


Análisis de las representaciones del concepto de número que propone un grupo de docentes de educación primaria en formación inicial en Costa Rica

Miguel Picado-Alfaro ^a

^a Universidad Nacional, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Escuela de Matemática, Heredia, Costa Rica

Recibido para su publicación el 28 set. 2020. Aceptado tras revisión el 15 dic. 2020.

Editora designada: Claudia Lisete Oliveira Groenwald

RESUMEN

Background: Las reformas educativas en matemática implican una serie de cambios en la formación docente. Algunas de estas modificaciones acentúan la inclusión de nuevos contenidos, el desarrollo de capacidades, habilidades o competencias matemáticas, la implementación de estrategias de enseñanza y evaluativas distintas, y el uso de la tecnología. En Costa Rica, la educación matemática ha experimentado cambios para fomentar en el estudiantado diversos procesos cognitivos, como el proceso de representar. **Objectives:** En este artículo se destaca la diversidad de sistemas de representación asignados al concepto de número que propone un grupo de docentes de educación primaria en formación inicial en Costa Rica, como agentes promotores del proceso de representar en el estudiantado. **Design:** La investigación se enmarca en las propuestas sobre el análisis de los significados de conceptos matemáticos y la formación de docentes. Corresponde a un estudio descriptivo basado en un estudio intrínseco de casos. **Data collection and analysis:** La información se recolectó mediante un cuestionario y su análisis destaca los tipos de representaciones y las justificaciones que este grupo de personas docentes en formación manifiestan para su selección.; se utilizó el análisis de contenido como técnica de análisis. **Setting and Participants:** El estudio se llevó a cabo con 23 docentes de educación primaria en formación inicial. **Results:** Los resultados muestran una tendencia al uso de representaciones de un mismo tipo, para mostrar el concepto de número, sobresaliendo las representaciones icónicas y simbólico-numéricas. **Conclusions:** Se destaca una vinculación entre las representaciones propuestas y las situaciones y contextos cercanos al estudiantado de educación primaria, en la que valdría la pena profundizar.

Keywords: educación primaria; formación inicial de maestros; número; sistemas de representación.

Autor correspondiente: Miguel Picado Alfaro. Email: miguel.picado.alfaro@una.cr

Análise das representações do conceito de número proposto por um grupo de docentes de educação básica em formação inicial na Costa Rica

RESUMO

Background: As reformas educativas em matemática implicam uma série de mudanças na formação do docente. Algumas destas modificações acentuam a inclusão de novos conteúdos, o desenvolvimento de capacidades, habilidades ou competências matemáticas, a implementação de estratégias de ensino e avaliação distintas e o uso da tecnologia. Na Costa Rica, a educação matemática tem experimentado mudanças para impulsionar nos estudantes diversos processos cognitivos, como o processo de representar.

Objectives: Neste artigo destaca-se a diversidade de sistemas de representação atribuídos ao conceito de números que propõe um grupo de docentes de educação básica em formação inicial na Costa Rica, como agentes propulsores do processo de representar no corpo discente. **Design:** A pesquisa enquadra-se nas propostas sobre a análise dos significados de conceitos matemáticos e a formação docente. Corresponde a um estudo descritivo baseado em um estudo intrínseco de casos. **Data collection and analysis:** A informação foi coletada mediante um questionário e, em sua análise, destacam-se os tipos de representações e as justificativas que este grupo de docentes em formação manifestam para a sua seleção; foi utilizada a análise de conteúdos como técnica de análise. **Setting and Participants:** O estudo foi realizado com 23 docentes de educação básica em formação inicial. **Results:** Os resultados mostram uma tendência ao uso de representações de um mesmo tipo, para mostrar o conceito de número, sobressaindo as representações icônicas e simbólico-numéricas. **Conclusions:** Destaca-se uma vinculação entre as representações propostas e as situações e contexto próximos ao discente de educação básica, na qual valeria a pena aprofundar-se.

Keywords: Educação básica; formação inicial de professores; número; sistemas de representação

Analysis of the representations of the concept of number proposed by a group of primary education teachers in initial training in Costa Rica

ABSTRACT

Background: educational reforms in mathematics imply a series of changes in teacher training. Some of these modifications accentuate the inclusion of new content, the development of mathematical abilities, skills, or competencies, and the implementation of different teaching and assessment strategies, and the use of technology. Primary and secondary education teachers must be able to respond adequately to these curricular standards. In Costa Rica, mathematics education has undergone changes to promote various cognitive processes in the students, such as the

process of representing. **Objectives:** This article highlights the diversity of representation systems assigned to the concept of number proposed by a primary education teachers' group in initial training in Costa Rica, as promoters of the process of representing in students **Design:** Theoretically, the research is based on the analysis of the meanings of mathematical concepts and the training of teachers. It is a descriptive study based on an intrinsic study of cases. **Data collection and analysis:** The information was collected through a questionnaire. The analysis of information highlights the types of representations and the justifications that this group of trainee teachers show to select them; content analysis was used as analysis technic. **Setting and Participants:** The study was carried out with 23 primary education teachers in initial training. **Results:** The results highlight a trend in the use of representation systems of the same type to show the concept of number, particularly iconic and symbolic-numerical representations. **Conclusions:** It is noted a link between the proposed representations and the situations and contexts close to the primary education student stands out; this link deserves to be explored.

Keywords: primary education; initial training of teachers; number; systems of representation.

INTRODUCCIÓN

El estudio de los significados de los conceptos matemáticos ha logrado calar en el interés de los investigadores en Didáctica de la Matemática. La comprensión de un concepto matemático conlleva que se le dote de uno o varios significados. Distintas propuestas fundamentan el proceso de otorgar significado a un concepto matemático desde tres aristas: el signo, el concepto y el sentido (Frege, 1996). Estas ideas destacan las formas en que se representa el concepto, su evaluación semántica y los distintos sentidos en que puede ser comprendido, aplicado o entendido (Fernández-Plaza, Castro-Rodríguez, Estrella, Martín-Fernández, Rico, Ruiz-Hidalgo y Vilchez-Marín, 2016).

Particularmente, Rico y Fernández-Cano (2013) resaltan el estudio de significados a través del análisis de contenido, una técnica para “establecer y estudiar la diversidad de significados escolares de los conceptos y procedimientos de las matemáticas que aparecen en un texto” (p. 11). El análisis de contenido encuentra fundamento en el triángulo semántico de Frege, particularizando el estudio de significados de conceptos en las matemáticas escolares.

En este artículo se enfoca el signo, uno de los componentes del triángulo semántico de Frege, a través del estudio de los sistemas de representación. Con especificidad, se analizan las representaciones del

concepto de número que proponen docentes de educación primaria en formación inicial en Costa Rica, como parte del significado que otorgan a este concepto matemático.

