

# Invariantes Operatorios e Instrumentalización del Artefacto Recorrido de Estudio e Investigación para la Escuela Secundaria: un Estudio de Caso

Verónica Parra <sup>a</sup>  
María Rita Otero <sup>a</sup>

<sup>a</sup> Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNCPBA), Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECyT), Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Tandil, Argentina.

*Recibido para su publicación 5 oct. 2020. Aceptado tras revisión 6 ago. 2021*  
*Editora designada: Claudia Lisete Oliveira Groenwald*

## RESUMEN

**Contexto:** uno de los desafíos de la actividad de un profesor consiste en utilizar, asimilar y adaptar los recursos que tiene disponibles y con los cuales gestará la enseñanza funcional de un saber matemático. **Objetivo:** nos interesamos en el proceso de instrumentalización a partir del cual una profesora de matemática utiliza y asimila un nuevo artefacto: un recorrido de estudio e investigación (REI) sobre el funcionamiento de las antenas parabólicas. **Diseño:** Se trata de un estudio de caso. **Ambiente y participantes:** una profesora experimentada y el grupo de estudiantes de la escuela secundaria francesa (estudiantes de 15-16 años). **Recolección y análisis de datos:** formulaciones del REI, registros y transcripciones de dos entrevistas efectuadas a la profesora previo y posterior, respectivamente, a la implementación del REI, registro en vídeo del desarrollo de 8 sesiones de clases. **Resultados:** a partir del enfoque instrumental y de la definición de invariante operatorio (IO) de Vergnaud, identificamos y clasificamos en cuatro tipos los IO, que guían la actividad matemática y didáctica de la profesora cuya meta es lograr que el dispositivo REI funcione en un curso de matemática: vinculados a las ayudas al estudio, al conocimiento matemático (explicitado en el programa oficial), al tiempo (controlado por parte del profesor) y al profesor. **Conclusiones:** Los IO no son absolutos. La situación, la institución, la acreditación, la calificación, etc. se combinan para que la profesora utilice IO asociados a una enseñanza clásica. El proceso de instrumentalización produce un instrumento que se aleja del artefacto REI inicial.

**Palabras clave:** invariantes operatorios; recorrido de estudio e investigación.

---

Autora correspondiente: Verónica Parra. Email: [yparra@niecylt.exa.unicen.edu.ar](mailto:yparra@niecylt.exa.unicen.edu.ar)

## Operational Invariants and Instrumentalization of the Artefact Study and Research Course for Secondary School: A Case Study

### ABSTRACT

**Context:** one of the challenges of a teacher's activity consists of using, assimilating and adapting the resources available to him and with which he will develop the functional teaching of mathematical knowledge. **Objective:** we are interested in the instrumentalization process from which a mathematics teacher uses and assimilates a new artefact: a study and research course (SRC), about parabolic antennas. **Design:** this is a case study. **Setting and Participants:** an experienced teacher and the group of French high school students (students are 15-16 years old). **Data collection and analysis:** SRP formulations, records and transcripts of two interviews with the teacher before and after, respectively, the implementation of the SRC, and video recording of the development of 8 class sessions. **Results:** based on the instrumental approach and Vergnaud's definition of operational invariants (OI), we identify and classify OI into four types, which guide the mathematical and didactic activity of the teacher, whose goal is that the SRC works in a course of Mathematics: OIs related to study aids, OIs related to mathematical knowledge (specified in the official program), OIs related to didactical time (controlled by the teacher) and OIs related to the teacher. **Conclusions:** OIs are not absolute. The situation, the institution, the accreditation, the mark, etc., they are combined so that the teacher uses IOs associated with a classical teaching. The instrumentalization process produces an instrument distanced from the initial SRC artefact.

**Keywords:** operational invariants; study and research course.

### INTRODUCCIÓN

Saber actuar y saber decir en una situación son aspectos muy complejos e interrelacionados en el proceso de construcción del conocimiento. La teoría de los Campos Conceptuales (Vergnaud, 1990, 1998, 2013) propone la existencia de dos formas del conocimiento en permanente interacción y no en oposición, la forma operatoria y la forma predicativa y afirma que el conocimiento no puede reducirse ni a una forma, ni a la otra.

El *enfoque instrumental* fue propuesto por Pierre Rabardel (1995) a partir de la Teoría de la Actividad (Vygotsky, 1978) de la Teoría de los Campos Conceptuales (TCC) y se introduce y desarrolla en el campo de la didáctica profesional y de la ergonomía. Cuando un sujeto se encuentra en una situación de tipo laboral, que demanda una actividad dirigida a una meta, necesita interactuar con artefactos, entendidos como dispositivos generados por la actividad humana, ya sean estos de tipo didáctico, máquinas, etc. Este tipo de interacciones hacen que el sujeto desarrolle un instrumento, que se compone

del artefacto más un esquema (Vergnaud, 1998, 2013) de uso de dicho artefacto. De esta forma, el instrumento obtenido como producto de esas interacciones es un instrumento nuevo que puede o no, coincidir con el manipulado inicialmente por el sujeto.

Un instrumento no se desarrolla de un solo golpe, sino a través de un proceso denominado génesis instrumental. Esta génesis comprende dos procesos interrelacionados. Se llama *instrumentalización* al proceso según el cual el sujeto asimila el artefacto, a partir de los esquemas que ya posee. Es decir, aquí prevalece el sujeto que se apropia del artefacto, a partir de lo que él sabe previamente. Por ejemplo, diferentes profesores, con el mismo dispositivo didáctico *recorrido de estudio e investigación* (REI, Chevallard, 2004) y metas similares pueden generar instrumentalizaciones que por su parte producen instrumentos (REI) diferentes. Simultáneamente, ocurre otro proceso que se denomina *instrumentación*, durante el cual predominan las características y peculiaridades del artefacto y en consecuencia el sujeto debe adaptar sus esquemas, es decir debe modificarlos. Estos procesos son dialécticos y no terminan nunca. Por más pericia que un profesional posea en el uso de un instrumento, siempre le será posible incrementarla, desarrollando aspectos nuevos. Esto es particularmente cierto en la vida profesional de un profesor. En consecuencia, para identificar instrumentos e instrumentaciones es fundamental poder describir las modificaciones que ocurren en los esquemas y los invariantes operatorios (IO) son la forma metodológicamente más económica para acceder al esquema Vergnaud (1998, 2013).

En este trabajo, nos interesamos en el proceso de uso y asimilación de un nuevo artefacto didáctico implementado por una profesora de matemáticas que intenta desarrollar un REI sobre el funcionamiento de las antenas parabólicas (Bellenué, et.al, 2014). En consonancia con lo mencionado por Vergnaud (1998, 2013) en líneas anteriores, nos centramos en identificar y detallar los IO que guían la actividad matemática y didáctica de esta profesora, cuya meta es hacer funcionar el REI en un curso de matemática de la escuela secundaria francesa (estudiantes de 15-16 años). En Gueudet, Lebaud, Otero y Parra (2018) publicamos otro aspecto de este trabajo: el trabajo documental que la profesora realiza al implementar el REI. En dicho trabajo nos enfocamos en las interacciones específicas entre la profesora y los recursos (sistema de recursos) cuando implementa el artefacto. Si bien allí se hace alguna referencia a los invariantes operatorios, no se detalla cómo estos fueron inferidos ni cómo se generó la tipología, que se presenta aquí.

