (desde a ação em si até seu apoio/sustentação). A rota de construção da resposta partiu de uma camada matemática em direção a elementos didáticos, refletindo o nível de desenvolvimento (incluindo lacunas) dos sujeitos sobre justificativas de algoritmos e aspectos didáticos. **Conclusão**: Uma ação docente aparentemente simples (responder uma dúvida discente na escola) mobilizou todos os subdomínios MTSK e ativou uma intrincada rede de conexões, indicando a necessidade de preparação docente ser especializada, fundamentada e intencional.

Palavras-chave: MTSK; rede de conhecimentos especializados; formação docente; porquês matemáticos; divisão de frações.

Autor correspondente: Jeferson Gomes Moriel Junior. Email: jeferson.moriel@cba.ifmt.edu.br

Specialized Knowledge Network Activated in Teacher Education to Answer a Mathematical Why about Fraction Division

ABSTRACT

Background: One of the ways to try to account for the complexity inherent in teaching and advance in understanding the relationships between the different types of knowledge used in practice practices. **Objective**: To characterize specialized teaching knowledge and its specific characteristics in a formative context of preparing a response for students on why inverter-and-multiply to divide fractions. **Design**: Qualitative analytical-descriptive study, associating the Mathematics Teachers' Specialized Knowledge (MTSK) and a training anchored in a teaching practice situation. **Setting and participants**: A training workshop for mathematics teachers and prospective teachers, from which we have in-depth analysis of the data of two participants in both level in this article (a graduate student and a teacher). **Data collection and analysis**: We obtained data during the workshop and an interview with the subjects and used content analysis, the MTSK analysis instrument, the MTSK Cluster and the MTSK Network diagram enabled to describe between knowledge. **Results**: The activated network contains knowledge from all MTSK subdomains, exercising different levels of protagonism and roles (from the action itself to its support). The route of construction of the answer started from a mathematical layer towards didactic elements, reflecting the level of development (including gaps) of the subjects on justifications of algorithms and didactic aspects. **Conclusion**: A seemingly simple teaching action (answering a student question) mobilized all the MTSK subdomains and activates an intricate procurement network, necessarily the need for specialized, reasoned and intentional teaching preparation.

Keywords: MTSK; specialized knowledge network; mathematics education; why mathematics; division of fractions.

INTRODUÇÃO

Este artigo faz parte de um estudo amplo no qual temos investigado o conjunto de conhecimentos especializados de professores que são necessários para ensinar e fazer aprender determinados conteúdos de Matemática, como construí-lo em formação (inicial ou continuada) com base em avanços científicos. No recorte que apresentamos aqui, destacamos o conteúdo de divisão de frações, tendo em vista que dentre as operações com frações, a divisão tem sido considerada a mais mecânica e menos compreensível por professores e alunos (Lopes, 2008; Newton, 2008; Özel, 2013).

Estudos antecedentes apontam que professores e licenciandos tem tido melhor desempenho na proposição de soluções didáticas aos problemas oriundos da prática e ampliam seu conhecimento procedimental e conceitual sobre divisão de frações quando envolvidos em contextos formativos em grupo, inclusive de curta duração (Tirosh, 2000; Green et al., 2008), baseados em pesquisas, incluindo materiais, problemas e representações (Sharon & Swarthout, 2014). Um desses problemas inerentes à prática é dar respostas às diferentes perguntas de alunos (Nicol, 1998; Doerr, 2006; Leikin et al., 2017), incluindo "por quês matemáticos"[1], como é o foco deste artigo: *Por que inverter-e-multiplicar para dividir frações*? Nestas situações, o professor deve não só conhecer a justificativa matemática em si, como também saber ensiná-la respeitando o nível do aluno (Peterson, 1972; Lorenzato, 1993; Nobre, 1996; Moriel Junior & Wielewski, 2013; Leikin et al., 2017). Entretanto, há indicativos de que geralmente existem lacunas de conhecimento e formação docente (Lorenzato, 1993; Fiorentini, 2005; Santos, 2005; Angelo et al., 2009) e que é comum professores apresentarem erros e dificuldades semelhantes às dos alunos (Bayoud, 2011; Özel, 2013; Slattery & Fitzmaurice, 2014).

Mapeamentos da literatura indicam que o conhecimento docente relativo à divisão de fração tem sido caraterizado a partir de vários marcos teóricos e em diversas situações, como por exemplo, durante planejamento de aulas ou disciplinas de graduação (Petit et al., 2010; Fávero & Pina Neves, 2012; Moriel Junior et al., 2019). Uma das formas de tentar dar conta da complexidade inerente à docência é avançar na compreensão das conexões entre os diversos tipos conhecimentos de conteúdo e didáticos (Aguilar, 2016; Moriel Junior & Moral, 2017; Zakaryan & Ribeiro, 2017). Por isso, neste artigo o objetivo é caracterizar conhecimentos docentes especializados e suas conexões estabelecidas num contexto formativo de elaboração de uma resposta para alunos sobre o porquê inverter-e-multiplicar para dividir frações.

Para tanto, realizamos uma pesquisa qualitativa e o marco teórico *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge* – MTSK para analisar o conhecimento de um licenciando e uma professora de Matemática em uma oficina formativa. Na próxima seção apresentamos o referido marco teórico.

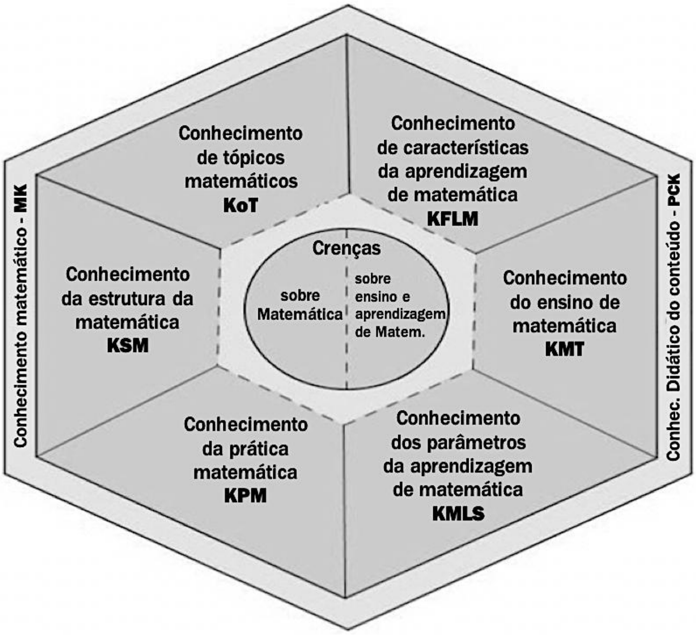
[1] Entendido aqui como as perguntas (em forma de por quês) e respectivas respostas (porquês) que professores necessitam conhecer para justificar procedimentos matemáticos e seus resultados (Lorenzato, 1993; Moriel Junior & Wielewski, 2013).

MARCO TEÓRICO

O MTSK é um modelo teórico que descreve o conhecimento profissional específico e especializado que possui (ou deve possuir) um professor para ensinar matemática (Carrillo et al., 2014; Carrillo-Yañez et al., 2018). Considerando as principais caracterizações, tipologias e modelos feitos por pesquisadores da área e avançando em relação aos limites neles detectados (Escudero et al., 2012; Montes et al., 2013; Kilpatrick & Spangler, 2015; Scheiner et al., 2017), este modelo foi constituído com dois domínios: Conhecimento matemático e Conhecimento pedagógico do conteúdo. Cada um deles está dividido em três subdomínios, apresentados na Figura 1 com as siglas originais da Língua Inglesa, propostas em Carrillo et al. (2014). No centro do modelo estão as crenças sobre a Matemática, seu ensino e aprendizagem, as quais permeiam os subdomínios.

Figura 1

Domínios e subdomínios do MTSK traduzido (Moriel Junior & Wielewski, 2017, p. 130)



O primeiro subdomínio do Conhecimento matemático, é o Conhecimento de tópicos (KoT). Ele abarca conteúdos a serem ensinados, sua fundamentação conceitual profunda (Ma, 1999) e seus diferentes aspectos, como as definições, interpretações e propriedades de conceitos, uma ou mais demonstrações de um tópico, justificativas de procedimentos algorítmicos, exemplos e contraexemplos, modelos realísticos, situações de aplicação e usos extra matemáticos. Inclui conhecer os diferentes algoritmos e procedimentos alternativos para dividir frações e suas justificativas (Moriel Junior et al., 2019), os conceitos de relação e de função de 1º grau separadamente, bem como, conhecer que a definição do último é determinada pelo anterior, o que se configura como uma conexão intraconceitual (Vasco et al., 2017).