El concepto de número toma realce en educación primaria, particularmente en los primeros años, donde es fundamental que los niños desarrollen sistemáticamente este concepto, adquieran la habilidad para comunicar información numérica, de manera oral y escrita, y desarrollen destrezas para su reconocimiento, escritura y lectura, y posteriormente, para su aplicación en distintos contextos numéricos (Castro, Rico y Castro, 2007). Junto a esto, las representaciones constituyen un componente trascendental en la visualización de un concepto en las primeras etapas escolares (Arcavi, 2003).

El interés por el estudio se originó durante el desarrollo de una asignatura en la carrera de Educación Primaria en una Universidad Estatal de Costa Rica. En la experiencia, el estudiantado —maestros y maestras en formación inicial— mostraron concepciones “que llamaron la atención” en cuanto la forma de comprender o entender los conceptos matemáticos escolares, particularmente el número. El objetivo de este estudio fue mostrar la diversidad de sistemas de representación y las justificaciones para su uso que estas personas docentes en formación inicial asocian al concepto número, para analizar desde esta perspectiva los significados que se otorgan a este concepto dentro de las matemáticas escolares en Costa Rica.

Los resultados del estudio ponen de manifiesto una tendencia hacia la utilización de representaciones icónicas y simbólico-numéricas como medios para hacer presente el concepto de número, su vínculo con tareas contextualizadas y el uso del concepto en situaciones y contextos diversos, cercanos al estudiante de educación primaria.

MARCO TEÓRICO

La fundamentación teórica del estudio se construye desde dos focos particulares. El primero tiene que ver con la propuesta curricular para la Educación Primaria y la formación de los maestros y las maestras en Costa Rica. Dentro de este marco, se enfatiza la concepción de número en el currículo costarricense y se describen los lineamientos curriculares para la formación de maestros en Costa Rica, acentuando aquellos vinculados con la formación matemática y la enseñanza del número. El segundo foco refiere a los

fundamentos teóricos sobre los sistemas de representación en el estudio de significados de conceptos matemáticos escolares.

El número en el currículo de matemática costarricense

La educación pública en Costa Rica se compone de cuatro ciclos educativos. La Educación Primaria abarca el I y II ciclos (6 años); la Educación Secundaria incluye el III ciclo (3 años) —con este se completa la Educación General Básica [EGB]— y el IV ciclo, denominado ciclo Diversificado, que comprende los dos últimos años de este nivel educativo.

El estudio de las matemáticas se organiza a partir de cinco áreas matemáticas: Números, Medidas, Geometría, Relaciones y álgebra, y Estadística y Probabilidad (Ministerio de Educación Pública [MEP], 2012). En cuanto al área de Números, esta “ocupa un lugar muy grande en los dos primeros ciclos, es relevante en el tercero y disminuye en el diversificado” (p. 50).

Desde una perspectiva más general, la propuesta curricular pretende un abordaje integrado entre números, operaciones y cálculos matemáticos, destacando una ligazón entre operaciones y representaciones numéricas. Esto último acentúa la necesidad de estudiar las representaciones que la persona docente de primaria, en formación inicial o en ejercicio de su profesión, propone utilizar para hacer presente el concepto de número ante sus estudiantes. En relación con este tema, se presenta una descripción de los planteamientos curriculares para la enseñanza del número, acentuando el uso de representaciones para su abordaje.

Los Programas de Estudio, dan especial atención al número en el I y II ciclos de la EGB, correspondientes a la Educación Primaria. Se propone “robustecer el sentido numérico” (MEP, 2012, p. 51) a través de las operaciones aritméticas, el estudio de propiedades numéricas, el cálculo mental y la estimación que, al mismo tiempo, promueven el desarrollo de habilidades numéricas. Esto desde un enfoque funcional basado en la resolución de problemas, que promueva el desarrollo de “procesos” como razonar y argumentar, plantear y resolver problemas, comunicar, conectar y representar. En este sentido se comprende que la representación de conceptos matemáticos —u objetos matemáticos— toma realce al reconocerse su trascendencia en el desarrollo de los otros cuatro procesos matemáticos.

Respecto al número, para el I ciclo se propone la enseñanza de los números naturales y las operaciones suma, resta, multiplicación y división; procurando una conexión entre el concepto intuitivo de número y el sentido numérico.

Desde un primer momento se debe conectar el concepto intuitivo de número con el sentido numérico (la posición absoluta y relativa de los números), donde es relevante potenciar el cálculo mental y la estimación pues activan procesos cognitivos que avanzan hacia la competencia matemática. (MEP, 2012, p. 77)

El estudio del número en este ciclo incluye, entre otras habilidades pretendidas, la identificación de ejemplos de representaciones diversas de un número. Estos —los números— se han introducido mediante el conteo y la cardinalidad de conjuntos de objetos. También, se aspira al establecimiento de correspondencias entre distintas formas de representación de los números naturales. Por ejemplo, para primer año se propone “trabajar la correspondencia entre la representación gráfica, la verbal y la representación literal en expresiones como: $24 = 20 + 4$ (...) para dar continuidad al uso de diversas formas de representación” (MEP, 2012, p. 87). Para segundo y tercer años, se proyecta la representación de números mediante el uso de conceptos y relaciones matemáticas abordadas, mediante el uso de material didáctico (manipulativos), representaciones icónicas, simbólicas y gráficas, como su ubicación en la recta numérica.

El II ciclo se dirige al fortalecimiento del cálculo —aritmético—, mediante la exposición de operaciones con números naturales, con fracciones y decimales. En cuarto año, por ejemplo, se expone la lectura y escritura de números naturales y decimales, y el estudio de las fracciones mediante distintas formas de representación. También, se impulsa el uso de distintas representaciones cuando se abordan las operaciones. Para quinto año se acentúa el uso de representaciones en la exposición de las fracciones y los números decimales. En el último año de la Educación Primaria, destacan las representaciones la exposición de las potencias y otras vinculadas con el estudio de las fracciones y las operaciones con estas.

A manera de síntesis, los planteamientos curriculares para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas escolares en Costa Rica destacan e impulsan el uso de representaciones diversas para el concepto de número. Como se indica

para primer año, “se pretende comprender el significado de los números para establecer diferentes representaciones. Es importante que la o el estudiante pueda expresar de diversas formas que un número (...). Previamente, la acción estudiantil debe ir orientada a expresar verbalmente equivalencias” (MEP, 2012, p. 101).

En este orden de ideas, el conocimiento matemático de docentes de educación primaria requiere de una diversidad de formas de representación que promueva la asignación de significado al concepto de número, por parte del estudiantado, a lo largo de los ciclos educativos. Los sistemas de representación son esenciales en la enseñanza de las matemáticas en Educación Primaria.