## **MARCO TEORICO**

El marco teórico es la Teoría de los Campos Conceptuales (TCC), centrándonos en la noción de invariantes operatorios. El enfoque instrumental y la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) se relacionan con la consideración de un tipo particular de “artefacto” (REI) y del proceso de instrumentalización que se realiza con él. La TCC es el referente principal porque nos interesa el nivel del sujeto que aprende, no como una “persona” en particular sino en tanto sujeto epistémico y social, que asimila un artefacto a sus esquemas de acción. Para este nivel de análisis, la TCC es resulta más funcional que la TAD, donde el nivel personal resulta más desdibujado y requiere adoptar constructos cuestionables como las denominadas “praxeologías personales”, que a nuestro juicio carecen de sustento, porque el nivel praxeológico es de carácter social y por ejemplo no permite explicar la asimilación que la profesora hace del artefacto REI.

### **Forma operatoria y predicativa del conocimiento**

Vergnaud (1990, 1998, 2007, 2013) propone la existencia de dos formas del conocimiento en permanente interacción y no en oposición, la forma operatoria y la forma predicativa. La forma operatoria es la que permite al sujeto actuar con cierto suceso en una situación. Según Vergnaud (2013) es un hecho muy positivo que se le otorgue gran importancia a la forma operatoria del conocimiento (Otero, 2019). Pero esto no disminuye la importancia de la forma predicativa, cuya función va desde identificar los objetos del mundo y reconocerlos hasta enunciar lo que hacemos, generar textos e incluso libros sobre cómo se hacen ciertas cosas. Para la enseñanza y el aprendizaje es muy importante tomar en cuenta que el conocimiento comienza mucho antes de que se sea capaz de ponerlo en palabras. La TCC es una teoría pragmática de la conceptualización de lo real que ofrece instrumentos teóricos para analizar la actividad del sujeto en situación, la forma de la actividad, lo que se conserva y lo que cambia, los esquemas que el sujeto pone en juego, y las condiciones pragmáticas y epistémicas que producen el aprendizaje, la conceptualización y el desarrollo en un cierto dominio.

### **Situaciones, esquemas, actividad e invariantes operatorios**

Para estudiar el aprendizaje de un dominio específico, se necesita establecer de una manera precisa, una relación con esa porción de lo real, que

se manifiesta en una situación, en “une tâche” (tarea). La situación, dice Vergnaud (1998, p.8), tiene el carácter de tarea y toda situación compleja puede ser analizada como una combinación de tareas, acerca de las cuales es importante conocer su naturaleza y sus obstáculos. Una situación, representa en realidad a toda una clase de situaciones, con especificidades epistemológicas bien definibles. Los sujetos se adaptan a las situaciones que enfrentan, pero en realidad, son los esquemas que ellos utilizan en la situación, lo que resulta modificado durante la adaptación. Así, una clase de situaciones convoca a ciertos esquemas, que se desarrollan en virtud del tipo de situación.

Entre las cuatro definiciones de esquema propuestas por Vergnaud (1990, 2007, 2013) seleccionamos la siguiente: Un esquema necesariamente está compuesto por cuatro clases de componentes: una meta o varias, sub-metas y anticipaciones, las reglas de acción, de captación y control de la información, los invariantes operatorios (conceptos en acto y teoremas en acto) y las posibles inferencias. Un concepto en acto no es un concepto, ni un teorema en acto un teorema strictu sensu. En la ciencia, los conceptos y los teoremas son explícitos y se puede discutir su pertinencia y su verdad. Este no es necesariamente el caso para los invariantes operatorios. Los conceptos y los teoremas explícitos no forman sino la parte visible del iceberg de la conceptualización; pero sin la parte escondida formada por los invariantes operatorios, esta parte visible no sería nada. Estos invariantes operatorios (conceptos en acto y teoremas en acto) son en particular, la base conceptual implícita (o explícita) de los esquemas debido a que permiten seleccionar la información pertinente y, a partir de ella y de la meta a atender, inferir las reglas de acción más adecuadas para abordar una situación (Vergnaud, 1990).

En síntesis, el concepto de esquema es pertinente para los gestos, los razonamientos, las operaciones técnicas y científicas, las interacciones sociales y lingüísticas, la afectividad y las emociones. Todos los registros de la actividad están presentes en las situaciones de trabajo y de formación continua, también en la formación inicial que puede producirse en la escuela.

### **Enfoque instrumental**

El enfoque instrumental (Rabardel, 1995, 2002; Bueno-Ravel & Gueudet, 2013; Gueudet & Trouche, 2008; Trouche, 2016, Trouche, Gueudet, Pepin & Aldon, 2020) ha sido introducido en el campo de la Didáctica Profesional (DP), dentro de la ergonomía cognitiva por Rabardel (2002), basándose en la teoría de la actividad (Vygotsky, 1978) y en la TCC. Este

enfoque propone que cuando un sujeto se encuentra en una situación que demanda una actividad dirigida a una meta, interactúa con artefactos (dispositivos generados por la actividad humana, REI, máquinas, artefactos). Este tipo de interacciones hacen que el sujeto desarrolle un *instrumento* que comprende al artefacto y a un esquema (Vergnaud, 1998, 2013) de uso de dicho artefacto.

El proceso de desarrollo de un instrumento se denomina génesis instrumental. La génesis instrumental comprende dos procesos relacionados. Uno llamado instrumentalización que se refiere a cómo los esquemas que el sujeto ya posee, inciden en la manera en que se apropia –asimila– el artefacto. Por ejemplo, diferentes profesores, con el mismo REI, y metas similares pueden generar instrumentalizaciones y su producto: instrumentos, diferentes. Por su parte, las características del artefacto afectan los esquemas desarrollados por el sujeto, en el trascurso de un proceso denominado instrumentación. La actividad con un artefacto se describe por la evolución de los esquemas del sujeto (Rabardel, 2002). En consecuencia, para identificar instrumentos e instrumentaciones es importante poder describir las modificaciones que ocurren en los esquemas, y según Vergnaud (1998) esto se realiza a partir del análisis de los invariantes operatorios.

### **Recorridos de estudio e investigación (REI)**

La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) define los REI como dispositivos didácticos cuya principal función es proponer el estudio escolar en términos de preguntas, denominadas preguntas generatrices. El tipo de artefacto REI es un artefacto particular. No se trata de un artefacto como podría ser un ejercicio usual de matemática o un electrodoméstico. Las características propias de la manipulación del artefacto REI lo diferencian ampliamente de cualquier otro. Por ejemplo, el inicio y desarrollo del proceso de estudio a partir de preguntas, de preguntas en sentido fuerte, es decir, de una pregunta cuya respuesta no es la elaboración inmediata de un manuscrito, sino que es el resultado de un proceso sostenido en el tiempo, por medio de gestos análogos a los realizados por un investigador. No habría un genuino REI si no se identifican al menos un subconjunto de estos gestos que mencionaremos a continuación. Una descripción detallada, puede encontrarse en Parra y Otero (2018): formular preguntas y construir respuestas, estudiar e investigar, explorar disciplinas y delimitar áreas, entrar y salir de los temas, estudiar lo pertinente, lo necesario, construir el medio de estudio, cooperar y colaborar en

la construcción de respuestas, deconstruir y reescribir respuestas existentes, difundir y recibir respuestas y, analizar y sintetizar.

Al inicio de un REI, hay un análisis previo de la potencialidad de la pregunta abordada. Esta apertura inicial es necesaria para que la pregunta generatriz tenga primacía ante la respuesta que se le debe aportar y no se transforme, como ocurre la mayoría de las veces, en un pretexto para la construcción de los saberes propuestos en los programas oficiales. Y es ésta otra de las características que hacen al REI un tipo de artefacto diferente al de una actividad, problema, ejercicio “tradicional”.

## METODOLOGIA DE LA INVESTIGACION

En Francia existen los denominados Institutos de Investigación en Educación Matemática (IREM). Los IREM están conformados por profesores del nivel secundario interesados en la didáctica de la matemática, y por investigadores del área.