No Conhecimento da estrutura matemática (KSM) estão as conexões interconceituais entre tópicos avançados e elementares, prévios e futuros, de diferentes áreas matemáticas, exceto as de fundamentação previstas em KoT, que permitem reconhecer estruturas da Matemática, bem como, vê-la como um sistema de elementos integrados (Carrillo et al., 2018). As conexões entre dois conceitos podem promover aumento de complexidade, a simplificação de um com outro, o uso de um na solução de outro ou possuir aspectos transversais em comum (Vasco et al., 2017). Um exemplo deste tipo de conexão é conhecer que o conceito de limite de funções pode ser utilizado para justificar a indeterminação da divisão 0/0 (Lima, 1982).

O Conhecimento da prática matemática (KPM) inclui os modos de definir e demonstrar em Matemática. Trata-se dos processos de criar ou produzir na área (conhecimento sintático), de aspectos da comunicação matemática, raciocínio e prova, elementos que estruturam uma demonstração, modos de selecionar representações, de argumentar, de generalizar e explorar padrões e regularidades. Este conhecimento é útil ao professor, por exemplo, para lidar com as soluções criadas pelos estudantes (Cano & Flores, 2019) quando são envolvidos em atividades de buscar padrões e regularidades para resolver problemas e elaborar constructos matemáticos, definições ou provas.

Dentre os subdomínios do Conhecimento didático do conteúdo, há o Conhecimento do ensino de matemática (KMT). Ele diz respeito a materiais, recursos, modos de apresentar um conteúdo e suas características (limitações e potencialidades existentes em si mesmos) que permitem ao professor optar por uma estratégia para ensinar certo conteúdo (incluindo organizar uma série de exemplos ou criar analogias e metáforas). Por exemplo, conhecer a estratégia de ensinar frações utilizando uma figura geométrica (circular ou retangular) ou um modelo (como pizzas ou chocolates) e saber que isto é (mais) adequado para desenvolver a interpretação parte-todo (Moreira & Ferreira, 2008). Inclui o conhecimento formal ou pessoal de elementos teóricos sobre o ensino de Matemática, os tipos de explicações instrucionais (Charalambous et al., 2011) ou abordagens baseadas em resolução de problemas ou modelagem (Krulik & Reys, 1998; Biembengut & Hein, 2007).

O Conhecimento das características de aprendizagem de Matemática (KFLM) inclui como os alunos aprendem os conteúdos matemáticos (modelos e teorias formais ou pessoais), as características desse processo de compreensão, erros comuns e suas fontes prováveis, dificuldades, obstáculos e a linguagem normalmente usada pelos aprendizes ao lidar com cada conceito. São exemplos a teoria APOS, a teoria de Van Hiele para conceitos geométricos, as seis etapas de aprendizagem matemática de Dienes, erros comuns de estudantes ao lidarem com frações (Ashlock, 2006; Bayoud, 2011) ou ainda, interesses e expectativas discentes (Kaur, 2008).

O Conhecimento dos parâmetros da aprendizagem de Matemática (KMLS) se refere a especificações curriculares envolvendo o que está previsto em cada etapa escolar em termos de conteúdos e competências (conceituais, procedimentais, atitudinais e de raciocínio matemático nos diversos momentos educativos), normas mínimas e as formas de avaliação que possibilitam a progressão de um ano para outro, objetivos e escala de desempenho em um país (Lacerda et al., 2020).

A construção de conhecimentos especializados provém tanto de fontes científicas – como livros de conteúdo e didáticos, revistas e artigos científicos, metaanálises, legislações, políticas, currículos dentre outros (Courant & Robbins, 1996; Petit et al., 2010; Becker, 2019; Moriel Junior et al., 2019; Silva & Fonseca, 2019; Valente et al., 2020) –, quanto de fontes profissionais advindos da cultura escolar, proveniente, por exemplo, da experiência e diálogo com outros docentes.

Os subdomínios MTSK, conforme exposto nesta seção, mostram-se eficientes na tarefa de descrever o conhecimento especializado de um professor de Matemática, inclusive se compara a outras tipologias. Além disso, a clareza na definição de seus elementos e a não ambiguidade entre eles, fazem com que possamos utilizá-los como categorias na análise dos nossos dados. Por isso, a perspectiva teórica do MTSK também é adotada como ferramenta metodológica, detalhada a seguir.

METODOLOGIA

O estudo adota uma abordagem qualitativa, com enfoque analítico-interpretativo (Bogdan & Biklen, 1991) sobre a mobilização de conhecimento docente especializado, com as seguintes fases:

- Coleta de dados durante uma Oficina formativa;
- Análise de evidências e identificação de indícios de conhecimento;
- Coleta de dados por meio de entrevista individual sobre os indícios;
- Análise de conhecimento explorando a conversão (ou não) dos indícios em evidências.

São indícios de conhecimento os elementos verbais, escritos ou atitudinais de manifestação do sujeito que sugerem ao pesquisador a possibilidade de determinado conhecimento ter sido mobilizado, mas sem fornecer informação suficiente e explícita que garanta sua ocorrência.

O percurso completo de pesquisa, incluindo a exploração de evidências e indícios, fez com que surgissem oportunidades para indagar se o sujeito possui tal conhecimento ou não e pudesse fornecer um ganho significativo na amplitude, profundidade e confiabilidade dos resultados.

O contexto desta pesquisa é uma das Oficinas formativas fundamentadas (Kilpatrick et al., 2001; Barbosa, 2011; Olanoff, 2011; Moriel Junior & Wielewski, 2013) realizadas pelo autor para professores e futuros professores de Matemática participantes do Projeto "Observatório da Educação" (OBEDUC UFMT, Cuiabá financiado pela CAPES-INEP-SECADI) sobre a seguinte situação de prática: o que você responderia a um estudante que perguntasse sobre o porquê de se inverter-e-multiplicar para dividir frações? Dentre os participantes das oficinas, quatro foram selecionados como sujeitos da pesquisa mais ampla (Moriel Junior, 2014), da qual é discutido neste artigo um recorte dos dados contemplando dois sujeitos: um licenciando e uma professora[2]. O licenciando estava na etapa final do curso e tinha dois anos e meio de experiência de ensino em escolas como substituto e estagiário, tendo

---

[2] Os participantes desta pesquisa assinaram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) e o projeto coletou dados antes da configuração de comitê de ética na instituição em atendimento à Resolução CNS nº 466/2012. O autor assume e exime a revista Acta Scientiae de quaisquer consequências decorrentes, incluindo a plena assistência e eventual ressarcimento a danos resultantes a quaisquer dos participantes da pesquisa, de acordo com a Resolução nº 510, de 07 de abril de 2016, do Conselho Nacional de Saúde do Brasil.

trabalhado com o conteúdo de frações e operações com frações nos níveis de Ensino Fundamental e Médio. A professora, Licenciada em Matemática, com mais de dez anos de experiência no Ensino Básico e com pós-graduação *latu sensu* na área.

Quanto à coleta de dados, os instrumentos utilizados durante a Oficina (Fase 1) foram observação participante, gravação audiovisual e fotos dos registros escritos pelos sujeitos na lousa. Posteriormente, na Fase 3, utilizamos as gravações em áudio e fotos dos manuscritos dos sujeitos durante as entrevistas semiestruturadas, em que foram feitas questões específicas para explorar os indícios detectados na fase anterior (Fase 2 – análise de evidências e indícios). Adotamos as etapas e os procedimentos de entrevista reflexiva (Szymanski, Almeida, & Pradini, 2011), incluindo perguntas complementares (de esclarecimento, focalizadoras ou de aprofundamento), como por exemplo: O que isto significa para você?; Aqui você mencionou que...; Fale mais sobre...; Por que você pensa que... (Isiksal & Cakiroglu, 2011).

Na análise dos dados utilizamos a técnica de análise de conteúdo (Krippendorff, 1990) das transcrições da oficina e da entrevista para obter as unidades de informação (trechos de manifestações dos sujeitos) e comparamos sistematicamente com as definições dos subdomínios do modelo MTSK. Classificamos as unidades conforme categorias MTSK com o *instrumento de análise MTSK – iMTSK* (Tabela 1) e exploramos analiticamente os conhecimentos e descrevemos as relações entre eles.

Tabela 1

Instrumento de análise MTSK – iMTSK

Dados	**Análise do pesquisador**		
Manifestação do sujeito	**O sujeito manifestou conhecimento...**	**associado a...**	**que consiste em...**
Trecho do episódio (Fonte, linha ou página)	[subdomínio]	[categoria]	[síntese do conhecimento][a]
[Exemplo] A aula de resolução de problemas termina quando eu sistematizo o conceito de Princípio	*do ensino de matemática (KMT)*	*Teorias de ensino*	*uma das etapas da metodologia 'resolução de problemas' para ensinar o 'Princípio fundamental da*

fundamental da contagem a partir das soluções dos alunos sobre combinar calças e camisas. (Professora, 3-5)	*contagem': sistematização do conceito 'a partir das soluções dos alunos sobre [o problema de] combinar calças e camisas'*

Nota: a. Inicia-se com um artigo (definido ou indefinido) ou um numeral (indicando a quantidade de conhecimentos), seguido pelo elemento central do conhecimento identificado (que não é uma ação), validando-o com citação dos dados. Cada trecho pode conter um ou mais conhecimentos, de um ou mais subdomínios e categorias, indicando suas conexões.

