

Livro didático: uma Análise à Luz do Enfoque Ontossemiótico sobre Números Racionais

Patrícia Pujol Goulart Carpes ^a
Eleni Bisognin ^b

^aUniversidade Federal do Pampa, Campus Itaqui, Itaqui, RS, Brasil.

^bUniversidade Franciscana, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Santa Maria, RS, Brasil.

Recebido para publicação em 2 jul. 2020. Aceito após revisão em 7 sep. 2020

Editor designado: Claudia Lisete Oliveira Groenwald

RESUMO

Contexto: O livro didático é considerado por muitos professores como o principal guia para materialização do currículo. Devido a sua importância, nesse trabalho é feita uma análise de um livro didático do 7º ano do Ensino Fundamental sobre o conteúdo de números racionais. Para essa análise são empregadas as ferramentas teóricas e metodológicas do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática (EOS). **Objetivo:** o estudo visa verificar o grau de idoneidade didática do processo de instrução utilizado no livro texto. **Metodologia:** Desse modo, foi analisada a sessão do livro sobre números racionais utilizando-se as categorias descritas no EOS. Foram analisados os conceitos, procedimentos, situações-problema, definições e argumentações utilizadas pelos autores. **Resultados:** Pode-se inferir dos resultados obtidos, que são apresentados exemplos sobre os conceitos trabalhados, porém sem as devidas definições ou argumentações, prejudicando desse modo a generalização. A análise permite também destacar conhecimentos didático-matemáticos que podem orientar o professor quanto às possibilidades e limitações do livro didático a fim de alcançar uma maior idoneidade didática no processo de ensino e aprendizagem dos números racionais. **Conclusão:** o livro em estudo não deve ser considerado como um planejamento de um processo instrucional para atender as orientações curriculares em vigência.

Palavras-chaves: Livro didático, Números racionais, Enfoque Ontossemiótico.

Textbook: an Analysis in the Light of the Ontosemiotic Focus on Rational Numbers

ABSTRACT

Background: Many teachers consider the textbook the primary guide for the curriculum materialisation. This work analyses the content of the rational numbers in a textbook used in the 7th-grade of elementary school. For this analysis, the theoretical and methodological tools of the Ontosemiotic Approach to Knowledge and Mathematical Instruction (OSA) are used. **Objective:** Our goal was to understand the level of didactic suitability of the instruction process in the textbook.

Autor correspondente: Patrícia Pujol Goulart Carpes. Email: patriciacarpes@unipampa.edu.br

Design and setting: Thus, we analysed a section of the textbook about rational numbers using the categories described by OSA. Concepts, procedures, problem situations, definitions and arguments used by the authors were also analysed. **Results:** From the results obtained, we could infer that there are examples of the concepts worked in class, but without the proper definitions and arguments, hindering generalisation. The analysis also allowed us to highlight didactic-mathematical knowledge that can guide the teacher concerning the textbooks' possibilities and limitations, to achieve more didactic suitability in the process of teaching and learning rational numbers. **Conclusions:** the book under study should not be considered as planning for an instructional process to meet the current curriculum guidelines.

Keywords: Textbook, Rational numbers, Onto-semiotic approach.

INTRODUÇÃO

Os livros didáticos são amplamente adotados pelos professores para planejar e desenvolver conhecimentos matemáticos no ambiente de sala de aula. Estes recursos têm guiado processos instrucionais e cada vez mais se faz pertinente a análise de quais e como os objetos matemáticos são mobilizados para que se obtenha um processo idôneo. Em outras palavras, se os conhecimentos cognitivos (pessoais) dos alunos estão em equilíbrio aos institucionais, pretendidos ou utilizados pelo professor, dado o contexto e recursos didáticos disponibilizados.

Nesse estudo, propõe-se a análise de um livro didático do 7º ano do Ensino Fundamental, aprovado pelo PNLD 2017 e utilizado por parte dos professores da Rede Municipal de Ensino de um município do interior do Rio Grande do Sul, sobre o tópico números racionais, sob a ótica do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e Instrução Matemática, EOS, desenvolvido por Godino e colaboradores (Godino et al., 2007; Godino, 2017). O EOS é um sistema de ferramentas conceituais e metodológicas que subsidiam a investigação no campo da Educação Matemática. Desse modo, podem ser aplicadas à análise de um processo pontual, no desenvolvimento de uma sequência de ensino ou para analisar aspectos parciais de um processo de estudo, como um material didático (Godino et al., 2007).

A seção do livro didático analisada é tomada como uma sequência de práticas matemáticas e didáticas de um processo instrucional elaborada pelos autores. Neste sentido, são observados as definições, exemplos, procedimentos e problemas propostos para a mobilização dos conhecimentos matemáticos, como também os conhecimentos prévios necessários para o desenvolvimento das atividades.