El IREM de Poitiers desarrolló un libro (Bellenoué et al. 2014), destinado a profesores del primer año del nivel secundario francés (estudiantes de 15-16 años), e impulsado por el análisis que Chevallard (2004) realiza respecto a la funcionalidad de la matemática en los sistemas de enseñanza. El libro propone tres preguntas:  $Q_0$ : *¿Cómo funciona una antena parabólica?*  $Q_1$ : *¿Cómo se conectan dos vías de circulación rápida?* y  $Q_2$ : *¿Cómo optimizar una cantidad?* En el caso que nos ocupa, el REI corresponde a la pregunta  $Q_0$ .

La implementación se llevó a cabo en un curso de matemática del liceo francés (estudiantes de 15-16 años) durante 8 sesiones de clases, en el ciclo escolar 2016/2017. En este trabajo no se centra en describir la implementación del REI en el aula sino en usar esos registros para determinar las acciones desarrolladas que se alinean a los invariantes operatorios (IO) inferidos de las entrevistas.

### El caso la profesora<sup>1</sup>

La profesora se desenvuelve en el nivel secundario desde hace más de 35 años y trabaja en equipo con los demás profesores de matemática de la

---

<sup>1</sup> El formulario de consentimiento informado (ICF) no ha sido necesario, así como tampoco la solicitud de una valoración ética pues no se considera a la profesora como

institución. Desde inicio del año académico, todos los profesores de matemática diseñan en conjunto la planificación anual para sus cursos, analizando las continuidades entre cada nivel escolar y cada unidad del programa. Esta planificación contiene los tiempos precisos de duración para cada unidad y las nociones a abordar. Contiene además las fechas de las evaluaciones de unidad cuyas correcciones se realizan entre los diferentes profesores de matemática: el profesor de un curso no corrige las evaluaciones escritas de su curso, sino las de otro profesor. Bajo estas condiciones, la profesora decidió implementar el REI sabiendo que genera cambios en todos los aspectos de la planificación.

La profesora tiene acceso al recurso en papel (Bellenoué et al. 2014), donde se describe el recorrido y una posible manera de implementarlo en el aula. Además, dispone del material digital vinculado al libro disponible, con acceso restringido, en el sitio web del IREM de Poitiers.

La institución tiene una computadora y un cañón instalados permanentemente en cada aula. Además de la pizarra, cuenta con conexión a Internet y con una importante biblioteca. Este equipamiento de aulas es esencial para el desarrollo de un REI. No así, algunas de las restricciones, a las cuales está inmersa de forma involuntaria, la profesora. Algunas se vinculan a la poca documentación acerca de cómo desarrollar un REI en un aula habitual, dentro de los espacios y tiempos delimitados de antemano y con los recursos de los que dispone. Tanto las condiciones como las restricciones influyen el espacio donde la profesora desarrolla sus invariantes operatorios.

### **Registros y recolección de datos**

Respecto al diseño del REI, disponemos de la versión en papel y digital del libro, y del material digital disponible en el sitio web.

Respecto a la implementación del REI, disponemos del registro en audio de dos entrevistas que realizamos a la profesora: una de ellas, previa a la implementación del REI (entrevista 1) y otra, posterior a dicha implementación (entrevista 2); y sus correspondientes transcripciones. A partir de estos registros

---

a una “persona” en sí misma, sino en tanto sujeto epistémico y social. Además, la profesora ha estado al tanto de del destino y análisis de los datos. Eximimos al Acta Scientiae, de cualquier consecuencia derivada de la misma, incluida la asistencia total y eventual compensación por cualquier daño que resulte a cualquiera de los participantes de la investigación, de acuerdo con la Resolución del Consejo No. 510, de 7 de abril de 2016 Junta Nacional de Salud de Brasil.



inferimos los IO, es decir, las afirmaciones de la profesora que consideramos se corresponden a IO. Disponemos del registro en vídeo del desarrollo del REI en el aula y notas de campo. Estos registros son utilizados como soporte de los IO previamente construidos. Contamos con la versión digital del material que la profesora propuso a los estudiantes y de todos los recursos utilizados por ella para seleccionar las actividades adicionales propuestas y utilizadas en clases. Estos registros son utilizados para identificar y describir las modificaciones introducidas por la profesora al artefacto REI y, al igual que los registros del aula, son utilizados como soporte de los IO construidos a partir de las entrevistas.

### **Análisis de datos**

Cada entrevista fue transcripta y segmentada en turnos de habla. En cada transcripción se marcaron las afirmaciones que consideramos vinculadas con posibles invariantes operatorios (IO). Para cada transcripción, se registró el tiempo (en minutos) en el cual se identificó esa proposición, la o las líneas de la transcripción que corresponde a ese segmento de la entrevista y la formulación del posible IO.

Luego de listar los IO construimos la Tabla 1 (Anexo 1) que contempla una clasificación de los IO. La primera columna de esta tabla corresponde al tipo de IO (que detallaremos en la sección relativa a resultados y discusiones); la segunda columna contiene cada IO; la tercera columna, las líneas de la transcripción distinguiendo con un 1 (L1) o 2 (L2) si se trata de una línea de la entrevista 1 o de una línea de la entrevista 2; la cuarta columna contiene las modificaciones y la quinta columna, las sesiones de clase. El objetivo de ambas últimas incorporaciones es identificar las modificaciones realizadas por la profesora, modificaciones a las cuales subyacerían esos IO, y las consecuencias de tales modificaciones durante las sesiones de clases. En lo que respecta a las clases, colocamos en la tabla el número de sesión y la acción desarrollada por la profesora en base a esas modificaciones. Con esto pretendemos mostrar indicios de estos IO no sólo a partir de las entrevistas (desde las cuales los inferimos) sino también a partir de las actividades y demás acciones reflejadas en las modificaciones y en el desarrollo del REI en el aula.

## Tabla 1

### Clasificación de los IO

Tipo de IOi	IOij	Líneas (L1; L2)	Modificaciones	Sesiones de clase
-------------	------	-----------------	----------------	-------------------

## DESCRIPCIÓN DEL REI

La pregunta  $Q_0$ : *¿Cómo funciona una antena parabólica?* se dirige a la construcción de tangentes a una curva a partir de la geometría analítica. El objetivo es introducir el cálculo de tasas de crecimiento que conducen a la noción de derivada. Así, la elaboración de una respuesta a  $Q_0$  permite reencontrar propiedades de la geometría sintética y analítica, de la óptica geométrica y ondulatoria. Es necesario estudiar la reflexión de las ondas electromagnéticas en diferentes superficies para explicar el funcionamiento de diversos equipos de transmisión y de recepción de la luz, esenciales para las comunicaciones actuales; y para otros usos en el dominio de la arquitectura, de los automóviles, de la energía solar, etc. Se explicita en Bellenoué et al. (2014, p.47) que los principales saberes-hacer matemáticos abordados en este primer recorrido son los presentados en la Tabla 2.

## Tabla 2

### Principales saberes-hacer matemáticos

Determinación de	Ecuación de la circunferencia a partir de sus elementos característicos. Ecuación de una recta. Posición relativa de dos rectas. Forma canónica de un trinomio de segundo grado.
Resolución de una ecuación de segundo grado.	
Determinación algebraica de las coordenadas de los puntos de intersección de dos curvas.	
Demostración de que una recta es tangente a: una circunferencia, una parábola, una hipérbola.	