Neste artigo, selecionamos um episódio extraído da Oficina (sobre como responder o porquê da divisão de frações) a partir do qual buscamos evidências e indícios de conhecimento (Moriel Junior & Carrillo, 2014). Um episódio corresponde a um fragmento com princípio e fim reconhecível, com uma sequência de ações que o configura e tem um sentido completo em si mesmo (Carrillo et al., 2013). Os dados da entrevista foram úteis para compreender se e como os indícios se converteram em evidências.

Os conhecimentos foram codificados com a letra 'c', a numeração e o subdomínio MTSK ao qual pertence, por exemplo: (c1, KSM) e (c6, KMT) meramente ilustrativos.

Para a descrição das conexões entre conhecimentos, adotamos o *MTSK Cluster* e o diagrama de *Rede de MTSK ativado*, desenvolvidos exclusivamente para este trabalho. O primeiro deles é baseado em mapas conceituais e os conhecimentos são representados em formato hexagonal, dispostos lado a lado, com breve descrição da evidência, com indicação do sentido em que foram conectados, bem como, com o nível de protagonismo de seu uso (numa escala que vai da ação até o apoio na ação). O segundo é inspirado na ideia de redes neurais para representar as conexões entre os dois sujeitos analisados considerando os subdomínios MTSK mobilizados. Ambos permitem uma visão integrada do que e de como um grupo docente mobilizou conhecimentos especializados.

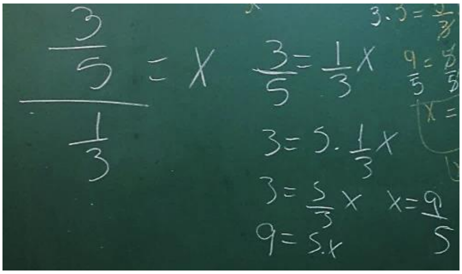
RESULTADOS E DISCUSSÃO

Apresentamos a seguir os resultados, iniciando pela análise de evidências e indícios de conhecimento e, depois, a análise de conexões entre os conhecimentos mobilizados conjuntamente durante a formação docente.

Durante a Oficina, o licenciando foi até a lousa para apresentar o modo que, segundo ele, acabara de pensar sobre como justificar a um aluno de 6º ano do Ensino Fundamental o porquê de inverter-e-multiplicar na divisão de frações, conforme exposto na Figura 2.

Figura 2

Primeira parte do Episódio de justificativa do inverter-e-multiplicar para dividir frações

Licenciando	Cria outras perguntas o método. Geraria outra pergunta, outro porquê. Vejamos, uma fração [$\frac{3}{5}$] dividida por outra fração [$\frac{1}{3}$] é igual a *x*. Nessa divisão [imagem ao lado],  esse número do denominador [$\frac{3}{5}$] que está dividindo vai passar multiplicando. Aí vai gerar a pergunta: por que passa multiplicando? [Escreve enquanto fala:] Três quintos igual um terço de *x*. Esse aqui está dividindo e vai passar multiplicando. Então, três é igual a cinco vezes um terço de *x*. Aí vai ficar: 3 igual a cinco terços de *x*. Vai passar esse aqui ficar três vezes três. Nove igual a cinco *x*. O cinco passa dividindo de novo. E *x* é igual a nove sobre cinco. É aquele método de o que está dividindo passa multiplicando e o que está multiplicando passa dividindo. Então essa aqui [$\frac{1}{3}$ da divisão inicial] está dividindo, certo? Então eu passei multiplicando o *x*, ficou $\frac{1}{3}$ de *x*. Aí, o 5 está dividindo, então eu passei pra lá multiplicando e ficou 5 vezes $\frac{1}{3}$ de *x*. Que ficou $\frac{5}{3}$ de *x*. Aí eu preciso isolar o *x*. Então o 3 volta pra cá, vai ficar 9 igual a 5*x*. O 5 está multiplicando, passa dividindo. Vai ficar *x* igual a 9 sobre 5.

Professora	Que na realidade o 5 debaixo ficou multiplicando o 1 de cima. E o 3 de cima está multiplicando o 3 debaixo.
Licenciando	Que é o processo lá de multiplicar cruzado [se referindo a $\frac{3}{5} \div \frac{1}{3} = \frac{3 \cdot 3}{5 \cdot 1}$].
Investigador	E aí você conseguiu explicar o algoritmo inverter-e-multiplicar?
Licenciando	É. Pois é, gerou outra pergunta, mas...

O primeiro conhecimento que se destaca é o de uma representação (simbólica) para a divisão de frações: $\frac{\frac{3}{5}}{\frac{1}{3}}$ como divisão indicada entre duas frações, ou seja, com um traço maior entre dividendo e divisor (c1, KoT). Ele foi utilizado para criar uma equação por meio da qual se obteria o resultado da divisão: 'uma fração dividida por outra fração é igual a x' (4ª frase do episódio). Assim, o licenciando mostrou conhecer uma conexão interconceitual (c2, KSM), em que um tópico matemático (equação) auxilia na obtenção do resultado de outro (divisão de frações). Tal conhecimento foi o ponto de partida da argumentação que permitiu justificar ao grupo o algoritmo inverter-e-multiplicar e as regras mnemônicas para dividir as frações: multiplicar em cruz e a regra do Sanduíche ($\left[\frac{\frac{3}{5}}{\frac{1}{3}}\right] = \frac{9}{5}$). Logo, temos que ele conhece uma justificativa de procedimentos para dividir frações, a qual se baseia na resolução de uma equação (c3, KoT) utilizando a regra mnemônica 'passa pra lá' (c4, KoT).

Considerando que tal justificativa acabara de ser pensada pelo sujeito, o que há no episódio é a construção de uma argumentação matemática em que subjaz o conhecimento de um esquema de prova pré-formal numérica (c5, KPM), ainda que o sujeito não saiba denominá-lo desta forma. Trata-se também da abordagem instrucional adotada por ele para lidar com a situação de prática (sobre como responder a um estudante que perguntasse sobre o porquê de se inverter-e-multiplicar para dividir frações). Identificamos, assim, um conhecimento do ensino de matemática (c6, KMT) que consiste em uma explicação instrucional (Charalambous et al., 2011) baseada na argumentação de que o resultado da divisão $\frac{3}{5} \div \frac{1}{3}$, representada por $\frac{\frac{3}{5}}{\frac{1}{3}}$, corresponde a um valor x que satisfaz $\frac{3}{5} = x \cdot \frac{1}{3}$ e que implica $x = \frac{3 \cdot 3}{5 \cdot 1}$ por meio da aplicação de regras mnemônicas (passar multiplicando ou dividindo). Embora pondere que tais regras possam gerar dúvida ao estudante (por que passa pra lá?), ele conclui a sistematização da multiplicação cruzada para dividir frações ($\frac{3}{5} \div \frac{1}{3} = \frac{3 \times 3}{5 \times 1} = \frac{9}{5}$).

Para aprofundar na compreensão desta explicação instrucional, exploramos na entrevista alguns indícios de conhecimentos associados, pois vimos que na primeira e na última fala do Episódio, o licenciando expressa preocupação com o fato de sua abordagem poder gerar uma dúvida sobre uma regra mnemônica: por que 'passa pra lá'? Isto significa o conhecimento de uma característica da referida abordagem instrucional (c7, KMT). Ele parece antever uma consequência didática, algo que poderia estar associado ao conhecimento de dificuldades de aprendizagem (KFLM). Portanto, investigamos este indício na entrevista perguntando se ele considerava o 'passa pra lá' gerador de dificuldade, obstáculo ou barreira para o aluno aprender.

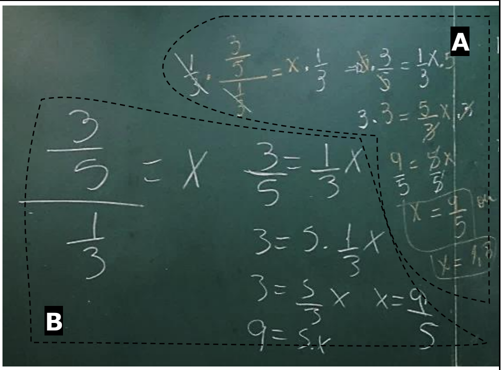
A resposta do licenciando indicou que esta regra em si não é um problema, porém se o aluno não tiver uma compreensão mais profunda (a justificativa do procedimento) ele poderá cometer o erro de não utilizar a operação inversa para 'passar para o outro lado' da equação (c8, KFLM). Ele exemplifica isso mostrando o erro '$\frac{3}{2} = x + 3 \leftrightarrow 3 = x + 3 - 2$' e explicando que o aluno 'acha que a [operação] inversa da divisão vai ser a subtração'. Para ele trata-se de uma confusão dos alunos, cuja fonte provável do erro é falta de conhecimento conceitual adequado que deve incluir entendimento 'do que está sendo feito' (ou seja, a justificativa da regra) e conhecer as operações inversas (c9, KFLM). Acrescenta que para ajudar o estudante a superar este erro um professor 'deve reforçar com os detalhes, que são as propriedades, mostrar o que é inversa, quais operações são inversas' (c10, KMT).