La formación inicial de docentes y la educación matemática

La persona docente de educación primaria debe mostrar una alta comprensión de los conceptos y los procedimientos que describen y caracterizan las asignaturas del currículo educativo. Asimismo, debe caracterizarse por contar con distintas competencias pedagógicas para el desempeño de su profesión.

De allí, que los procesos de formación inicial de docentes de educación primaria deban constituir una fuente de conocimientos, capacidades y habilidades que promuevan la formación de una persona profesional competente, en las letras y las ciencias, preparado desde la práctica educativa y que cuente con iniciativas para la formación permanente y la investigación en el aula (Llinares, 2008). Su importancia se hace notoria en distintas investigaciones sobre la formación inicial y el conocimiento del profesorado de educación primaria (Alpízar y Arce, 2019; Valverde, 2014).

En el caso de las matemáticas, es fundamental que tanto el maestro como la maestra cuenten con un sólido conocimiento del contenido matemático y pedagógico, de manera que puedan entrelazar las matemáticas con distintas estrategias y recursos para su enseñanza, que promuevan el aprendizaje en sus estudiantes, más allá de sus propias creencias y concepciones. Siguiendo a Arteaga y Macías (2016):

La labor de un maestro o profesor es demasiado importante como para que la acción educativa desarrollada en el aula se base exclusivamente en la percepción personal que el docente tenga

tanto del proceso de enseñanza-aprendizaje como de la propia área de conocimiento a impartir. (p. 20)

En Costa Rica, la formación inicial de docentes de educación primaria está a cargo de tres universidades estatales y alrededor de ocho universidades privadas. Alpízar-Vargas y Alfaro-Arce (2019) han descrito los planes de formación de docentes para educación primaria. En resumidas cuentas, su estudio ha reconocido que estos programas, en las universidades estatales, incluyen asignaturas sobre: (a) la pedagogía, didáctica general, psicología y educación; la composición del sistema educativo, administración, gestión educativa, legislación y ética; la evaluación y el planeamiento didáctico; las modalidades educativas: educación rural, escuelas unidocentes, educación para jóvenes y personas adultas; el desarrollo infantil, neurociencia, necesidades educativas especiales, innovación educativa y metodologías de enseñanza; (b) las materias básicas como español, estudios sociales, ciencias, incluyendo cursos de didáctica específica para estas asignaturas; (c) las matemáticas, su didáctica específica y la estadística; (d) la práctica docente; (e) la investigación educativa; (f) el uso de herramientas tecnológicas; y (g) otras asignaturas enmarcadas en el estudio de otros idiomas, estudios generales, asignaturas optativas, deportivas, artísticas, culturales y del medio ambiente, entre otras.

En relación con la idea anterior, la formación matemática incluye el estudio de una diversidad de conceptos y procedimientos matemáticos, en concordancia con los lineamientos curriculares para este nivel educativo. A continuación, se presenta una síntesis de los contenidos matemáticos incluidos en los cursos de matemáticas en las universidades estatales de Costa Rica.

En la Universidad de Costa Rica (UCR) la formación de docentes de educación primaria, hasta el nivel de bachillerato, incluye tres asignaturas asociadas a las matemáticas y su enseñanza.

- Matemática para la educación primaria I. La organización de los contenidos de este curso incluye el estudio del número natural y los sistemas de representación. Continúa con el abordaje de la estructura aditiva y multiplicativa de los números naturales; los números racionales y el significado de las fracciones; y las relaciones y álgebra, desde el estudio de las razones, la proporcionalidad, la igualdad, las cantidades constantes y variables. En el programa del curso destaca el

estudio de las representaciones del número como el primer tema a desarrollar (UCR, 2020a).

- Matemática para la educación primaria II. En esta asignatura se enfatiza el estudio de conceptos básicos de la geometría plana y del espacio; continua con las magnitudes y la medida. Finalmente se abordan las traslaciones, giros y simetrías como movimientos en el plano (UCR, 2020b).
- Matemática para la educación primaria III. Se orienta al estudio de los conceptos y nociones básicas de la estadística descriptiva, las representaciones de la información, la probabilidad y los materiales y recursos para su enseñanza (UCR, 2020c).

Complementariamente, se incluye el curso Seminario: investigación en didáctica de la matemática en la etapa escolar centrado en el estudio de los organizadores del currículo y su especificidad para la matemática en la educación primaria en Costa Rica. (UCR, 2020d).

La formación de los maestros y las maestras de primaria en la Universidad Nacional (UNA) se compone de dos cursos sobre didáctica de las matemáticas para el nivel de bachillerato, entre otras asignaturas. Cabe destacar que el contenido matemático no se percibe como un componente “fuerte” de las asignaturas (UNA, 2015).

- Didáctica de la Matemática para la Educación Básica. Esta asignatura incluye temáticas vinculadas a las matemáticas desde una perspectiva didáctica; esto es, toma en cuenta la enseñanza, el aprendizaje, las estrategias metodológicas y la planificación de la clase de matemáticas, entre otros.
- Didáctica de las Ciencias y la Matemática para la Educación Básica. Incluye el estudio de la propuesta curricular para la enseñanza de las ciencias y matemáticas.

El Programa de formación de la Universidad Estatal a Distancia (UNED) destaca tres cursos relacionados directamente con las matemáticas y su didáctica, para el nivel de bachillerato.

- Matemática I para I y II ciclos. Pretende preparar a la persona docente de primaria en contenido matemático y didáctico. En cuanto al contenido matemático, apunta al estudio de los

sistemas de numeración, el conjunto de los números naturales, la teoría de números y el conjunto de los números racionales positivos. En los objetivos del curso se reconoce el abordaje del concepto de número: “Describir las características que diferencian los conceptos sistema numérico y sistema de numeración, así como número y numeral” (UNED, 2020a, p. 3)

- Matemática II para I y II ciclos. En este curso se aborda el estudio de la proporcionalidad, las magnitudes y la medida, la probabilidad y los elementos básicos de la estadística. El abordaje didáctico enfoca estrategias para la enseñanza de los conceptos matemáticos y estadísticos considerados (UNED, 2020b).
- Matemática III para I y II ciclos. Este curso se centra en el estudio de la geometría, particularizando en conceptos básicos y sus relaciones, los triángulos, los cuadriláteros, la circunferencia, los sólidos y las transformaciones geométricas (UNED, 2020c)

A manera de síntesis, se puede indicar que la formación matemática de docentes de educación primaria en Costa Rica se caracteriza desde dos ámbitos. Primero, algunos programas de formación incluyen el estudio de conceptos matemáticos básicos, asociados a la aritmética, la medida, la geometría, la probabilidad y la estadística. Con especificidad, en estos programas —en el tema de aritmética— se aborda el concepto de número, procurando su comprensión, el establecimiento de distintos modos de uso y su representación diversa como objeto matemático. Este abordaje matemático se acompaña del estudio de estrategias de mediación pedagógica para la enseñanza de los conceptos y procedimientos. Segundo, los planes de estudio se basan en el fomento de capacidades para el establecimiento de estrategias de planeación, mediación y evaluación, que incentiven la comprensión y el aprendizaje de conceptos y procedimientos matemáticos en el estudiantado de primaria, donde el abordaje de conceptos y procedimientos matemáticos es un componente para el logro de la finalidad didáctica principal.