El libro propone el análisis histórico de tangentes a una curva, y el desarrollo de las obras vinculadas a ella. Incluye además, cuestiones de óptica respecto al problema de la reflexión en diferentes superficies, las cuales conducen al estudio de cónicas, y de tangentes a esas curvas. El libro muestra experimentos sobre la reflexión de la luz en diferentes superficies, que conducen a considerar como se produce este fenómeno para diferentes tipos de espejos: cilíndricos, parabólicos o hiperbólicos.

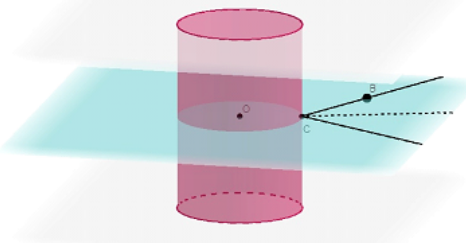
## Figura 1

*Estudio 1, Parte 1* (Bellenoué et al. 2014, p.50)

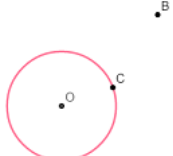
**Estudio 1**  
**Espejo cilíndrico**

**Parte 1:** Construir con regla y el compás.

Un espejo cilíndrico recibe en C un rayo luminoso, originario de B (exterior al espejo) ortogonal al eje del espejo, lo que permite la representación de aquí debajo.



1. Construir el rayo reflejado del rayo (BC). Justificar esta construcción argumentando con la ayuda de la ley óptica nombrada antes.
2. Construir los rayos procedentes de B que no se reflejan.



El libro propone realizar dos investigaciones: una sobre las antenas parabólicas y la otra, sobre la reflexión en un espejo plano. Los objetivos de estas investigaciones son: establecer que la reflexión es especular y depende de la forma de la superficie de reflexión (plana, circular, parabólica, etc.) e insistir en las nociones estudiadas en el curso anterior de Física sobre la ley de reflexión de Descartes, la noción de plano de incidencia y la ley de los ángulos sobre una superficie plana. Luego, propone realizar un estudio denominado “Espejo cilíndrico” (rotulado como “Estudio 1”). Este estudio se compone de un conjunto de tres actividades o “Partes”: Parte 1 titulada “Construcción con regla y compás”; Parte 2, “Rayo reflejado” y la Parte 3 titulada “Rayos no reflejados”. Posteriormente, propone realizar un estudio que se denomina “Espejo

parabólico” (rotulado como “Estudio 2”) y que conduce a formular la noción de tangente a una curva. Consecutivamente propone realizar un ejercicio para finalizar el REI. Este ejercicio muestra la convergencia de los rayos reflejados hacia el foco de la parábola a partir de los rayos incidentes paralelos a su eje. Finalmente, se proponen tres posibles tipos de evaluación escrita.

Respecto al primer estudio, el objetivo de la “Parte 1” (Figura 1) es hacer una construcción en primer lugar, con regla y compás, y, en segundo lugar, con el software GeoGebra.

Las técnicas propuestas para resolver esta actividad se presentan en la Tabla 3:

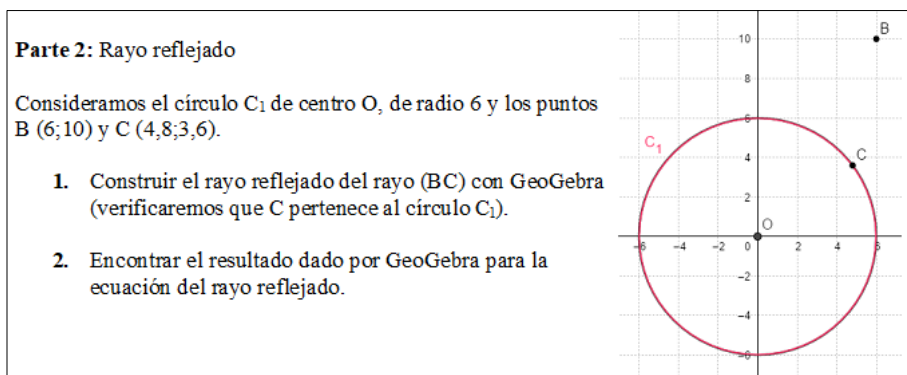
**Tabla 3**

*Principales técnicas propuestas*

<p>Trazar una semirrecta simétrica al rayo incidente respecto al radio (OC).</p> <p>Realizar zooms sucesivos alrededor de C para mostrar que puede ser considerado como infinidad de segmentos infinitamente pequeños.</p> <p>Hacer un programa de construcción.</p>
--

**Figura 2**

*Estudio 1, Parte 2 (Ibid., p.51)*



El objetivo de la “Parte 2 del estudio 1” (Figura 2) es construir el rayo reflejado con GeoGebra y luego, hallar a mano las ecuaciones obtenidas en el software.

Se propone estudiar y completar los conocimientos para un primer estudio en clase de geometría analítica sobre las nociones detalladas en la Tabla 4.

Se proponen distinguir tres tipos de actividades: pasar de ecuaciones cartesianas a ecuaciones reducidas e inversamente; construir las ecuaciones de rectas a partir de diversos datos; y verificar el paralelismo y la perpendicularidad de dos rectas.

#### **Tabla 4**

##### *Nociones complementarias*

---

Ecuaciones cartesianas de rectas y las ecuaciones reducidas.

Distinción entre rectas paralelas y rectas no paralelas al eje de ordenadas.

Coefficiente director  $(y_B - y_A)/(x_B - x_A)$  de la recta que pasa por  $A$  y  $B$  con  $x_A \neq x_B$ .

Ecuación reducida de la recta con coeficiente director  $m$  que pasa por un punto  $A$ .

Condiciones de paralelismo y de perpendicularidad de dos rectas conociendo las ecuaciones reducidas.

Coordenadas del punto medio de un segmento.

---

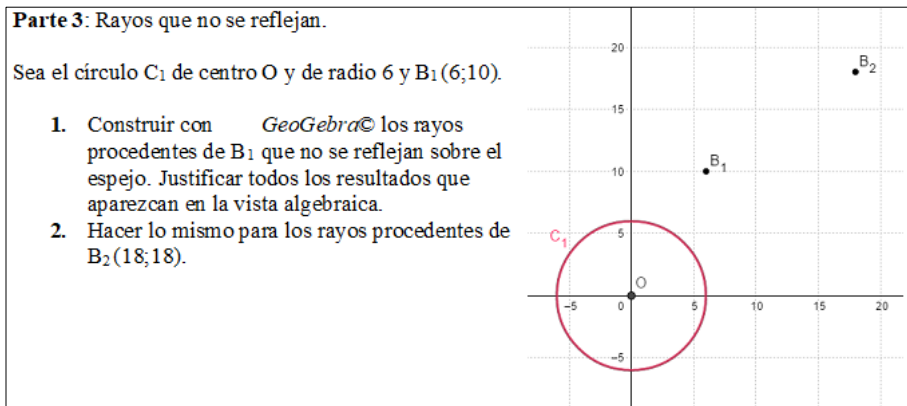
La “Parte 3 del estudio 1” (Figura 3) propone construir, utilizando GeoGebra, los rayos que no se reflejan. Los objetivos de esta parte son: reconocer las ecuaciones de rectas tangentes del tipo  $x=a$  e introducir las ecuaciones de circunferencia con la ayuda del profesor a partir de la fórmula de distancia entre dos puntos (en un sistema ortogonal). Se propone de esta manera, realizar un primer estudio en el aula sobre las ecuaciones de circunferencia: forma desarrollada, forma canónica y hallar las ecuaciones de segundo grado en su forma canónica.

En esta Parte, proponen distinguir tres tipos de actividades: determinar la ecuación de una circunferencia de centro y radio dados; determinar la ecuación de una circunferencia de diámetro dado y determinar el conjunto de

puntos que verifican una ecuación de la forma  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ . El Estudio 2 (Figura 4) tiene por objetivo dar una definición de la tangente a una curva en un punto, encontrar una fórmula para la tangente y verificar que esta recta es la tangente.