Por fim, o licenciando usou o exemplo do Episódio $\frac{\frac{3}{5}}{\frac{1}{3}} = x$ para mostrar que 'ao invés de você fazer [a multiplicação por $\frac{1}{3}$ em ambos os lados], $\frac{1}{3} \cdot \frac{\frac{3}{5}}{\frac{1}{3}} = x \cdot \frac{1}{3} \leftrightarrow \frac{3}{5} = \frac{1}{3}x$, você pode [passar o $\frac{1}{3}$ multiplicando:] $\frac{3}{5} = \frac{1}{3}x$. Isto diminui o processo. Economiza tinta, tempo. Facilita'. Com isso, ele mostra que conhece uma justificativa aritmética da regra 'passa pra lá' (c11, KoT) baseada no princípio multiplicativo da igualdade (c12, KoT), ou seja, numa propriedade matemática (importante enquanto objeto de ensino) que auxilia na simplificação e resolução de equações ao estabelecer que multiplicar ou dividir por um mesmo número (diferente de zero) os dois membros de uma igualdade resulta em uma nova sentença que ainda é uma igualdade, podendo ser sintetizado como: dado $a \neq 0 \rightarrow (a \times b = a \times c \leftrightarrow b = c)$ (Medeiros, 2009).

Na segunda parte do episódio, a professora parte da argumentação do licenciando escrita na lousa e aprofunda a justificativa da regra mnemônica ‘passa pra lá’ utilizada (Figura 3).

Figura 3

Segunda parte do Episódio de justificativa do inverter-e-multiplicar para dividir frações

Professora	Posso falar sobre isso [explicação do licenciando – parte B da imagem]? [Na lousa, escreve a parte A e diz:]  Eu estou ensinando equações e não quero que eles fiquem nesse passa pra lá, passa pra cá, mas que eles saibam o porquê. Se aqui eu dividi por um terço [$\frac{\frac{3}{5}}{\frac{1}{3}} = x$], então eu vou multiplicar por um terço [em ambos os lados da igualdade].
Licenciando	Ah, a balança! A balança é perfeito!
Professora	Então se tenho a multiplicação de um terço e um terço... É a balança! Então, o que sobrou? $\frac{3}{5}$ e aqui [$\frac{1}{3}x$]. Eu sempre falo que antes é o número e depois a letra. Ficou de novo para eu arrumar. Aqui eu tenho 5 [no denominador], se aqui eu divido por 5 então eu tenho que multiplicar por 5, também, tudo que eu faço de um lado eu faço do outro. [...] Eu vou eliminar isso aqui, porque vai virar 1. Então, 3 é igual... aqui vai ficar 5 (1 vezes 5), porque ele já sabe que multiplica numerador com numerador... Ainda tem um 3 aqui [no denominador]. Se tem um 3 aqui, vou multiplicar por 3 [em ambos os lados]. Fica mais longo, mas ele sabe o que eu estou usando. Então ficou 3 vezes 3, nove. Esse com esse é igual, então vou eliminar [$\frac{5}{\cancel{3}}.x.\cancel{3}$], 5*x*. E agora, tem um 5 multiplicando aqui, eu quero eliminar ele, eu quero o valor do *x*. “Ah professor, então a senhora vai ter que dividir”. Vai dividir por 5 e eu vou balancear

	do outro lado por 5. Daí, 5 por 5 é 1. Eu não preciso escrever o 1. Vai ficar x e 9 dividido por 5. Posso falar que é $\frac{9}{5}$ ou 1,8. Depois com o tempo eles vão saber que tem que balancear mentalmente.
Professora	Estou demorando mais nessa parte pra eles saberem e não ficar esse negócio de passa prá lá, passa pra cá etc. Eu passei por isso: por que o professor falava passa pra lá, passa pra cá? E eu não tinha coragem de perguntar. Na sexta série [7º ano], depois que eu descobri: é o princípio multiplicativo.
Investigador	Com o princípio multiplicativo você justifica o passa pra lá?
Professora	É, o porquê que passa. Se faço de um lado, tenho que fazer do outro.

Do ponto de vista matemático, a professora realizou a mesma justificativa para o inverter-e-multiplicar feita pelo licenciando (c3, KoT), porém de modo mais rigoroso uma vez que a regra mnemônica fui substituída pelo fundamento conceitual respectivo, a propriedade princípio multiplicativo (consoante a c12, KoT). Sua intenção era explicar a resolução da equação de primeiro grau apresentada pelo licenciando, mas, justificando desta vez a regra do 'passa pra lá' (consoante a c11, KoT). Foram mobilizadas representações simbólicas para divisão de frações ($\frac{\frac{3}{5}}{\frac{1}{3}}$ como divisão indicada entre duas frações) (igual a c1, KoT) e, adicionalmente, de número racional (divisão indicada ou decimal, "$\frac{9}{5}$ ou 1,8") (c13, KoT). Do ponto de vista didático, sua manifestação indica consonância com a abordagem instrucional do licenciando (c6, KMT) baseada em argumentação matemática para lidar com a questão da prática (como responder à referida dúvida discente).

A professora aprofunda o papel da multiplicação com frações. No primeiro momento em que isto ocorre, ela disse que o aluno já sabe 'que multiplica numerador com numerador' (2ª fala), demonstrando conhecimento sobre o nível de desenvolvimento procedimental esperado naquele momento instrucional (c14, KMLS). Ela também usa esta operação como um conceito auxiliar para resolver a equação de 1º grau que, por sua vez, permite encontrar a resposta para a divisão de frações. Isto caracteriza um aprofundamento da conexão auxiliar mobilizada pelo licenciando (c2, KSM), ampliando de dois para três conceitos matemáticos interconectados, a saber, multiplicação de frações, equação e divisão de frações, sendo os dois primeiros auxiliares na resolução do último.

Ao refletir sobre todo o processo, a professora argumenta que ‘fica mais longo, mas ele [o aluno] sabe o que estou usando’. Isto demonstra consciência de que usar a propriedade para solucionar a equação amplia o número de etapas se comparado com o uso da regra mnemônica. Trata-se do conhecimento de uma característica desta justificativa: o processo fica mais longo se usarmos o princípio multiplicativo ao invés do ‘passa pra lá’ (c15, KoT). Por outro lado, a última parte da frase (‘[...] mas ele [o aluno] sabe o que estou usando’) evidencia a mobilização de conhecimento de caráter didático, particularmente, relacionado a uma potencialidade enquanto explicação instrucional (c16, KMT): permite expressar com clareza ao aluno *o que* está sendo usado, ou seja, os fundamentos envolvidos incluindo conceitos, propriedades, operações matemáticas etc. Isto é uma potencialidade para a professora, pois ela expressa neste e em outros momentos da argumentação que valoriza a compreensão conceitual dos alunos – ‘mas que saibam o porquê’ (1ª fala); ‘pra eles saberem e não ficar nesse negócio de passa...’ (3ª fala). Com isso, ela faz intencionalmente a opção de ensinar deste modo (usando o princípio multiplicativo), ao invés de outro (usando a regra ‘passa pra lá’).

Por fim, do ponto de vista didático, a professora deixa subentendido que o ensino de equações e suas propriedades (como o princípio multiplicativo) ocorre no 7º ano da educação básica, como realmente está previsto nos parâmetros curriculares vigentes (Brasil, 2019). Ao final da Oficina o grupo é levado a discutir sobre quão adequada a explicação instrucional construída pode ser para alunos de 6º ou 7º ano e a professora manifesta que depende dos ‘conhecimentos prévios e desenvolvimento cognitivo’ da turma. Ainda assim, os resultados são importantes considerando que se trata de conteúdo a ser trabalhado ao longo de todo o Ensino Fundamental (Kilpatrick et al., 2001; Moreira & David, 2005; Lopes, 2008) e mostram que todos os subdomínios MTSK foram mobilizados pelos sujeitos envolvidos na tarefa de responder ao porquê discente (Tabela 2).