La representación de conceptos en las matemáticas escolares

En un marco general, las representaciones se conciben como ideas o imágenes que sustituyen a la realidad o a algún elemento de esta; “una cosa que representa a otra” (Real Academia Española, 2020). Sin embargo, en el marco de la Didáctica de la Matemática, la propuesta es diferente y variada.

En relación con este tema, Castro y Castro (2012) presentan las representaciones como “las notaciones simbólicas o gráficas, específicas para cada noción, mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos matemáticos, así como sus características y propiedades más relevantes” (p. 96). Desde esta postura, las representaciones no son generales a los conceptos, estas se definen y responden a las singularidades de cada concepto.

Por su parte, otras personas investigadoras concuerdan en que resulta trascendental contar o exponer una variedad de representaciones para un mayor entendimiento y comprensión del concepto matemático. Siguiendo a Rico (2012), las representaciones posibilitan una mayor interacción y acceso al conocimiento matemático. Vinner y Hershkowitz (1983) —particularmente en geometría— subrayan la presentación de ejemplos en diferentes orientaciones, cuando se abordan los conceptos.

Desde la perspectiva de Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez (2008), un amplio conocimiento de sistemas de representación, de las relaciones entre estos, entre los sistemas de representación y el concepto, conduce a una comprensión completa del concepto matemático y su significado. En esta línea, Barrantes, López y Fernández (2015) sostienen que “una escasa variedad de representaciones puede conllevar a una formación errónea de un concepto (...) y, por lo tanto, derivar en errores y dificultades posteriores.” (p. 109). Un uso “restringido” de representaciones puede conducir a la creación de esquemas mentales alejados de la realidad del concepto (Barrantes y Zapata, 2008). Pero no basta con una multiplicidad de representaciones para hacer presente un concepto, es necesario tomar en cuenta el origen de la representación y su incidencia en el conocimiento de los individuos.

Duval (2016), por su parte, acentúa que las representaciones son herramientas comunes que posibilitan la comunicación de representaciones mentales específicos que, además, permiten la producción de nuevo conocimiento. “Las representaciones pueden ser creencias, concepciones o concepciones erróneas individuales a las que cada quien accede a través de sus producciones verbales o esquemáticas.” (p. 61)

El planteamiento curricular en Costa Rica no se aleja de estas ideas en cuanto a las representaciones de concepto matemáticos. El MEP apuesta por el uso de una diversidad de sistemas de representación durante la enseñanza de las matemáticas. Con detalle, se insiste que “el cultivo de las representaciones diversas permite una organización mejor de las ideas matemáticas, para así avanzar en su comprensión y el desarrollo de nuevas formas matemáticas” (MEP, 2012, p. 58). Se insta a la persona docente para que utilice representaciones no convencionales y personales en los primeros años de escolaridad, y que su exposición gradualmente cambie a formas más convencionales y técnicas, conforme se avanza a niveles superiores.

Se observa que las representaciones matemáticas son símbolos, expresiones, diagramas o gráficos, que cambian y, por tanto, exigen una variedad de acciones de enseñanza y aprendizaje. Las representaciones se conciben como un medio para unificar el discurso, la comunicación.

Es muy importante que de manera escalonada se pueda avanzar en la abstracción de las representaciones matemáticas para potenciar el conjunto de matemáticas que se pueden aprender y usar. Con el progreso de distintas formas de representación, cada vez con mayor abstracción, se ofrecen más oportunidades para construir modelos más interesantes y complejos en distintas situaciones. (MEP, 2012, p. 58)

METODOLOGÍA

El estudio realizado es de tipo descriptivo basado en un estudio de casos. Siguiendo a Stake (1999) corresponde a un estudio intrínseco de casos, ya que “el caso viene dado. No [...] interesa porque con su estudio aprendamos sobre otros casos o sobre algún problema general, sino porque necesitamos aprender sobre ese caso particular” (p.16); es decir, el caso fue preseleccionado y su elección se aparta de una selección intencionada sobre otros casos, como ocurre en el estudio instrumental de casos.

Metodológicamente se implementa el análisis de contenido (Rico y Fernández-Cano, 2013), que posibilita el estudio de significados de un concepto desde tres categorías: los sistemas de representación, la estructura conceptual, y los contextos y situaciones. En este caso, se destaca el estudio de los sistemas de representación, a partir de la categoría de representaciones. Otras

investigaciones, por ejemplo, han implementado esta técnica para el estudio de conceptos y sus significados, desde la óptica de los modos de uso que los profesores en formación otorgan a conceptos matemáticos particulares (Author).

Descripción de participantes

Las personas participantes corresponden a un grupo de 23 estudiantes que cursaban la asignatura XXXX, de la carrera de Educación Primaria de la Universidad XXXX, durante el periodo académico 20181. Esta asignatura se ubica en el VII ciclo del Plan de Estudios, correspondiente al cuarto año de carrera. Como se ha indicado en la fundamentación teórica, su formación ya incluía una instrucción matemática, mediante asignaturas como Matemáticas en la educación primaria I y II, y una capacitación pedagógica, a través de asignaturas como Ciencias de la educación primaria I y II. Otras asignaturas cursadas por quienes participaron se vinculan a distintas áreas del conocimiento, como el idioma, la literatura, las artes y la investigación.

Recolección de la información

La información se recogió mediante un cuestionario. Cada participante se identifica mediante su cuestionario a través de un código; por ejemplo, C-R01 es el cuestionario con las respuestas de la persona participante 1. En este instrumento, las personas docentes de educación primaria en formación inicial debían proporcionar diversas representaciones para el concepto de número. Primero, fueron solicitadas dos formas para representar el concepto. Segundo, se indicaba a las personas informantes que eligieran una de las representaciones entre las dos proporcionadas, aquella que más les hacía sentir más seguridad, y justificar su elección. Finalmente, debían incluir otras formas de representar el número, distintas a las expuestas en las primeras cuestiones. El instrumento se aplicó en una de las sesiones de clase y fue completado de manera individual.

Análisis de la información

¹ Las personas participantes manifestaron su consentimiento para el uso de la información en el estudio.