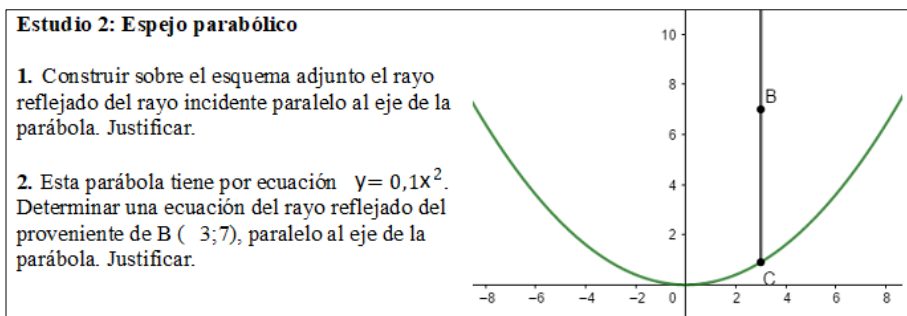
### Figura 3

Estudio 1, Parte 3 (Ibid., p.52)



### Figura 4

Estudio 2 (Ibid., p.54)



El libro supone cuatro posibles maneras de trazar la tangente, mencionados en la Tabla 5:

## Tabla 5

### Posibles formas de trazar la tangente

- |   |  |
|---|--|
| 1 | Por aproximación, realizando zoom alrededor del punto C.   |
| 2 | Haciendo aparecer una circunferencia tangente a la parábola en el punto C, la tangente a la circunferencia en C es la tangente a la parábola.                          |
| 3 | Con la derivada simétrica.   |
| 4 | Por un método más algorítmico que permita obtener una formula, haciendo pivotear una recta no vertical alrededor de C, la recta no debe volver a cortar a la parábola. |

## Figura 5

### Tangente en un punto de la hipérbola (Ibid., p.81)

**Ejercicio 36.** Una construcción geométrica de la tangente en un punto de una hipérbola.

Sea A (1;1) un punto de la hipérbola (H) de ecuación  $y = \frac{1}{x}$ .

La paralela al eje de abscisas que pasan por A corta al eje de ordenadas en B.

Notamos B' al simétrico del Origen O con respecto a B.

1. Determinar las coordenadas de B', luego una ecuación de la recta (B'A). Demostrar entonces que (B'A) es la tangente a la hipérbola en A.
2. Retomar la cuestión 1 en el caso general con  $A(a; \frac{1}{a})$ , siendo a un número real no nulo.

Luego, se explica el funcionamiento de la antena a partir de la convergencia hacia el foco de la parábola, por los rayos incidentes paralelos al eje. Se propone completar este estudio demostrando que las señales emitidas simultáneamente llegan en simultáneo al foco. El libro propone, además, para cada investigación y para cada estudio, un conjunto de ejercicios, disponibles en una sección del libro denominada “Banco de ejercicios”. Aquí se incluyen

ejercicios sobre ecuaciones (de rectas, de parábolas, de circunferencia), tangentes a una circunferencia, tangentes a cónicas –se incluye aquí un ejercicio referido a la recta tangente en un punto de una hipérbola (Figura 5) – y documentos históricos.

Finalmente, el libro propone tres posibles evaluaciones escritas.

## RESULTADOS Y ANALISIS

En primer lugar, detallaremos los IO inferidos a partir de las entrevistas y la clasificación en cuatro clases. Luego, para cada tipo de IO incorporamos las modificaciones efectuadas por la profesora al REI propuesto y las acciones desarrolladas en el aula que sirven de soporte para cada uno de esos tipos de invariantes.

### IO de la profesora

Clasificamos IO obtenidos a partir de la Tabla 1 en cuatro clases:

**Tabla 6**

*IO relativos al conocimiento*

IOC: Es necesario tratar los temas del programa de matemática	<p>IOC<sub>1</sub>: Es necesario dar sentido a lo que se enseña.</p> <p>IOC<sub>2</sub>: Es necesario tratar los temas del programa.</p> <p>IOC<sub>3</sub>: El REI permite tratar los contenidos del programa.</p> <p>IOC<sub>4</sub>: Es necesario preparar el encuentro de los estudiantes con el contenido del programa.</p> <p>IOC<sub>5</sub>: Es necesario hablar de ortogonalidad antes de pasar por el producto escalar.</p> <p>IOC<sub>6</sub>: Tratar la ortogonalidad vinculada únicamente al producto escalar es muy teórico y poco útil.</p> <p>IOC<sub>7</sub>: La perpendicularidad es un instrumento.</p> <p>IOC<sub>8</sub>: La ortogonalidad se puede tratar como perpendicularidad.</p> <p>IOC<sub>9</sub>: El REI permite revisar los temas que los alumnos han estudiado años anteriores.</p>
---	---



IOC sobre el conocimiento: se refieren a las nociones a enseñar y los saberes estudiados en el aula. Los listamos en la Tabla 6:

OT sobre el tiempo refiere al tiempo de gestión del proceso de estudio, ya sea a alusiones sobre el tiempo que debe ser empleado para resolver una actividad, desarrollar una cuestión, una validación, etc., y el tiempo efectivamente empleado. Los listamos en la Tabla 7.

**Tabla 7**

*IO relativos al tiempo*

IOT: Es necesario que el profesor controle el tiempo.	<p>IOT<sub>1</sub>: Es necesario controlar el tiempo.</p> <p>IOT<sub>2</sub>: Dividir la clase en dos grupos permite controlar el tiempo.</p> <p>IOT<sub>3</sub>: Es necesario que los alumnos realicen las investigaciones fuera del aula para no perder tiempo.</p> <p>IOT<sub>4</sub>: Es necesario recuperar el tiempo perdido a causa del REI.</p> <p>IOT<sub>6</sub>: Es necesario que los estudiantes encuentren las buenas ideas antes de los diez minutos.</p> <p>IOT<sub>7</sub>: El profesor no puede perder el control de los tiempos de la clase.</p>
---	--

IOAE sobre las ayudas al estudio: consideramos aquí las proposiciones que se corresponden con las maneras de ayudar a los alumnos. Los enunciamos y listamos en la Tabla 8:

**Tabla 8**

*IO relativos a las ayudas al estudio*

IOAE: Es necesario que el profesor guíe el trabajo de los alumnos.	IOAE <sub>1</sub> : Es necesario que el profesor dé todas las herramientas a los alumnos para que puedan hacer los cálculos.
IOAE: Es necesario implicar y motivar a los alumnos	

---

(incorporando un contexto, un software, un REI, etc.).

IOAE: Es necesario gestionan bien los recursos para ayudar a los alumnos.

IOAE<sub>2</sub>: Los alumnos no saben cómo hacer una investigación, el profesor debe ayudarlos.

IOAE<sub>3</sub>: Los trabajos personales encuadrados (TPE) proveen métodos de investigación a los alumnos.

IOAE<sub>4</sub>: Los alumnos quieren hacer lo que el profesor indica.

IOAE<sub>5</sub>: Es necesario implicar y motivar a los alumnos.

IOAE<sub>6</sub>: El GeoGebra permite motivar a los alumnos.

IOAE<sub>7</sub>: Verificar las salidas del GeoGebra de la vista algebraica con los cálculos es una motivación para los alumnos.

IOAE<sub>8</sub>: El REI da a los alumnos una motivación.

IOAE<sub>9</sub>: Los alumnos no están en condiciones de hacer los cálculos solos.