Tabela 2

Síntese dos conhecimentos que foram identificados no episódio

Conhecimento de...	**Subdomínio MTSK**
1. uma representação simbólica para divisão de frações: $\frac{\frac{3}{5}}{\frac{1}{3}}$ como divisão indicada entre duas frações, usando um traço maior entre dividendo e divisor	KoT

2. uma conexão entre divisão de frações e equação: este último auxilia a resolução da operação	KSM
3. uma justificativa do algoritmo inverter-e-multiplicar e de regras mnemônicas (multiplicar em cruz e Regra do Sanduíche $\left[\frac{\frac{3}{5}}{\frac{1}{3}}\right] = \frac{9}{5}$) para dividir frações: baseada na resolução de uma equação	KoT
4. a regra mnemônica relativa à resolução de equação de 1º grau: ‘passa pra lá’	KoT
5. um esquema de prova pré-formal numérica (subjacente a argumentação matemática)	KPM
6. uma explicação instrucional ao porquê inverter-e-multiplicar para dividir frações: argumentação de que o resultado da divisão $\frac{3}{5} \div \frac{1}{3}$, representada por $\frac{\frac{3}{5}}{\frac{1}{3}}$, corresponde a um valor x que satisfaz $\frac{3}{5} = x \cdot \frac{1}{3}$ e que implica $x = \frac{3 \cdot 3}{5 \cdot 1}$, obtido pela aplicação de regras mnemônicas (passar multiplicando ou dividindo), justificando assim o algoritmo da multiplicação cruzada para dividir frações ($\frac{3}{5} \div \frac{1}{3} = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{1}$)	KMT
7. característica da abordagem instrucional (c6): pode gerar dúvida sobre o porquê ‘passa pra lá’	KMT
8. um erro comum de estudantes ao aplicarem o ‘passa pra lá’: não utilizar a operação inversa adequada, por exemplo $\frac{3}{2} = x + 3 \leftrightarrow 3 = x + 3 - 2$	KFLM
9. uma fonte provável do erro c8: falta de conhecimento conceitual (incluindo justificativa da regra e operações inversas)	KFLM
10. uma abordagem instrucional para ajudar o estudante a superar o erro c8: reforçar os detalhes que são as propriedades e as operações inversas	KMT
11. uma justificativa aritmética da regra ‘passa pra lá’: baseada no princípio multiplicativo da igualdade	KoT
12. a propriedade princípio multiplicativo da igualdade	KoT
13. duas representações (simbólicas) de um número racional: ‘$\frac{9}{5}$ ou 1,8’ (divisão indicada ou decimal)	KoT
14. um nível de desenvolvimento procedimental esperado para a multiplicação de frações neste momento instrucional: ‘sabe que multiplica numerador com numerador’	KMLS

15.	**uma característica de c3: o processo 'fica mais longo' se usarmos o princípio multiplicativo, ao invés do 'passa pra lá'.**	KoT
16.	**uma potencialidade de c6 enquanto explicação instrucional: permite expressar com clareza ao aluno 'o que' está sendo usado (conceitos, propriedades e operações matemáticas)**	KMT

Em síntese, os resultados até aqui evidenciam que dentre as várias abordagens possíveis de serem utilizadas para lidar com a situação de prática de responder a um aluno o porquê inverter-e-multiplicar para dividir frações - como a manipulação de materiais ou busca de padrões a partir de exemplos ou problemas realísticos, dentre outros (Guerra & Silva, 2008; Li, 2008; Moriel Junior & Wielewski, 2013; Moriel Junior et al., 2019) -, a construída pelos envolvidos foi baseada em argumentação matemática. Trata-se da uma explicação instrucional partindo da premissa de que o resultado da divisão $\frac{3}{5} \div \frac{1}{3}$, representada por $\frac{\frac{3}{5}}{\frac{1}{3}}$, corresponde a um valor *x* que satisfaz $\frac{3}{5} = x \cdot \frac{1}{3}$ e que após a aplicação de regras (pelo licenciando) ou de propriedades (pela professora) implica $x = \frac{3 \cdot 3}{5 \cdot 1}$, de modo que se chega na sistematização do algoritmo inverter-e-multiplicar ($\frac{3}{5} \div \frac{1}{3} = \frac{3 \times 3}{5 \times 1} = \frac{9}{5}$).

A explicação possui as seguintes características: (i) sua construção ocorreu a partir de uma base matemática (c1, c2, c3 e c4), foi desvelando camadas didáticas (c7, c8, c9, c10, c14 e c16) e novamente matemáticas (c11, c12, c13 e c15); (ii) sua estrutura guarda similaridades à de outras justificativas, como a $\boldsymbol{\frac{a}{b}} \div \boldsymbol{\frac{c}{d}} = \frac{\boldsymbol{\frac{a}{b}}}{\boldsymbol{\frac{c}{d}}} = \frac{\boldsymbol{\frac{a}{b}} \times \boldsymbol{\frac{d}{c}}}{\boldsymbol{\frac{c}{d}} \times \boldsymbol{\frac{d}{c}}} = \frac{\frac{a}{b} \times \frac{d}{c}}{1} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$ e como a baseada em operador $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = K \Rightarrow K \times \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \Rightarrow \left(K \times \frac{c}{d}\right) \times \frac{d}{c} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} \Rightarrow K \times \left(\frac{c}{d} \times \frac{d}{c}\right) = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} \Rightarrow K \times 1 = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} \Rightarrow K = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} \Rightarrow K = \frac{ad}{bc}$ (Li, 2008; Lopes, 2008; Özel, 2013; Moriel Junior et al., 2019); (iii) utiliza um esquema de prova pré-formal numérico, considerado mais acessível a alunos e mais familiar a professores do que justificativas formais (Tirosh, 2000; Barbosa, 2011); (iv) exige dos alunos conhecimento prévio do 6º ano da educação básica - multiplicação de frações, pensamento algébrico elementar e propriedade do princípio multiplicativo da igualdade -, bem como, de 7º ano associado a linguagem algébrica, incógnita e equação (Brasil, 2019).

Diante de todo o cenário apresentado, foi possível chegar às seguintes três conclusões.

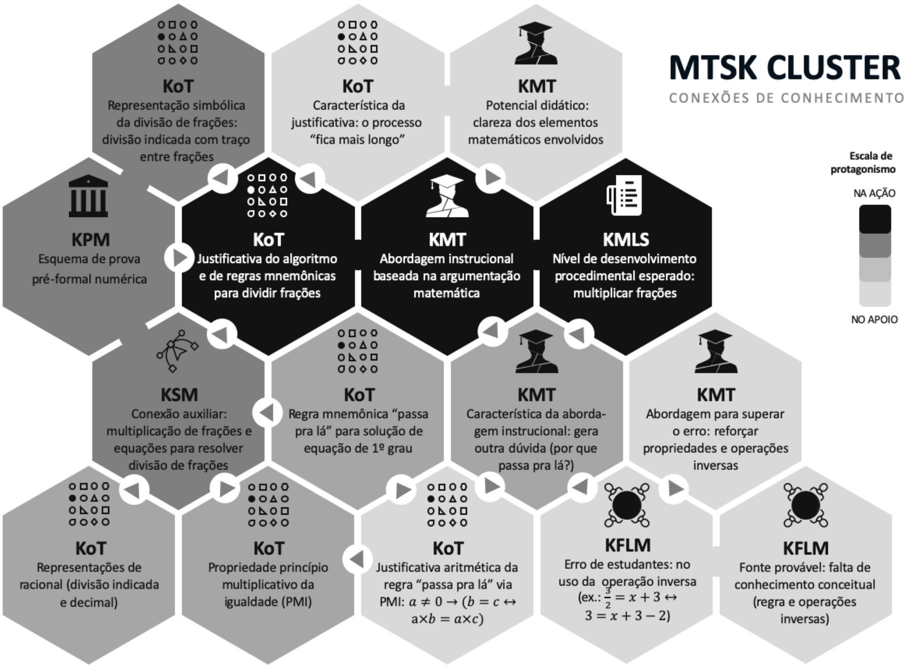
A primeira é que a rede de conhecimentos especializados ativados conjuntamente por um licenciando e uma professora a partir da situação de prática (de responder a um aluno o porquê inverter-e-multiplicar na divisão de frações) conecta elementos de todos os subdomínios MTSK, com diferentes papéis e níveis de protagonismo.

No mapa de conexões *MTSK Cluster* (Figura 4) evidenciamos o modo como os elementos de conhecimento mobilizados variam numa escala que vai desde maior protagonismo na *ação* (em preto) até maior *apoio/sustentação* aos demais (cinza claro). Nele há camadas de elementos (indicadas com cores iguais) que interagem entre si e sustentam as outras camadas mais diretamente ligadas à atuação profissional frente à situação de prática (responder um aluno sobre o porquê da divisão de frações). A camada que exerce maior protagonismo na *ação* possui três elementos centrais – a abordagem instrucional baseada na argumentação matemática (KMT), a justificativa do algoritmo inverter-e-multiplicar (KoT) e o nível de desenvolvimento procedimental que o aluno deve ter para compreendê-la (KMLS) –, para os quais há outras camadas de *sustentação e apoio* (mais claras), incluindo tanto subdomínios didáticos, quanto matemáticos.

Estes resultados estão em consonância a literatura no sentido de que o conhecimento do ensino de matemática (KMT) está relacionado ou é sustentado pelos outros cinco subdomínios MTSK, do domínio do conteúdo (KoT, KPM e KSM) e didático (KFLM e KMLS), reforçando o caráter integrado e interdependente dos conhecimentos especializados (Aguilar, 2016; Moriel Junior & Moral, 2017; Zakaryan & Ribeiro, 2017).