Para el análisis de la información se consideró como categoría primaria a las representaciones. Las unidades de análisis se definieron a partir de la propuesta de Duval (1993) para el estudio de registros de representación. A continuación, se muestra una descripción de las representaciones consideradas (Arteaga-Martínez, Macías y Pizarro, 2020; Author, 2013).

- Verbal. Corresponde al uso de lenguaje natural.
- Simbólico-numérico. Destaca el uso de sistemas de numeración, particularmente el decimal.
- Simbólico-algebraico. Refiere a expresiones analíticas o algebraicas.
- Gráfica. Incluye al plano cartesiano y sus componentes.
- Icónico. Destaca el uso de imágenes o pictogramas, incluidas las figuras geométricas.
- Tabular. Organización de la información mediante filas y columnas.

Una vez recogida la información, se analizaron las respuestas de los participantes de manera individual. Se identificaron y describieron las representaciones proporcionadas en cada ítem del cuestionario. Luego, estas fueron clasificadas.

ANÁLISIS Y RESULTADOS

En lo que sigue se muestran los resultados obtenidos con el análisis de la información recabada; esta pone en evidencia las representaciones que un grupo de docentes asignó al concepto de número en un momento particular de su formación profesional.

La información de esta sección se ha organizado en tres apartados que destacan: (a) las primeras representaciones de número que proponen las personas docentes en formación inicial, (b) la justificación que externan para el uso de una representación particular y (c) la diversidad de representaciones propuesta. Algunos datos se han organizado en tablas para una mayor facilidad en la presentación de estos.

Las representaciones primarias

Las denominadas representaciones primarias corresponden a aquellas que fueron seleccionadas en primera instancia por quienes participaron, para hacer presente el concepto de número, como respuestas al ítem 1. Es decir, estas muestran la intención inicial —la primera ocurrencia— de las personas docentes en formación para representar el número. La información que se muestra en la tabla 1, destaca la representación indicada como A y la representación mostrada como B.

Table 1

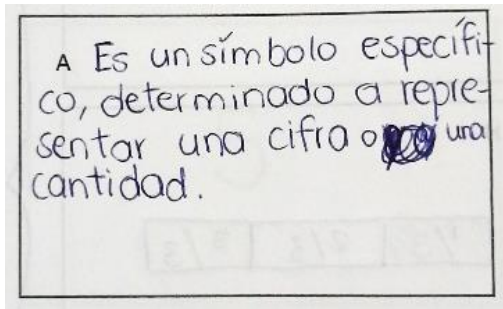
Representaciones primarias A y B proporcionadas por docentes de primaria en formación inicial de la XXXX en 2018

Verbal	Numerical symbolic	Algebraic symbolic	Iconic	Graphical	Combination
Representation A					
4	8	1	7	2	1
Representation B					
2	8	3	7	0	3

Como se observa en la tabla 1, en las soluciones a este ítem se identifican en total 6 representaciones de tipo verbal, 16 representaciones simbólico-numéricas (uso de signos numerales), 4 representaciones simbólico-algebraicas (uso de letras o signos), 14 representaciones icónicas y 2 representaciones gráficas (basadas en el uso de la recta numérica). Resulta claro el predominio de las representaciones simbólico-numérico e icónica tanto en la primera como en la segunda representación solicitadas. La figura 1 ejemplifica el uso de la representación verbal; en esta se muestra una explicación de lo que la persona participante C-R22 concibe como número.

Figure 1

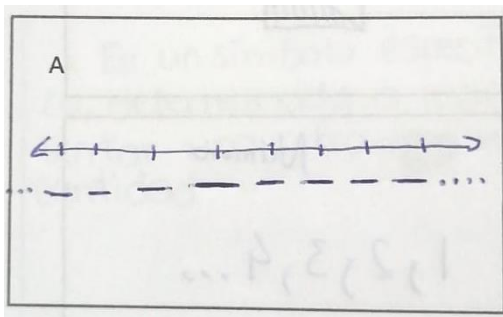
Ejemplo de representación verbal del concepto de número (C-R22's answer to item 1, 2018)



La figura 2 muestra una representación gráfica, en la que participante C-R09 intenta mostrar al número como un lugar en la recta.

Figure 2

Ejemplo de representación gráfica del concepto de número (C-R09's answer to item 1, 2018)

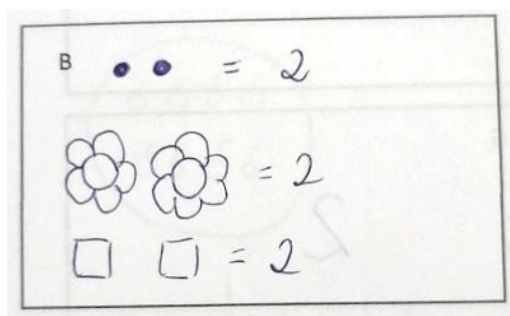


Estas representaciones primarias, consideradas por docentes en formación inicial, ponen en relieve una tendencia —o una intencionalidad— hacia el uso de la simbología numérica y las ilustraciones o pictogramas para mostrar el concepto de número.

Aunado a lo anterior, se reconoce el uso de representaciones combinadas por parte de las personas participantes en el estudio. Por ejemplo, se identifican dos representaciones que combinan el uso de pictogramas con lo simbólico-numérico (figura 3), una representación que reúnen verbal con simbólico-numérico y una representación que integra representaciones simbólicas numéricas y algebraicas.

Figure 3

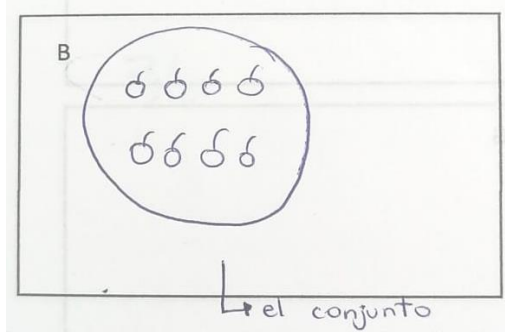
Ejemplo de representación combinada icónica-numérica (C-R22's answer to item 1, 2018)



En las respuestas al ítem 1, toma un realce particular el uso de la noción de conjunto en tres de las representaciones icónicas. A diferencia de la mayoría de las representaciones que usan ilustraciones o pictogramas de manera independiente (no combinadas), tres participantes utilizaron este tipo de representación incluyendo una representación conjuntista —una agrupación de objetos—. La figura 4 destaca un ejemplo donde informante C-R23 utiliza la representación de conjuntos para mostrar el número.