IOAE<sub>10</sub>: El GeoGebra reduce las dificultades de los alumnos porque contiene una herramienta para determinar la recta tangente.

IOAE<sub>11</sub>: El uso del GeoGebra es hiper intuitivo para los alumnos.

IOAE<sub>12</sub>: El uso del GeoGebra no genera dificultades a los alumnos porque ellos han visto a la profesora utilizarlo.

IOAE<sub>13</sub>: Los REI permiten contar a los alumnos una historia por detrás de los contenidos.

---

---

IOAE<sub>14</sub>: La narrativa que está detrás de los problemas propuestos en un REI vuelve a la matemática más simpática para los alumnos.

IOAE<sub>15</sub>: Los REI permiten mostrar a los alumnos para qué sirve la matemática.

IOAE<sub>16</sub>: Es necesario gestionar bien los recursos para ayudar a los alumnos.

IOAE<sub>17</sub>: Es necesario proponer a los alumnos ejercicios muy similares a los propuestos en la clase.

IOAE<sub>18</sub>: Es necesario proponer a los alumnos actividades hiper clásicas.

IOAE<sub>19</sub>: El examen final debe contener tanto tareas contextualizadas como técnicas.

---

IOP sobre el profesor: en este tipo de invariante, consideramos las proposiciones que hacen referencia al profesor, a acciones que puede y debería hacer. Los enunciamos listamos en la Tabla 9:

**Tabla 9**

*IO relativos al profesor*

---

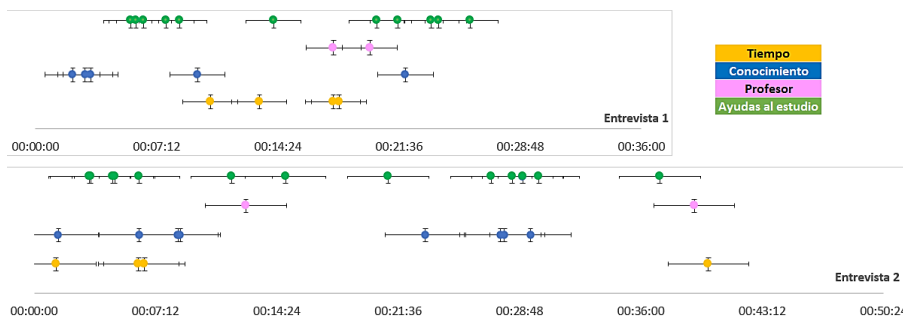
IOP: Es necesario que el profesor controle todo el desarrollo del proceso de estudio.	IOP <sub>1</sub> : El profesor debe marcar el tema al inicio del REI. IOP <sub>2</sub> : Es necesario que el profesor ayude a los alumnos a encontrar las buenas ideas. IOP <sub>3</sub> : El profesor debe pedir a los alumnos que formulen preguntas. IOP <sub>4</sub> : El profesor no debe poner en “jaque” a los alumnos. IOP <sub>5</sub> : El profesor debe evitar las situaciones que los alumnos no puedan resolver.
---	---

---

A partir de la Tabla 1 se generó el gráfico de la Figura 6 que representa el tiempo en cada entrevista con los cuatro tipos de IO. Es evidente la preponderancia temporal de los invariantes vinculados a las ayudas al estudio. En menor medida, pero también relevantes, los relativos al conocimiento y al tiempo y finalmente, los referidos al profesor.

**Figura 6**

*IO según el tiempo y entrevista*



### **Modificaciones al REI y acciones en el aula: soporte para cada tipo de IO**

Una primera modificación refiere a la organización y gestión de las investigaciones. El libro propone hacer dos: una de ellas sobre las antenas parabólicas y la otra, sobre la reflexión en un espejo plano. Se sugiere que los estudiantes difundan el resultado de sus búsquedas delante de toda la clase. Aquí, la profesora introduce una primera modificación: dividió a la clase en dos grupos y solicitó a cada uno de ellos realizar una de las investigaciones, sin presentar las diapositivas. Los estudiantes debían investigar la pregunta de forma grupal fuera del aula y luego, entregar el resultado de esa búsqueda a la profesora ya sea de forma impresa o enviándolas por e-mail. Esta modificación respalda los IO de la profesora respecto al tiempo, en particular, al control del mismo.

Otra de las modificaciones refiere a las formulaciones de las tareas, denominadas en el libro, “estudios”. La profesora cambia sustancialmente sus formulaciones. Por ejemplo, en la parte dos y tres del estudio 1 (Figura 2 y Figura 3), la profesora suprimió el punto B2 y modificó la figura de análisis

detallando la representación de las circunferencias y rectas. Segmentó la actividad en varios incisos: 1/, 2/a/, 2/b/, 2c/, 3/a/ et 3/b/. En el estudio 2, relativo al espejo parabólico, la profesora también modificó sustancialmente la actividad. Tanto el libro como la profesora pretenden introducir la tangente a una curva en un punto, determinar una fórmula para la tangente y verificar que dicha recta es la tangente. El libro propone cuatro “métodos” que pueden utilizarse para trazar la tangente, dando lugar a los estudiantes a elegir y explicar esa elección. La profesora en cambio, no ofrece esta posibilidad de exploración de los métodos. Ella presenta cuatro gráficos, cada uno con el correspondiente valor de la pendiente de la recta tangente y coloca espacios con líneas punteadas, para que los estudiantes lo completen y segmenta, como en el estudio anterior, la tarea en varios incisos. Este tipo de modificaciones que generan una actividad “cerrada”, afirman los IO relativos a las ayudas al estudio, los IO relativos a la actividad del profesor y los IO sobre el contenido. El detalle en las representaciones, la segmentación de los enunciados y las líneas para completar indican que, para la profesora, es preciso guiar a los estudiantes lo más posible en el desarrollo de los estudios. Esto le asegura siempre, o casi siempre, ajustarse al programa.

Otra modificación sustancial, vinculada al diseño de los estudios, se refiere al tiempo (en minutos) que la profesora coloca en el margen derecho de cada ítem, siendo el tiempo máximo disponible para el desarrollo de cada uno. Esta modificación es, a nuestro entender, otro sustento de los IO vinculados al tiempo: al control del tiempo por parte del profesor.

Además de este tipo de modificaciones, la profesora agrega un tercer estudio, relativo al espejo hiperbólico. En el libro, este estudio es un ejercicio que está en el “banco de ejercicios”, específicamente, el ejercicio 36. En la secuencia de tareas de la profesora, el espejo hiperbólico ocupa una parte importante y propone analizar con él la tangente a una curva hiperbólica. De forma análoga a las tareas propuestas por la profesora, la actividad comprende una serie de “etapas a seguir”, colocando espacios donde los estudiantes deberían completar e incluso, el tiempo disponible para desarrollarla. Esta modificación es otro soporte de los IO sobre el tiempo, las ayudas al estudio y el profesor.

La profesora utilizó poco la sección del libro “Banca de ejercicios”. Consideró de allí la actividad sobre el espejo hiperbólico que, como ya describimos, modificó sustancialmente. La profesora utilizó otros libros escolares para dar ejemplos y proponer actividades y así “entrenar” a los alumnos en ciertos tipos de tareas, por ejemplo, sobre las ecuaciones de rectas,

ecuaciones de circunferencias, puntos simétricos, pasaje de un tipo de ecuación de una recta (circunferencia) a otro tipo. Esta selección de actividades, extraídas de los manuales usados habitualmente por la profesora y sus estudiantes, es un soporte de los IO sobre las ayudas al estudio. Así, se proponen ejercicios de características similares a los que los estudiantes realizan fuera del REI.