Figura 4

Mapa de conexões de conhecimento especializado na situação de responder a um aluno o porquê inverter-e-multiplicar para dividir frações



A segunda conclusão é que a rota de conhecimentos manifestados conjuntamente por um licenciando e uma professora na construção da resposta ao porquê da divisão de frações partiu de uma camada basicamente matemática (KoT, KPM e KSM) em direção a elementos didáticos (KMT, KMLS e KFLM). Ao se depararem com a situação de prática, os sujeitos buscaram primeiro respondê-la do ponto de vista matemático. Foi secundária e não sistemática a reflexão sobre quão adequada a explicação instrucional poderia ser para o público discente interessado, considerando que se trata de conteúdo de 6º ano do Ensino Fundamental (Brasil, 2019).

Logo, nossos resultados explicitam um foco maior na produção da resposta do que na sua legitimação, diferentemente de outros casos em que os professores consideraram "principalmente, aspectos inerentes a leitura que fazem de seus alunos, para avaliar a possibilidade dessa justificação estabelecer ou não uma interação produtiva no ambiente de sala de aula” (Barbosa, 2011, p. 1).

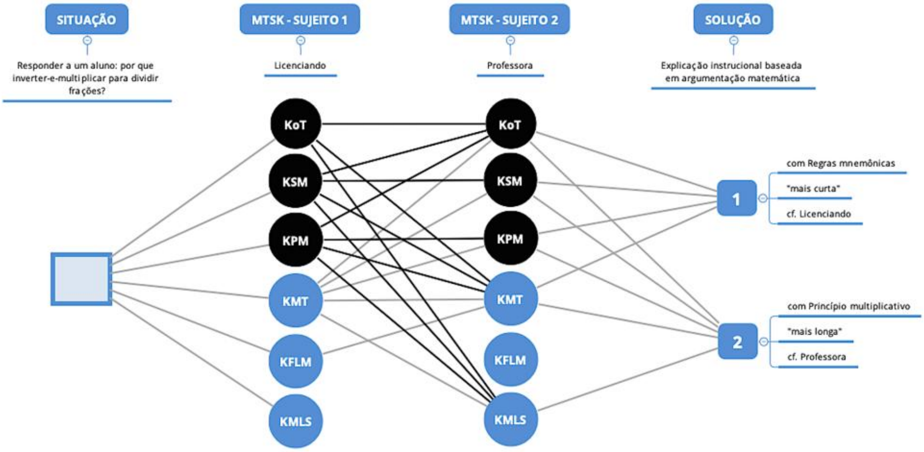
Por outro lado, torna-se compreensível que a situação tenha sido mais desafiadora do ponto de vista matemático considerando que a literatura aponta a existência de lacunas de conhecimento docente sobre divisão de frações (Bayoud, 2011; Özel, 2013; Slattery & Fitzmaurice, 2014). Além disso, historicamente os conteúdos da educação básica (e suas justificativas) tem carecido de uma abordagem sistemática durante a formação inicial, com articulações entre teoria e prática, entre matemática escolar e acadêmica, de modo produtivo para demandas da docência (Santos, 2005; Fürkotter & Morelatti, 2007; Nacarato & Passos, 2007; Moriel Junior & Cyrino, 2009; Fiorentini et al., 2016; Crecci et al., 2017). Essas duas situações ocorreram na formação prévia dos sujeitos da pesquisa, conforme os sujeitos relataram na Oficina.

Tais indícios se refletem na Rede MTSK ativada conjuntamente (Figura 5), cuja rota inicia na mobilização de conhecimentos da dimensão matemática – representações de divisão de frações (KoT), um esquema de prova pré-formal numérica (KPM) e uma conexão entre equação, multiplicação e divisão de frações (KSM) – indo em direção à didática (mas com escassez de aspectos da aprendizagem, KFLM e KMLS).

A rede identificada culmina em duas explicações instrucionais (KMT) baseadas na argumentação matemática, sendo uma ‘menos longa’ (licenciando utilizou a regra mnemônica ‘passa pra lá’) e outra ‘mais longa’ (da professora, com o princípio multiplicativo da igualdade).

Figura 5

Rede de MTSK ativado conjuntamente pelos sujeitos a partir da situação de prática



A terceira conclusão é que uma formação docente especializada tem papel fundamental na construção de conhecimentos que permitam ao professor de Matemática adotar as "melhores estratégias" para lidar com situações de prática docente. Ao mapear as conexões de conhecimento utilizando o MTSK Cluster e a Rede de MTSK ativado reforçamos neste artigo a complexidade e a especificidade do que um professor pode ou deve conhecer para ensinar e fazer aprender Matemática (Aguilar, 2016; Moriel Junior & Moral, 2017; Zakaryan & Ribeiro, 2017). Identificamos que o nível de desenvolvimento (incluindo, as lacunas) que os sujeitos possuíam quanto ao conhecimento sobre *justificativas de algoritmos* de matemática básica, pertencente à categoria *procedimentos* do subdomínio dos tópicos (KoT) do domínio matemático (MK) refletiu-se na configuração das conexões e no tipo de rota percorrida durante a construção da solução ao problema de prática: uma explicação instrucional em forma de argumentação matemática.

Se considerarmos que existem outras formas de responder ao referido por quê matemático de alunos (Guerra & Silva, 2008; Li, 2008; Moriel Junior & Wielewski, 2013; Moriel Junior et al., 2019), umas mais adequadas do que outras para determinadas circunstâncias ou etapas escolares, é plausível afirmar que cada uma delas pode gerar (ou ter como pano de fundo) outras redes e rotas de conhecimentos ativados. Assim, a ação docente de construir soluções didáticas e decidir entre uma e outra não dependem de dom, vocação ou algum tipo de “notório saber” de conteúdo, mas sim, de elementos de conhecimento especializado que o permita estabelecer complexas redes fundamentadas e com intencionalidade. Isto demanda uma formação de (futuros) professores com tratamento adequado dos conteúdos da educação básica (domínio matemático) integrado a uma preparação didática em termos de conhecimento sobre ensino (KMT), características (KFLM) e parâmetros de aprendizagem matemática (KMLS) que possam ser utilizados produtivamente em sala de aula. Por exemplo, contemplar na formação elementos formais sobre *boas explicações instrucionais* (Charalambous et al., 2011), incluindo justificações de procedimentos com interação produtiva em sala de aula (Barbosa, 2011), promove um avanço na profissionalização docente especializada para responder a por quês (e outras perguntas) de alunos, incluindo perspectivas que levem o professor a buscar uma abordagem instrucional mais inteligível com base em informações do *background* dos alunos, considerando tipos de materiais, técnicas, atividades, exemplos e nível de concretude/abstração mais adequados para o contexto ou etapa escolar do discente. Neste caso, parece razoável afirmar que a Rede de MTSK ativado (Figura 4) e o mapa de conexões (Figura 5) teria uma configuração com mais ênfase nos subdomínios didáticos do que identificamos na perspectiva baseada na argumentação matemática.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste artigo caracterizamos conhecimentos especializados com ênfase no modo como foram mobilizados e conectados por um licenciando e uma professora durante a elaboração de uma resposta para estudantes sobre o porquê inverter-e-multiplicar para dividir frações durante uma Oficina formativa. Ao identificar tais conhecimentos e mapear as conexões, ficou evidente que o conhecimento do ensino de Matemática (KMT) esteve relacionado ou sustentado pelos outros cinco subdomínios MTSK, do domínio do conteúdo (KoT, KPM e KSM) e didático (KFLM e KMLS), reforçando o caráter integrado e interdependente do conhecimento docente especializado. Em síntese, conseguimos avançar na compreensão de que:

- A rede de conhecimentos ativados a partir da situação de prática (responder a alunos o porquê matemático da divisão de frações) mobilizou e conectou elementos de todos os subdomínios de conhecimento especializado MTSK, exercendo diferentes papéis e níveis de protagonismo, podendo estar mais ligados a ação em si ou ao apoio/sustentação;

- A rota de conhecimentos manifestados na construção da resposta ao porquê da divisão de frações partiu de uma camada basicamente matemática (KoT, KPM e KSM) em direção a elementos didáticos (KMT, KMLS e KFLM) e isto reflete fortemente o nível de desenvolvimento (incluindo lacunas) que os sujeitos possuíam quanto ao conhecimento sobre *justificativas de algoritmos* (KoT), dentre outros aspectos didáticos;
- Uma formação docente especializada tem papel fundamental na construção de uma complexa rede de conhecimentos especializados, fundamentados e com intencionalidade que permita ao professor de Matemática adotar as “melhores estratégias” para lidar com situações de prática docente (incluindo responder a alunos).

Os resultados apresentam diversos elementos sobre a complexidade e diversidade do conhecimento docente especializado, sobre como podem estar relacionados a outros (a Rede MTSK ativado), sobre possíveis reflexos disso na prática e implicações para a formação docente. Diversos estudos têm mostrado a importância da discussão dos porquês matemáticos na formação docente, entretanto, nosso trabalho vai adiante por analisar a situação do ponto de vista do conhecimento especializado focando nas conexões envolvidas.