Figure 4

Ejemplo de uso de representación conjuntista en una representación icónica (C-R23's answer to item 1, 2018)



Las justificaciones para el uso de las representaciones

Con el ítem 2 del cuestionario se recogió información sobre la representación que elegirían las personas participantes —de las dos representaciones mostradas en la respuesta del ítem 1— para hacer presente el concepto de número, y sobre el porqué de su selección.

En cuanto a la selección de una representación, diez participantes indicaron que elegirían la representación icónica para mostrar el concepto de número; seis se inclinarían por la representación simbólico-numérica, y quienes mostraron una combinación de representaciones se inclinarían por esta opción —la combinación de representaciones—. Junto a estos, dos participantes escogerían la representación gráfica y uno la simbólico-algebraica.

Las expresiones que justifican esta selección de una representación son diversas, aunque algunas coinciden en cuanto a la idea mostrada. La tabla 2 presenta una síntesis de las justificaciones proporcionadas por participantes para la elección de cada representación.

Table 2

Criterios que justifican la selección de una representación por parte de los docentes de educación primaria en formación inicial en la XXXX en 2018

Representación elegida	Síntesis de justificaciones
Icónica	<p>Para vincularlo con una cantidad de objetos</p> <p>Para vincular lo abstracto con lo concreto</p> <p>Para hacer más visual el concepto</p> <p>Para mostrar la cardinalidad de conjuntos de objetos</p> <p>Por la sencillez de su implementación</p> <p>Para atraer la atención del estudiante</p>
Simbólico-numérica	<p>Para asociar un símbolo con una cantidad</p> <p>Por el uso universal de símbolos numéricos</p> <p>Por la familiaridad del estudiante con este tipo de representación</p> <p>Para contribuir a la lectoescritura</p> <p>Para exponer la secuencia numérica</p>
Combinación	<p>Para vincular un conjunto de elementos a un número</p> <p>Para disminuir la abstracción</p> <p>Para la implementación de actividades lúdicas</p>
Gráfica	<p>Para fomentar la comprensión de relaciones de orden</p> <p>Para inducir a la noción de infinitud</p>
Simbólico-algebraica	<p>Por la generalidad que esta produce</p>

En cuanto a las justificaciones vinculadas a la elección de representaciones icónicas sobresalen los argumentos asociados al uso de lo concreto, visible y tangible, en vez de lo abstracto, así como aquellos que toman base en la contextualización del concepto de número. Algunos ejemplos de estas expresiones son los siguientes: participante C-R14 destaca que “en la fase inicial es preciso relacionar un concepto abstracto a algo que se pueda ver, palpar y se relacione con facilidad a conocimientos previos para cuando se llegue a la comprensión se establezca con un símbolo”; participante C-R04 resalta que “es más concreto y le permitirá al estudiante visualizar su significado, posteriormente utilizaría la A [una representación simbólico-numérica]” y participante C-R15 argumenta que “las imágenes son más concretas para adquirir el concepto de número”. Otro aspecto relevante tiene que ver con la ligazón que se establece entre el número y la cantidad, en este caso a una cantidad variable de objetos o de elementos de un conjunto. Al respecto, participante C-R11 destaca que “el número es la expresión que indica cardinalidad de elementos en un conjunto, por lo que la representación con figuras, elementos o dibujos es más fácil”.

La elección de representaciones simbólico-numéricas —mostradas como algún símbolo de la numeración indo-arábiga— se justifica principalmente por el uso común de esta simbología y su utilización en distintas situaciones cercanas al estudiante. Por ejemplo, participante C-R07 justifica la elección de la representación simbólico-numérica indicando “porque está compuesta de símbolos numéricos comunes y universales para nuestro contexto”; por su parte informante C-R05 acentúa “pues considero que es la forma sobre la cual están más familiarizados los estudiantes” y participante C-R23 señala “considero que esta sería la mejor representación puesto que esta será la que mayoritariamente usarán los niños a lo largo de su vida”.

El uso de una combinación de representaciones se justifica desde dos aristas: (a) la necesidad de establecer un vínculo entre una cantidad de objetos concretos y una representación simbólica y (b) la necesidad de lograr un nivel de abstracción sobre el número a partir de la presentación de elementos concretos.

Por último, el uso de la recta para representar el concepto de número adquiere sustento en la noción de infinitud, de la densidad que caracteriza al conjunto de números reales —esto se interpreta de las justificaciones de los

participantes— y en la oportunidad que se tendría para introducir las relaciones de orden. Como ejemplo, la justificación mostrada por participante C-R09: “si no se comprende que el número es un elemento aislado de otros, no se podrá comprenderlo que es la continuidad o que hay cantidades mayores y menores a dicho número”.

La diversidad de las representaciones

Finalmente, quienes participaron indicaron otras representaciones que utilizarían para representar el concepto de número. El ítem 3 especificaba que estas representaciones debían ser distintas a las mostradas en el ítem 1.

En los resultados se observa que una de las personas participantes incluyó cuatro representaciones adicionales para el concepto de número; 11 participantes agregaron tres representaciones; cinco incluyeron dos representaciones; cuatro adicionaron una representación y tres participantes no incluyeron más representaciones, a parte de las dos indicadas en el ítem 1.

El análisis de las representaciones permite afirmar que estas, en su mayoría, pertenecen a la misma categoría de las representaciones primarias. Por ejemplo, participante C-R06 mostró una representación verbal y una combinación de representaciones (simbólico-numérica y verbal) en el ítem 1; sus representaciones adicionales en el ítem 3 fueron tres, estas combinan dos representaciones: icónica y simbólico-numérica. Ahora, cabe destacar que informante C-R07 presenta cuatro representaciones adicionales: combinada, simbólico-algebraica, gráfica e icónica, tres de ellas distintas a las preliminares (icónica y simbólico numérica).

Para el total de participantes que mostraron tres representaciones adicionales, al menos una de estas pertenecía a la misma categoría de las representaciones preliminares. Por ejemplo, informante C-R15 incluyó icónica y simbólico-numérica en las representaciones preliminares y las adicionales incluyeron una representación simbólico-algebraica, una verbal y una simbólico-numérica.

En cuanto a quienes agregaron dos representaciones adicionales, solo una persona participante (C-R03) incluyó representaciones de distinta categoría a sus preliminares; y todos aquellos participantes que incluyeron una representación adicional lo hicieron utilizando una categoría de representación diferente. Por ejemplo, informante C-R12 había mostrado representación

icónica y verbal en el ítem 1, y la adicional corresponde a una representación simbólico-numérica. Cabe destacar que las personas informantes C-R02, C-R06 y C-R19 respondieron el ítem con tres representaciones adicionales de la misma categoría.