Tendo em vista os conhecimentos pretendidos, a análise didática tem o papel de nortear o professor quanto à possibilidade de conflitos semióticos ou de concepções errôneas que podem vir a apresentar no processo instrucional adotado. Na perspectiva do EOS, os conflitos semióticos se referem

[...] a toda disparidade ou desajuste entre os significados atribuídos a uma mesma expressão por dois sujeitos (pessoas ou instituições) em interação comunicativa e

podem explicar as dificuldades e limitações no processo de ensino e aprendizagem implementadas. (Godino, 2002, p. 246).

Neste sentido o livro didático pode servir como um guia ao professor para a identificação de potenciais dificuldades e a previsão de soluções.

A seguir são apresentados o aporte teórico que servirá de guia para a análise dos resultados, a organização das configurações didáticas do livro texto e, por fim, as considerações finais e referências adotadas.

APORTE TEÓRICO

O EOS é um sistema modular que possui diferentes ferramentas para descrever, analisar e avaliar um processo instrucional. Neste caso, considera-se o livro didático como um processo instrucional planejado e pode-se aplicar as diferentes noções teóricas para sua análise, a saber: as configurações ontossemióticas, as configurações didáticas, as normas do entorno e a idoneidade didática do EOS.

As configurações ontossemióticas partem de uma formulação antropológica do objeto matemático que leva em consideração a Matemática como uma atividade de resolução de problemas, uma linguagem simbólica e um sistema logicamente organizado. Desse modo, o objeto matemático é toda entidade que participa do processo de *semiosis*, como por exemplo, interpretação e jogo de linguagem, conceitos, proposições, procedimentos, argumentos (Godino et al., 2007).

Nesse sentido, as configurações ontossemióticas orientam a identificação de conflitos epistêmicos, relativos aos significados e objetos institucionais que procede da lição e conflitos cognitivos, relacionados aos conhecimentos prévios, requeridos no desenvolvimento da seção e consideram os diversos significados dos objetos matemáticos e a identificação dos objetos e processos que emergem das práticas matemáticas requeridas (Burgos et al., 2019).

As configurações didáticas fazem uma análise micro do processo, ou seja, proporcionam critérios para decompor o processo de instrução em unidades de análise, as quais permitem analisar uma situação problema ou uma definição e vincular os conhecimentos implicados, os recursos e ações que o professor e os alunos realizam.

A ferramenta normativa está condicionada ao entorno do processo de ensino e aprendizagem isto é, se o processo instrucional está de acordo com o currículo, crenças e comportamentos que podem influenciar na aprendizagem desejada.

A idoneidade didática, segundo Burgos et al (2019), ajuda a formular o problema da análise didática dos livros em termos de caracterizar a idoneidade das trajetórias didáticas propostas e identificar possíveis mudanças para melhorar a aprendizagem dos alunos. As dimensões: epistêmica, cognitiva, ecológica, afetiva, mediacional e interacional, que

fazem parte da idoneidade didática, e suas articulações coerentes e sistêmicas, permitem avaliar um processo instrucional idôneo para conseguir adaptar os significados pessoais alcançados pelos alunos e os significados pretendidos pelo professor de acordo com o contexto e recursos disponíveis (Godino, 2017).

A dimensão **epistêmica** se refere ao grau de representatividade dos significados institucionais implementados ou pretendidos, a respeito de um significado de referência; a dimensão **cognitiva** se refere à proximidade dos significados pessoais alcançados aos significados pretendidos ou implementados; a dimensão **ecológica** diz respeito ao grau em que o processo de estudo se ajusta ao projeto educativo da escola e da sociedade e aos condicionamentos do entorno em que se desenvolve; a dimensão **interacional** se refere às trajetórias didáticas que permitem identificar os obstáculos semióticos e permitem superar as dificuldades que aparecem durante o processo de instrução; a dimensão **afetiva** diz respeito ao interesse dos estudantes no processo de estudo e, a dimensão **mediacional** se refere ao grau de disponibilidade e adequação dos recursos materiais e temporais necessários para o desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem. Todas essas dimensões podem servir de base para organizar um guia de análise de livros didáticos no qual se refletem as diversas variáveis que se deve considerar (Burgos et al., 2019).

Na sequência são detalhadas as dimensões da idoneidade didática para o tópico números racionais e as configurações didáticas organizadas para apresentar e analisar o processo instrucional sobre o livro didático selecionado.

Dimensões epistêmica e ecológica

A idoneidade da dimensão epistêmica se alcança quando se considera os conhecimentos institucionais sobre o objeto de estudo, isto é, o grau de representatividade dos significados parciais e holístico dos números racionais, assim como as concepções fundamentais do objeto e seus diferentes registros no processo instrucional (Carpes, 2019).