A ação de responder a um aluno, que no senso comum pode parecer muito simples, exige uma elaborada rede de conhecimentos profissionais no âmbito da educação. Constatamos que se pode explorar e desenvolver todos os subdomínios de conhecimento especializado de professores de Matemática a partir da elaboração de respostas focadas na compreensão do aluno. Para tanto, a formação tem papel de extrema importância neste processo, pois o nível de desenvolvimento (e lacunas) de conhecimento do (futuro) professor é a linha tênue que separa dar respostas que promovem ou não uma interação produtiva ou não com alunos.

Parece razoável que este trabalho possa interessar a formadores, professores e licenciandos que buscam ferramentas para refletir sobre sua prática e torná-la mais fundamentada em ciência, a partir das categorias do MTSK, dos elementos de conhecimento aqui encontrados e suas conexões sobre como responder ao porquê matemático da divisão de frações. As ferramentas metodológicas que foram publicadas pela primeira vez neste artigo (o *MTSK Cluster* e a *Rede de MTSK ativado*) podem ser de interesse a pesquisadores que investiguem conexão entre conhecimentos especializados.

Nossos resultados podem ter aplicações na preparação docente por trazer elementos de todos os subdomínios MTSK úteis para guiar uma (auto)formação ou (auto)reflexão especializada com foco em situações didáticas de responder estudantes, incluindo os por quês. Tais elementos podem se materializar em perguntas-guia do tipo: 1. Que conhecimento ou capacidades se espera que o aluno já tenha desenvolvido naquele nível de ensino (KMLS)? 2. Que tipo de argumentação/prova (KPM) ou de (contra)exemplos e justificativas eu conheço (KoT)? 3. Que recursos, materiais, metáforas, explicações instrucionais, estratégias e abordagens didáticas conheço e tenho disponíveis para esta situação (KMT)? 4. Que fenômenos e outros elementos matemáticos (como propriedades, definições etc) necessito mobilizar (KoT) e que conexões entre eles são necessárias (KSM)? 5. Qual o nível de adequação de tudo isso que conheço e tenho disponível para favorecer o processo de aprendizagem do aluno (KFLM)?

Quanto a limitação do trabalho, entendemos que foi possível mapear as conexões de conhecimentos de modo exaustivo, porém não exclusivo, pois temos clareza que a configuração e as rotas encontradas aqui não são as únicas possíveis, estando limitadas aos dados dos sujeitos e seus conhecimentos disponíveis/construídos até aquele momento de suas vidas.

As respostas ao porquê matemática que foram construídas naquele contexto se aproxima mais de uma perspectiva “tradicional” de ensino e, portanto, faz-se necessário outros estudos para compreender as respostas com outras perspectivas. Neste sentido, ficam abertas aos investigadores as perguntas: Que conhecimentos e conexões são necessários a professores para utilizar materiais manipulativos, jogos ou tecnologia para ensinar divisão de frações, seus procedimentos e suas justificativas? Seriam os mesmos encontrados neste artigo, mas conectados diferentemente? Surgiria a dúvida discente sobre o algoritmo *inverter-e-multiplicar* se os alunos fossem envolvidos em um contexto de aprendizagem baseado em problemas de divisão de frações, ou modelagem matemática, ou na busca de padrões a partir de exemplos, números ou formas? O que tudo isto pode implicar para a formação e a melhoria da educação no país?

Seguiremos buscando respostas neste sentido com investigações sobre conjuntos conhecimentos especializados de professores (e suas conexões) necessários para ensinar e fazer aprender conteúdos de Matemática e, também, como construí-los em formação (inicial ou continuada) com base em avanços científicos.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho contou com fomento da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES), da FAPEMAT (Edital Universal 42/2016) e apoio do IFMT (Resolução 10/2015/CONSUP). Em memória ao amigo Prof. Dr. José Carrillo Yañéz, líder do grupo que criou o marco teórico MTSK.

DECLARAÇÃO DE CONTRIBUIÇÃO DOS AUTORES

JGMJ concebeu a ideia do presente trabalho, coletou os dados, desenvolveu a metodologia para análise, analisou os dados e redigiu este artigo.

DECLARAÇÃO DE DISPONIBILIDADE DE DADOS

Os dados que suportam os resultados deste estudo serão disponibilizados pelo autor correspondente, JGMJ, mediante solicitação razoável.

REFERÊNCIAS

Aguilar, A. (2016). *El conocimiento especializado de una maestra sobre la clasificación de las figuras planas. Un estudio de caso* (220 f.). Tese de doutorado, Educação Matemática, Universidade de Huelva, Huelva.

Angelo, C. L., dos Santos, J. R. V., & Melão, W. S. (2009). Licenciandos em Matemática e Situações da Matemática Escolar: um Estudo Exploratório sobre a Formação Inicial de Professores de Matemática. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, *2*(3), 41-59. http://revistas.utfpr.edu.br/pg/index.php/rbect/article/view/552

Ashlock, R. B. (2006). *Error patterns in computation: Using error patterns to improve instruction*. Pearson Education.

Barbosa, E. P. (2011). Os Por Quês Matemáticos dos Alunos na Formação dos Professores. In: *Anais da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática*, Recife (pp. 1-12).

Bayoud, J. M. (2011). *A comparison of preservice and experienced elementary teachers' pedagogical content knowledge (PCK) of* *common error patterns in fractions* (180 f.). Tese de Doutorado, American University of Beirut, Beirut. https://scholarworks.aub.edu.lb/bitstream/handle/10938/8658/t-5470.pdf?sequence=1

Becker, F. (2019). Construção do Conhecimento Matemático: natureza, transmissão e gênese. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 33*(65), 963-987. https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n65a01

Biembengut, M. S., & Hein, N. (2007). *A resolução de problemas na matemáticas escolar* (4 ed.). Contexto.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1991). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto Editora.

Brasil. (2019). *Base Nacional Comum Curricular*. MEC. 600 p. http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf

Cano, M. C., & Flores, E. (2019). Prácticas matemáticas: un avance en su caracterización. In: *Actas del IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas*, Huelva (pp. 87-94).

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., Montes, M. Á., Escudero, D., & Medrano, E. F. (2014). *Un marco teórico para el Conocimiento especializado del Profesor de Matemáticas*. Universidad de Huelva Publicaciones. https://doi.org/10.13140/2.1.3107.4246

Carrillo, J., Rojas, N., & Flores, P. (2013). Caracterización del conocimiento matemático para la enseñanza de los números racionales. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *1*(4), 47-64. http://www.aiem.es/index.php/aiem/article/viewFile/74/28

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M., & Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teachers' specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Carvalho, A. M. P. d. (1996). O uso do vídeo na tomada de dados: pesquisando o desenvolvimento do ensino em sala de aula. *Pro-Posições*, 7(19), 5-13.

http://www.proposicoes.fe.unicamp.br/~proposicoes/textos/19_artigo_carvalhoamp.pdf

Charalambous, C. Y., Hill, H. C., & Ball, D. L. (2011). Prospective teachers' learning to provide instructional explanations: how does it look and what might it take? *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*, 441-463.

Courant, R. & Robbins, H. (1996). *What is mathematics?: an elementery approach to ideias and methods* (2 ed.). Oxford University Press.

Crecci, V. M., Nacarato, A. M., & Fiorentini, D. (2017, 04/30). Estudos do estado da arte da pesquisa sobre o professor que ensina matemática. *Zetetiké*, *25*(1), 1-6. https://doi.org/10.20396/zet.v25i1.8649175

Doerr, H. M. (2006, 2006/06/01). Teachers' ways of listening and responding to students' emerging mathematical models. *ZDM*, *38*(3), 255-268. https://doi.org/10.1007/BF02652809

Escudero, D. I., Flores, E., & Carrillo, J. (2012). El Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas. In: *XV Escuela de Invierno en Matemática Educativa*, México (pp. 35-42).

Fávero, M. H. & Pina Neves, R. d. S. (2012). A divisão e os racionais: revisão bibliográfica e análise. *Zetetiké*, *20*(1), 39-78. http://www.fae.unicamp.br/zetetike/viewarticle.php?id=553

Fiorentini, D. (2005). A formação Matemática e didático-pedagógica nas disciplinas da Licenciatura em Matemática. *Revista de educação*(18), 107-115.

Fiorentini, D., Passos, C. L. B., & Lima, R. C. R. (2016). *Mapeamento da pesquisa acadêmica brasileira sobre o professor que ensina Matemática: Período 2001 a 2012*. FE-Unicamp. https://www.fe.unicamp.br/pf-fe/pagina_basica/58/e-book-mapeamento-pesquisa-pem.pdf

Fürkotter, M. & Morelatti, M. R. M. (2007). A articulação entre teoria e prática na formação inicial de professores de matemática. *Educação Matemática Pesquisa*, *9*(2), 319-334. http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/viewArticle/906

Green, M., Piel, J. A., & Flowers, C. (2008). Reversing Education Majors' Arithmetic Misconceptions with Short-Term Instruction Using

Manipulatives. *Journal of Educational Research*, *101*(4), 234-242. https://doi.org/http://dx.doi.org/10.3200/JOER.101.4.234-242

Guerra, R. B. & Silva, F. H. S. d. (2008). As Operações com Frações e o Princípio da Contagem. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *21*(31), 41-54. http://www.redalyc.org/pdf/2912/291221883004.pdf

Kaur, B. (2008/12/01). Teaching and learning of mathematics: what really matters to teachers and students? *ZDM*, *40*(6), 951-962. https://doi.org/10.1007/s11858-008-0128-6

Kilpatrick, J., & Spangler, D. A. (2015). Educating Future Mathematics Education Professors. In: L. D. English & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (3. ed., pp. 297-310). Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203448946

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. National Academies Press. http://www.sjsd.k12.mo.us/cms/lib3/MO01001773/Centricity/Domain/872/Adding%20it%20Up.pdf

Krippendorff, K. (1990). *Metodología del análisis de contenido*. Paidós Ibérica.