CONCLUSIONES

El estudio ha permitido reconocer que, al momento de hacer presente el concepto de número, personas docentes de educación primaria en formación inicial se inclinan por el uso de las representaciones icónica y simbólico-numérica. El uso de una variedad de ilustraciones, referentes a alimentos, flores, animales, objetos geométricos, útiles escolares, entre otros, destaca en cuanto a la utilización de representaciones icónicas. Las representaciones simbólico-numéricas se centran en la presentación de símbolos numéricos del Sistema de Numeración Decimal, así como —en menor grado— de símbolos de los sistemas de numeración romano, maya y egipcio. Estos dos tipos de representaciones son los de mayor uso cuando de representaciones combinadas se trata.

En cuanto a las justificaciones indicadas, por quienes participaron en el estudio, para la elección de un tipo de representación pueden establecerse las afirmaciones siguientes. Algunos de los argumentos se vinculan a la utilidad del concepto. Esto coincide con lo propuesto por Castro, Rico y Castro (2007) quienes afirman que los números son utilizados de diversas formas, entre las que destacan establecer una secuencia verbal, para contar, expresar una cantidad de objetos o medir, para marcar una posición o indicar un código o símbolo.

Por otra parte, otros argumentos enfatizan el uso de determinadas representaciones relacionándolas con estrategias de enseñanza que favorezcan el aprendizaje del estudiantado de primaria. Como indican Arteaga-Martínez, Macías y Pizarro (2020) las representaciones “son solo una pequeña muestra de los recursos que disponemos en la construcción y enseñanza del conocimiento matemático” (p. 269). Por ejemplo, las representaciones icónicas mostradas por parte de quienes participaron en este estudio se asocian con el uso de materiales didácticos (concretos, tangibles) con el propósito de que promuevan la visualización y hagan más fácil el proceso de comprensión del concepto de número.

También, los resultados permiten concluir que un grupo de participantes pretende que el uso de determinadas representaciones —principalmente la icónica— posibilite el desarrollo del concepto de número en el estudiantado, por ejemplo, mediante la contextualización de tareas matemáticas. En relación con esta idea, se ponen de manifiesto dos aspectos: (1) con las representaciones propuestas se busca que el estudiantado de educación primaria desarrolle de manera sistemática el concepto de número, a través de la identificación de símbolos y términos numéricos, y del establecimiento de relaciones entre estos y situaciones variadas; y (2) este grupo de docentes en formación inicial manifiesta conocer las directrices curriculares para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en Costa Rica, en las que la contextualización activa se presenta como “un componente pedagógico especial” (MEP, 2012, p. 17) para el planteo y la resolución de problemas en contextos reales.

Además, ha quedado en evidencia que las representaciones mostradas forman parte de las propuestas teóricas sobre los sistemas o modos de representación de un concepto matemático (Castro y Castro, 1997; Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2008; Maz y Rico, 2009; González-Ruiz y Molina, 2015). Se identifican representaciones independientes de tipo verbal, simbólico-numérico, simbólico-algebraico, icónica y gráfica; otras combinan algunas de estas con el propósito de explicitar lo que se muestra: el concepto de número. El grupo de participantes omite las representaciones tabulares para hacer presente el concepto de número.

A pesar de que el uso heterogéneo de representaciones es escaso —considerar representaciones de distintos tipos—, la mayoría de las personas participantes (17) propone al menos tres representaciones distintas con las que mostrarían el concepto de número. Esto podría conducir a un abordaje adecuado del concepto en el proceso de enseñanza, desde su presentación mediante diversos registros de representación. No obstante, la utilización de estas representaciones variadas debe ser cuidadosa y justificada, pues constituye “el umbral de la comprensión matemática para los aprendices en cada etapa del currículo (...) [que] depende de la coordinación de varios registros de representación” (Duval, 2016, p. 91). Los resultados del estudio proporcionan información sobre el tratamiento que docentes de educación primaria en formación inicial le dan al concepto de número. Esto contribuye a que se enfatice en la diversidad de los sistemas de representación asociados a conceptos matemáticos durante los cursos de formación.

Por último, conviene destacar algunas limitaciones y posibles investigaciones futuras vinculadas al estudio llevado a cabo. Primero, a pesar de contar con un número adecuado de representaciones en las respuestas del cuestionario, hubiese sido deseable que todo el grupo de participantes proporcionaran las representaciones solicitadas; esto es, que el ítem 3 tuviese al menos cuatro representaciones adicionales a las dos indicadas en el ítem 1. Esto hubiese conducido a un estudio con una diversidad mayor de representaciones. Segundo, se enfatiza la necesidad de profundizar en las relaciones que este grupo de docentes —y docentes en general— establece entre las representaciones y los distintos fenómenos que muestran sobre el concepto de número. Por su parte, de manera complementaria, puede indagarse sobre las situaciones y los contextos que las personas docentes proponen para el estudio del concepto de número y de otros conceptos matemáticos, en apego a las directrices curriculares emitidas para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en educación primaria en Costa Rica.

AGRADECIMIENTOS

Este estudio forma parte del proyecto PGC2018-095765-B-I00, titulado “Competencia profesional del profesor en formación inicial y educación STEM (PROFESTEM)”.

REFERENCIAS

- Alpízar-Vargas, M. & Alfaro-Arce, A. L. (2019). Percepción de un grupo de docentes de educación primaria acerca de la preparación recibida durante su formación universitaria en cuanto al tema de las Matemáticas [Perception of a Group of Elementary School Teachers About Their College Math Training]. *Revista Actualidades Investigativas en Educación*, 20(1), 1-31. <http://doi.org/10.15517/aie.v20i1.39978>.
- Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52(3), 215-241. <http://doi.org/10.1023/A:1024312321077>

- Arteaga, B. & Macías, J. (2016). *Didáctica de las matemáticas en educación infantil* [Didactic of mathematics in preschool education]. Universidad de La Rioja.
- Arteaga-Martínez, B., Macías, J. & Pizarro, N. (2020). Representation in the solution of mathematical problems: An analysis of metacognitive strategies of secondary education students. *Uniciencia*, 34(1), 263-280. <http://doi.org/10.15359/ru.34-1.15>
- Barrantes, M. & Zapata M. A. (2008). Obstacles and errors in the teaching and learning of geometrical figures. *Campo Abierto*, 27(1), 55-71. <https://mascvuex.unex.es/revistas/index.php/campoabierto/article/view/1985>
- Barrantes, M., López, M. & Fernández, M. A. (2015). Análisis de las representaciones geométricas en los libros de texto [Analysis of geometric representations in textbooks]. *PNA*, 9(2), 107-127. <http://hdl.handle.net/10481/34157>
- Castro, E. & Castro, E. (1997). Representaciones y modelización [Representations and modeling]. In Rico, L. (Coordinador) *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (2nd ed.) (pp. 95-124). Horsori.
- Castro, E. & Castro E. (2016). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación infantil* [Teaching and learning of mathematics in early childhood education] (Eds.). Pirámide.
- Castro, E., Rico, L. & Castro E. (2007). *Números y operaciones. Fundamentos para una aritmética escolar* [Numbers and operations. Bases for school arithmetic] (4ª ed.). Síntesis.
- Chaverri-Hernández, J., Hernandez-Arce, K., Castillo-Céspedes, M. J., Vallejos-Meléndez, D. & Picado-Alfaro, M. (2020). What modes of use does the mathematics teacher propose in initial training to teach the Pythagorean theorem in secondary education? *Uniciencia*, 34(1), 88-110. <http://doi.org/10.15359/ru.34-1.6>
- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Science Cognitives*, 5, 37-65. Translated to Spanish as: Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. In F. Hitt,

(Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 173-201). Iberoamérica.