La profesora no sólo modifica el REI impulsado en el libro sino también modifica el capítulo relativo a las ecuaciones de rectas y circunferencias presentado en el programa de estudios. Ella afirma abordar nociones que no son estrictamente del programa de 1S. Incluso, se refiere a las rectas paralelas y las rectas perpendiculares sin establecer un vínculo con el producto escalar, tal como se propone en el programa. Esta modificación sustenta sus IO sobre el contenido.

Además de las modificaciones al artefacto REI, la profesora realiza ciertas acciones durante las sesiones de clases que pueden considerarse influenciadas por sus IO. Se detallan en la Tabla 10.

**Tabla 10**

*Acciones de la profesora influenciadas por sus IO*

<b>Acciones</b>	<b>IO sobre</b>
Mantiene el “contexto” de los espejos vinculándolo al programa.	el contenido
Indica, remarca y controla los tiempos a utilizar para cada actividad	el tiempo
Indica a los estudiantes los resultados a los que deben llegar al resolver las tareas y trata de incorporar representaciones con GeoGebra, realizadas por sí misma.	las ayudas al estudio el profesor
Recorta considerablemente una presentación (diapositivas), propuesta por el libro. Aquí se presenta el potencial del REI con relación a las obras posibles de estudiar.	el tiempo

## **DISCUSION**

Existe una fuerte preponderancia de los IO vinculados a las ayudas al estudio. La profesora alude a diferentes formas de lo que ella considera es “ayudar” a los estudiantes, desde aportar respuestas, soluciones, hasta

modificar las “tareas/estudios” propuesto en el REI. Tales son estas modificaciones que la mayoría de ellas acaban generando ejercicios “tradicionales/clásicos”, entendiendo este tipo de ejercicios como aquellos donde la solución es casi inmediata y no requiere de estudios complejos ni de investigaciones adicionales. Esto se aleja ampliamente del tipo de actividad propuesta en el artefacto REI. Continúan en preponderancia los IO relativos al conocimiento (al saber explicitado en el programa oficial). La profesora constantemente vincula lo que debe estudiarse y la forma de hacerlo con el “contenido” del programa. Un programa que la profesora debe abordar en su totalidad, en el tiempo y forma acordado con los demás profesores de matemática de la Institución. Además del examen (denominado “deber común”) que, al finalizar la unidad de estudio, lo estudiantes deben realizar de forma individual y que será revisado y calificado por otra profesora que no es la propia profesora del curso. Estas restricciones, de tipo institucional, ubican a la profesora en una situación cuya acción la conduce a generar esta tipología de IO. La misma profesora, en otra situación, desarrollaría otros IO. De hecho, ella participa del grupo de profesores que componen el equipo de investigación sobre la Didáctica de la Matemática de una Universidad. Allí, en esa posición, diferente a la del profesor escolar, la profesora cuestiona los ejercicios tradicionales y, de hecho, ha generado con ese grupo una propuesta de REI sobre la velocidad instantánea y el signo de la derivada para estudiantes de bachiller. Tanto las modificaciones que efectúa con el REI sobre las antenas parabólicas como la propuesta de REI que genera junto al grupo de estudio de la Universidad, evidencian que la profesora tiene la capacidad y el conocimiento para manipular y gestionar el saber matemático. Pero la situación de ajustar un REI a un programa de estudio la conducen a usar este conjunto de IO que acaban por producir un instrumento que nada tiene que ver con un genuino REI. Es decir, el proceso de instrumentalización acaba produciendo un instrumento que se aleja ampliamente del artefacto REI original. Esto ocurre porque los REI no pueden adaptarse a los programas, por la propia naturaleza de este artefacto y por los gestos necesarios para llevarlo adelante en un aula real. Los programas deben, a la inversa, formularse en función de los REI.

Los IO relativos al tiempo y al profesor tienen menor ocurrencia. Los primeros aluden al control que el profesor debe tener durante todo el proceso de estudio y los segundos, sobre las acciones que realiza el profesor para abarcar los contenidos del programa, en los plazos acordados y en la forma menos compleja para los estudiantes. Esto, en conjunto con todo lo anterior, conducen a la profesora a hacer uso de IO provenientes de una enseñanza “clásica”. Es decir, una enseñanza donde la matemática se estudia de forma

segmentada, por unidades y temas que siguen un programa oficial previamente establecido.

Detallando las características y gestos de un REI, esta tipología de IO hace que la pregunta de partida del REI pierda su generatividad y su poder arborescente, puesto que se anula la generación de preguntas derivadas. Las tareas se convierten en guías de acciones a desarrollar y así, se anulan posibles gestos compatibles con, por ejemplo, formularse preguntas (los estudiantes) y buscar respuestas (los mismos estudiantes). Al no generarse preguntas derivadas se inhibe el componente de investigación como etapa inicial a la construcción de respuestas y se impide decidir sobre qué conocimiento de los estudiantes es o no útil, bloqueando gestos propios a los de estudiar e investigar. Tampoco se potencian los gestos referidos a “rastrear”, identificar y delimitar las posibles disciplinas y menos aún, lo específico dentro de ellas que podrían aportar a la respuesta pues, está determinado de antemano, de qué forma y con qué saber se deben resolver las tareas. Es decir, las decisiones tomadas no generan las condiciones para el desarrollo de gestos propios de explorar disciplinas y delimitar áreas. El desarrollo del REI ocurre de forma lineal y así, las entradas y salidas de los temas no se producen. Tampoco es necesario clarificar, profundizar, saberes que servirían para resolver la tarea pues, como ya se mencionó, están determinados de antemano. Esto conduce a que no hay nada que ajustar sobre el denominado nivel de gris más adecuado. En relación al medio de estudio, podríamos considerar que hay recursos que han sido incorporados como, por ejemplo, las búsquedas en Internet que los estudiantes debieron desarrollar. Búsquedas que, si bien, se hicieron fuera del aula, fueron concretadas por los grupos pero no fueron consideradas pues “hacían perder tiempo”. De este modo, se incorporó un medio que nunca llegó a ser parte del medio de estudio.

La profesora es quien ha determinado cada paso a seguir en las tareas, desde las acciones hasta los tiempos (en minutos) que los estudiantes disponen para resolver las tareas. Esto está lejos de propiciar gestos de estudios y/o trabajos de investigación cooperativos y colaborativos. Tampoco es posible generar instancias en la que cada miembro o grupo de estudio debió difundir la respuesta y entonces, no se generaron momentos de cuestionamientos, aceptaciones y resistencia más que los protagonizados por la profesora. Con lo antes mencionado, concluimos que los IO de la profesora en esta situación, promueven gestos contrarios a los requeridos para utilizar apropiadamente el REI del que dispone en el libro.



Ahora bien, si estos tipos de IO no propician una actividad compatible con los gestos necesarios en la gestión de un REI, entonces ¿qué tipo de IO serían necesarios disponer para ello?

## **CONCLUSIONES**

Los IO no son absolutos, la situación, la institución, el fantasma del deber común, etc. se combinan para que esta profesora, que está excelentemente dotada en sus conocimientos matemáticos, no tenga escapatoria y asimile el recurso, desde un esquema de enseñanza clásica, de fuerte control, donde solo unos pocos gestos didácticos sobreviven. A nuestro entender, en otra situación, o bien, en esa situación, pero sin las restricciones institucionales, ella podría quizás actuar de otra forma. No sabemos qué pesa más, si una larga experiencia en un contexto tradicional condicionado por todo lo descrito, o un cambio total de reglas del juego, que habilitarían los gestos didácticos que la vida del REI necesita. En cualquier caso, somos optimistas sobre esta última hipótesis, siempre y cuando se conserve el dominio matemático que es evidente que la profesora tiene, como condición necesaria para poder transformar el saber, cuestionarlo, etc. Porque es claro que ella transforma lo que tiene entre manos, aunque no sea en el sentido esperado.