Krulik, S. & Reys, R. E. (1998). *A resolução de problemas na matemáticas escolar* (1 ed.). Atual.

Lacerda, H. D. G., Cabanha, D. S. C., & Maltempi, M. V. (2020). *Formação inicial de professores de matemática em diversos países*. Livraria da Física.

Leikin, R., Koichu, B., Berman, A., & Dinur, S. (2017, 2017/03/01). How are questions that students ask in high level mathematics classes linked to general giftedness? *ZDM*, *49*(1), 65-80. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0815-7

Li, Y. (2008). What Do Students Need to Learn about Division of Fractions? *Mathematics teaching in the middle school*, *13*(9), 546-552. https://doi.org/http://www.jstor.org/stable/41182613

Lima, E. L. (1982). Conceitos e controvérsias: alguns porquês. *Revista do Professor de Matemática*, *1*(1), 4-7.

Lopes, A. J. (2008). O que nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre frações, quando tentamos lhes ensinar frações. *Bolema: Boletim* *de Educação Matemática*, *21*(31), 1-22. https://doi.org/https://www.redalyc.org/pdf/2912/291221883002.pdf

Lorenzato, S. (1993). Os "Por quês" matemáticos dos alunos e as respostas dos professores. *Pro-Posições, 4*(1), 73-77.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics*: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States: Lawrence Erlbaum Associates Mahwah, NJ.

Medeiros, V. Z. (2009). *Pré-cálculo* (2 ed ed.). Cengage Learning.

Montes, M. A., Contreras, L. C., & Carrillo, J. (2013). Conocimiento del profesor de matemáticas: Enfoques del MKT y del MTSK. In: A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa, & N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 403-410). SEIEM.

Moreira, P. C. & David, M. M. M. S. (2005). O conhecimento matemático do professor: formação e prática docente na escola básica. *Revista Brasileira de Educação, 11*(28), 50-62. http://www.scielo.br/pdf/rbedu/n28/a05n28.pdf

Moreira, P. C. & Ferreira, M. C. C. (2008). A Teoria dos Subconstrutos e o Número Racional como Operador: das estruturas algébricas às cognitivas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 21*(31), 103-127. http://www.redalyc.org/pdf/2912/291221883007.pdf

Moriel Junior, J. G. (2014). *Conhecimento especializado para ensinar divisão de frações* (162 f.). Tese de doutorado, Educação Matemática, Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá. http://www.ufmt.br/ufmt/unidade/userfiles/publicacoes/79e3fe1d66c40ff5d174dc92c84fc777.pdf

Moriel Junior, J. G. & Carrillo, J. (2014). Explorando indícios de conhecimento especializado para ensinar matemática com o modelo MTSK. In: *Seminário de Investigación en Educación Matemática XVIII*, Salamanca, Espanha (pp. 1-10).

Moriel Junior, J. G. & Cyrino, M. C. C. T. (2009). Propostas de articulação entre teoria e prática em cursos de licenciatura em matemática. *Educação Matemática Pesquisa, 11*(3), 535-557. http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/viewArticle/2831

Moriel Junior, J. G. & Moral, G. C. Y. (2017). Conhecimentos especializados para ensinar adição de frações e como se relacionam: um caso sobre erros comuns de estudantes, suas fontes e modos de superá-los. In: *Anais do Congresso Internacional de Ensino de Matemática*, Canoas (pp. 1-12).

Moriel Junior, J. G., & Wielewski, G. D. (2013). Seis possibilidades de resposta para o por quê matemático sobre divisão de frações. In: *Seminário Educação - SEMIEDU*, Cuiabá (pp. 1 - 15).

Moriel Junior, J. G., & Wielewski, G. D. (2017). Base de conhecimento de professores de matemática: do genérico ao especializado. *Revista de Ensino, Educação e Ciências Humanas, 18*(2), 126-133. https://doi.org/10.17921/2447-8733.2017v18n2p126-133

Moriel Junior, J. G., Wielewski, G. D., & Carrillo, J. (2019). Meta-análise sobre conhecimento para ensinar divisão de frações. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 33*(65), 988-1026. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v33n65a02

Nacarato, A. M., & Passos, C. L. B. (2007). As licenciaturas em matemática no estado de São Paulo. *Horizontes*, *25*(2), 169-179. http://www.saofrancisco.edu.br/edusf/publicacoes/RevistaHorizontes/uploadAddress/Horizontes_25_n2%5B8498%5D.pdf#page=39

Newton, K. J. (2008). An Extensive Analysis of Preservice Elementary Teachers' Knowledge of Fractions. *American Educational Research Journal*, 45(4), 1080-1110. https://doi.org/10.3102/0002831208320851

Nicol, C. (1998, 1998/10/01). Learning to Teach Mathematics: Questioning, Listening, and Responding. *Educational Studies in Mathematics, 37*(1), 45-66. https://doi.org/10.1023/A:1003451423219

Nobre, S. (1996). Alguns "porquês" na História da Matemática e suas contribuições para a Educação Matemática. *Caderno CEDES - História e Educação Matemática*, *40(1)*, 29-35.

Olanoff, D. E. (2011). *Mathematical Knowledge for Teaching Teachers: The Case of Multiplication and Division of Fractions* (236 f.). Tese de doutorado, Syracuse University, New York. http://surface.syr.edu/mat_etd/64/

Özel, S. (2013). An Analysis of In-service Teachers' Pedagogical Content Knowledge of Division of Fractions [Article]. *Anthropologist*, *16*(1-2), 1-5. https://doi.org/10.1080/09720073.2013.11891330

Peterson, J. C. (1972). Fourteen different strategies for multiplication of integers or why (- 1)(- 1)=+ 1. *The Arithmetic Teacher*, *19*(5), 396-403.

Petit, M. M., Laird, R. E., & Marsden, E. (2010). *A focus on fractions: bringing research to the classroom*. Routledge.

Santos, R. C. (2005). *Conteúdos matemáticos da educação básica e sua abordagem em cursos de licenciatura em matemática* (200 f.). Tese de doutorado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUC, São Paulo.

Scheiner, T., Montes, M. A., Godino, J. D., Carrillo, J., & Pino-Fan, L. R. (2019). What Makes Mathematics Teacher Knowledge Specialized? Offering Alternative Views. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 17(1), 153–172. http://doi.org/10.1007/s10763-017-9859-6

Sharon, V. V., & Swarthout, M. B. (2014). Evaluating instruction for developing conceptual understanding of fraction division. In G. T. Matney & S. M. Che (Eds.), *Proceedings of the 41th Annual Meeting of the Research Council on Mathematics Learning* (pp. 97-104). RCML. http://web.unlv.edu/RCML/RCML%20Proceedings(2014)%20Final.pdf#page=104

Silva, L. P., & Fonseca, L. S. (2019). Analysis of textbooks of Mathematics in relation to the Disposition of Tasks in the light of Attention as a Neurocognitive Mechanism. *Acta Scientiae*, *21*(4), 160-173. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.v21iss4id3887

Slattery, J., & Fitzmaurice, O. (2014). 'Ours is not to reason why, just invert and multiply': an insight into Irish prospective secondary teachers' conceptual understanding of the division of fractions. *Irish Educational Studies*, *33*(4), 467-488. https://doi.org/10.1080/03323315.2014.982346

Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: The case of division of fractions. *Journal for Research* *in Mathematics Education*, *31*(1), 5-25. https://eric.ed.gov/?id=EJ602442

Valente, W. R., Almeida, A. F. d., & Silva, M. C. (2020). Knowledge in (Trans)Training and the Role of Experts: Curricula, Mathematics Education and Teacher Training, 1920-2020. *Acta Scientiae*, *22*(5), 65-83. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.6004

Vasco, D., Moriel Junior, J. G., & Contreras, L. C. (2017). Subdominios KoT y KSM del Mathematics Teachers' Specialised Knowledge (MTSK): definición, categorías y ejemplos. In: *Actas de las III Jornadas de Investigación en Didáctica de las Matemáticas*, Huelva (pp. 29-37).

Zakaryan, D., & Ribeiro, M. (2017). Conocimiento de la enseñanza de números racionales: una ejemplificación de relaciones. *Zetetiké*, *24*(3), 301-321.