- Duval, R. (2016). Un análisis cognitivo de problemas de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas [A cognitive analysis of comprehension problems in learning mathematics]. In R. Duval & A. Sáenz-Ludlow (Eds.), *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas* (pp. 61-94). Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Etchegaray, S. C. (2017). Análisis de significados personales e institucionales sobre prácticas de divisibilidad en el marco del enfoque ontosemiótico [Analysis of personal and institutional meanings on divisibility practices within the framework of the ontosemiotic approach]. In J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone, & M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. <http://enfouqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html>
- Fernández-Plaza, J. A., Castro-Rodríguez, E., Estrella, M., Martín-Fernández, E., Rico, L., Ruiz-Hidalgo, J. F. & Vilchez-Marín, M. (2016). Significado y concepciones de conceptos matemáticos escolares [Meaning and conceptions of school mathematical concepts]. In J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández, & A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 237-246). [In Spanish]. SEIEM.
- Frege, G. (1996). *Estudios sobre semántica. Escritos filosóficos* [Studies on semantics. Philosophical writings] (pp. 147-264). Crítica-Grijalbo Mondadori.
- González-Ruiz, I. & Molina, M. (2015). Representaciones y fenómenos que organizan la relación de equivalencia. Un estudio experimental con maestros en formación inicial en el contexto de la geometría básica [Representations and phenomena that organize the equivalence relation. An experimental study with pre-service teachers in the context of basic geometry]. In C. Fernández, M. Molina, & N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 309-316). SEIEM.

- Llinares, S. (2008). Constructing the necessary knowledge for teaching math: Social practice and technology. *Revista de Educación a Investigación*, 3(1), 7-30. <http://hdl.handle.net/10045/10435>
- Maz, A. & Rico, L. (2009). Negative numbers in the 18th and 19th centuries: phenomenology and representations. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 17, 537-554. <http://ojs.ual.es/ojs/index.php/EJREP/article/view/1343/1483>
- Ministerio de Educación Pública (2012). *Programa de Estudio. Matemáticas* [Study programme. Mathematics]. Autor.
- Picado, M., Gómez, B. & Rico, L. (2013). El análisis didáctico en el estudio del Sistema Métrico Decimal en un libro de texto histórico de matemáticas [Didactic analysis in the study of Metric System in a historical textbook of mathematics]. In L. Rico, J. L. Lupiáñez & M. Molina (Eds.), *Análisis didáctico en Educación Matemática. Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular* (pp. 403-414). Comares.
- Real Academia Española (2020). *Diccionario de la Lengua Española* (23th ed.). <https://dle.rae.es/representaci%C3%B3n?m=form>.
- Rico, L. (2013). Antecedentes del análisis didáctico en Educación Matemática [Background of didactic analysis in mathematics education]. In L. Rico, J. L. Lupiáñez & M. Molina (Eds.), *Análisis didáctico en Educación Matemática. Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular* (pp. 23-58). Comares.
- Rico, L. & Fernández-Cano, A. (2013). Análisis didáctico y metodología de investigación [Didactic analysis and research methodology]. In L. Rico, J. L. Lupiáñez & M. Molina (Eds.), *Análisis didáctico en Educación Matemática. Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular* (pp. 1-22). Comares.
- Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J. L. & Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales [Planning of school mathematics in secondary school. The case of natural numbers]. *Suma*, 58, 7-23.
- Stake, R. E. (1999). *Investigación con estudios de caso* [Research with case studies] (2ª ed.). Morata.

- Universidad de Costa Rica (2020a). *Matemática en la Educación Primaria I (FD0401)* [Mathematics in Primary Education I]. Escuela de Formación Docente. Sección de Educación Primaria.
- Universidad de Costa Rica (2020b). *Matemática en la Educación Primaria II (FD0515)* [Mathematics in Primary Education II]. Escuela de Formación Docente. Sección de Educación Primaria.
- Universidad de Costa Rica (2020c). *Matemática en la Educación Primaria III (FD0259)* [Mathematics in Primary Education III]. Escuela de Formación Docente. Sección de Educación Primaria.
- Universidad de Costa Rica (2020d). *Seminario Investigación en Didáctica de la Matemática en la etapa escolar (FD0264)* [Seminar. Research in didactic of mathematics in school level]. Escuela de Formación Docente. Sección de Educación Primaria.
- Universidad Estatal a Distancia (2020a). *Orientaciones académicas matemática I para I y II ciclos (Código 00809)* [Mathematical academic orientations I for cycles I and II]. Author. <http://orientacionesacademicas.uned.ac.cr/consultas/>.
- Universidad Estatal a Distancia (2020b). *Orientaciones académicas matemática II para I y II ciclos (Código 00810)* [Mathematical academic orientations II for cycles I and II]. Author. <http://orientacionesacademicas.uned.ac.cr/consultas/>.
- Universidad Estatal a Distancia (2020c). *Orientación académica matemática III para I y II ciclos (Código 02102)* [Mathematical academic orientations III for cycles I and II]. Author. <http://orientacionesacademicas.uned.ac.cr/consultas/>.
- Universidad Nacional (2015). *Actualización del plan de estudios de la Licenciatura en Pedagogía con énfasis en I y II ciclos de la Educación General Básica, en el marco de la flexibilización curricular 2013-2015*. CIDE. <https://www.cide-basica.una.ac.cr/index.php/documentos/category/1-plan-de-estudios>.
- Valverde, G. (2014). Experimentos de enseñanza: una alternativa metodológica para investigar en el contexto de la formación inicial de docentes [Teaching experiments: a methodological alternative to research in the context of the initial teacher training]. *Revista*

Actualidades Investigativas en Educación, 14(3), 1-20.

<http://doi.org/10.15517/AIE.V14I3.16095>

Vinner, S. & Hershkowitz, R. (1983). On concept formation in geometry.

ZentralblattfürDidaktik der Mathematik, 83(1), 20-25.

https://www.researchgate.net/publication/284382026_On_concept_formation_in_geometry