## **DECLARACIONES DE CONTRIBUCIONES DE LOS AUTORES**

VP realizó el trabajo de campo sobre la implementación del REI, su descripción y el análisis de los datos. MRO es responsable de la orientación general del trabajo y de los aspectos relacionados con la TCC, sus vinculaciones con el enfoque instrumental y la identificación de los IO. La metodología, generación de categorías de análisis, marco teórico que orienta las decisiones metodológicas y la organización general de la escritura del artículo fueron realizadas por ambos autores.

## **DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS**

Los datos que apoyan los resultados de este estudio serán facilitados por el autor correspondiente, [VP], a petición razonable.

## REFERENCIAS

- Bellenoué, F., Chevalarias, N., Chauvin, P., Dherissard, S., Ducos, C., Gaud, D., & Minet, N. (2014). *Enseigner les mathématiques en l'ère S : Trois parcours sur l'analyse et la géométrie analytique*. IREM de Poitiers.
- Bueno-Ravel, L., & Gueudet, G. (2013). L'approche instrumentale des genèses d'usage : le cas des bases d'exercices en ligne. Des technologies aux ressources numériques, genèses d'usages et genèses documentaires. In : *Les technologies numériques pour l'enseignement - Usage, dispositif et genèses* (pp. 106-124). Octarès.
- Chevallard, Y. (2004). *Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire*. 13 p.  
<http://yves.chevallard.free.fr/>
- Gueudet, G., & Trouche L. (2008). Du travail documentaire des enseignants : genèses, collectifs, communautés. Le cas des mathématiques. *Education et didactique*, 2(3), 7-33.
- Gueudet, G., Lebaud, M-P., Otero, M. R., & Parra, V. (2018). Travail documentaire des professeurs et parcours d'étude et de recherche : une étude de cas en première S. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 38(3), 275-314.
- Otero, M. R. (2019). *Competencias ¿Para qué?* Unicen.
- Parra, V., & Otero, M. R. (2018). Antecedentes de los Recorridos de Estudio e Investigación (REI): características y génesis. *Revista electrónica de investigación en educación en ciencias*, 13(2), 1-18.
- Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies : Approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin.
- Rabardel, P. (2002). *People and technology: a cognitive approach to contemporary instruments*. Université Paris 8.
- Trouche, L. (2016). Prendre en compte les métamorphoses du Numérique : vers une approche documentaire du didactique. *Revista Union* 45, 7-23.
- Trouche, L., Gueudet, G., Pepin, B., & Aldon, G. (2020). *L'approche documentaire du didactique*. 13 p. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02512596/document>

- Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Harvard University Press.
- Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(23), 133-170.
- Vergnaud, G. (1998). A comprehensive theory of representation for mathematics education. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(2), 167-181.
- Vergnaud, G. (2007). Forma operatoria y forma predicativa del conocimiento. In: *Actas Primer Encuentro Nacional sobre Enseñanza de la Matemática* (pp. 1-25). Tandil.
- Vergnaud, G. (2013). Pourquoi la théorie des champs conceptuels ? *Infancia y aprendizaje*, 36(2), 131-161.

## ANEXO I

IO	Entrevista 1		Entrevista 2	
	Tiempo	Línea(s)	Tiempo	Línea(s)
Es necesario dar sentido a lo que se enseña.	02'13	11-14	27'40	266-268
			27'54	268-271
			29'27	285-287
Es necesario tratar los temas del programa. El REI permite tratar los contenidos del programa.	02'57	17-20	06'14	55-57
			08'32	74-76
Es necesario preparar el encuentro de los estudiantes con el contenido del programa. Es necesario controlar el tiempo.	03'17	20-27	01'27	8-18
			06'08	52-53
Dividir la clase en dos grupos permite controlar el tiempo. Es necesario que los alumnos realicen las investigaciones				

fuera del aula para no perder tiempo.

Los alumnos no saben cómo hacer una investigación, el profesor debe ayudarlos.

Los trabajos personales encuadrados (TPE) proveen métodos de investigación a los alumnos.	05'40	41-43	03'21 27'08 28'59	22-25 261-263 282-284
---	-------	-------	-------------------------	-----------------------------

Los alumnos quieren hacer lo que el profesor indica.	05'59	44-47	04'47	46-49
--	-------	-------	-------	-------

Es necesario implicar y motivar a los alumnos.

El profesor debe marcar el tema al inicio del REI.	06'26	47-51	04'40	40-41
--	-------	-------	-------	-------

Es necesario implicar y motivar a los alumnos.

El GeoGebra permite motivar a los alumnos.

Verificar las salidas del GeoGebra de la vista algebraica con los cálculos es una motivación para los alumnos.	07'46	58-61	11'44	109-112
--	-------	-------	-------	---------

El REI da a los alumnos una motivación.	08'33	65-68	28'22	277-278
---	-------	-------	-------	---------

Es necesario hablar de ortogonalidad antes de pasar por el producto escalar.

Tratar la ortogonalidad vinculada únicamente al producto escalar es muy teórico y poco útil.	09'38	75-79	08'40	77-78
--	-------	-------	-------	-------

La perpendicularidad es un instrumento.

La ortogonalidad se puede tratar como perpendicularidad.

Es necesario recuperar el tiempo perdido a causa del REI.	10'24	81-86	40'00	400-404
Es necesario controlar el tiempo.				
Es necesario que el profesor dé todas las herramientas a los alumnos para que puedan hacer los cálculos.	13'18	104-106	06'12 06'15	52-53 55-57
Los alumnos no están en condiciones de hacer los cálculos solos.				
El GeoGebra reduce las dificultades de los alumnos porque contiene una herramienta para determinar la recta tangente.	14'09	115-121	14'55	137-141
Es necesario que el profesor ayude a los alumnos a encontrar buenas ideas.	17'42	138-141	39'10	398-399
Es necesario controlar el tiempo.				
Es necesario que los estudiantes encuentren las buenas ideas antes de los diez minutos.	17'41	141-144	01'18	8-10
El profesor no puede perder el control de los tiempos de la clase.				
El uso del GeoGebra es hiper intuitivo para los alumnos.				
El uso del GeoGebra no genera dificultades a los alumnos porque ellos han visto a la profesora utilizarlo.	18'02	146-151	06'33	58-60
El profesor debe pedir a los alumnos que formulen preguntas.				

El profesor no debe poner en “jaque” a los alumnos.				
El profesor debe evitar las situaciones que los alumnos no puedan resolver.	19'52	162-164	12'34	115-122
Es necesario gestionar bien los recursos para ayudar a los alumnos.	20'17	164-168	37'07	389-391
Es necesario proponer a los alumnos ejercicios muy similares a los propuestos en la clase.	21'31	175-179	21'00	198-199
Es necesario proponer a los alumnos actividades hiper clásicas.				
El REI permite tratar los contenidos del programa.				
El REI permite revisar los temas que los alumnos han estudiado años anteriores.	21'59	179-191	23'13	217-221
El REI da a los alumnos un entonces, entonces, una motivación.				
Los REI permiten contar a los alumnos una historia por detrás de los contenidos.	23'31	194-197	29'57	292-295
La narrativa que está detrás de los problemas propuestos en un REI vuelve a la matemática más simpática para los alumnos.				
Los REI permiten mostrar a los alumnos para qué sirve la matemática.	23'58	199	03'17	21-22
El REI da a los alumnos un entonces, entonces, una motivación.	25'50	213-214	29'00	286-288

El examen final debe contener  
tanto tareas contextualizadas  
como técnicas.

---