A noção de número racional parte da ideia de um construto teórico (dinâmico e interativo), no qual se pode construir o entendimento desde uma noção mais simples, denominada de subconstrutos, até uma forma mais precisa ou axiomática (Kieren, 1988).

Em se tratando do conhecimento referencial, pelas várias contextualizações que os números racionais permeiam, seus significados são distintos. Kieren (1980) aponta que a compreensão completa dos racionais requer não só a compreensão de cada um dos significados separados, mas como eles se relacionam. Os significados dos números racionais dados pelo autor são parte/todo, quociente, medida, operador e razão.

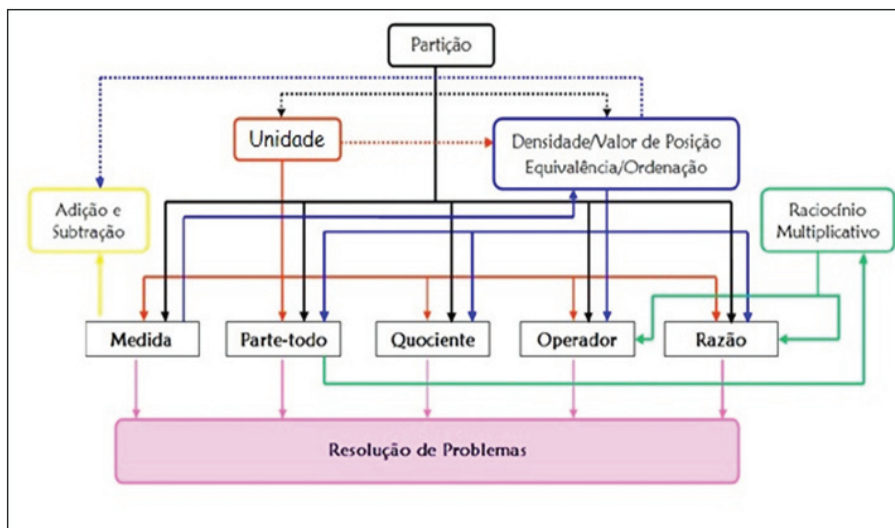
Os números racionais, conforme Behr et al., (1992, p.296), “são elementos de um campo infinito de quocientes que consiste em classes de equivalência e os elementos dessas classes de equivalência são frações”. Além disso, conforme Lamon (2007) há distinção

entre os termos frações e números racionais. Frações são representações possíveis dos racionais.

A Figura 1 ilustra o modelo teórico de Behr et al (1983), que esquematiza a transversalidade que envolve a compreensão do número racional. A capacidade de resolver problemas que envolvem os diferentes significados depende da compreensão das conceitos fundamentais para o entendimento dos números racionais.

Figura 1

Modelo de transversalidade para compreensão do número racional. (Adaptado de Ventura, 2013, p. 61)



O modelo de transversalidade criado para a compreensão do número racional indica que

A partição e unidade são a base para desenvolver o conhecimento de todos os significados dos números racionais, assim como, a noção de partição é fundamental para que a compreensão da unidade, equivalência e ordenação possa se desenvolver. A noção de equivalência/ordenação/densidade de frações é fundamental para que os alunos consigam somar e subtrair frações e que o significado de medida pode auxiliá-los. O significado parte/todo é base para o raciocínio multiplicativo e fundamental para a compreensão dos significados razão e operador. Por ser base para os outros, o significado parte/todo é o mais explorado e, muitas vezes, o único trabalhado em sala de aula (Magina & Campos, 2008). A compreensão dos cinco significados é a base para que o aluno consiga resolver problemas que envolvam números racionais (Carpes, 2019, p.21-22).

Na sequência são explicitados os conceitos fundamentais: partição, unidade, equivalência, densidade, valor posicional, ordenação, adição e subtração, raciocínio multiplicativo e os significados de parte/todo, quociente, medida, operador e razão.

- **Partição e unidade:** a unidade que representa o todo $\frac{n}{n}$ ($n \neq 0$) e a partição que representa as n partes iguais $\frac{1}{n}$ do todo.
- **Valor posicional:** indica que existe uma relação entre numerador e denominador, desta forma a fração deve ser vista como um único número (quantidade).
- **Densidade e ordenação:** entre dois números fracionários (ou racionais) existem infinitos números racionais e seguem uma ordem crescente.
- **Equivalência:** frações que representam a mesma quantidade (o mesmo quociente).
- **Soma e subtração:** o denominador determina o tamanho das partes e por isso tem de ser o mesmo em ambas as frações para operá-las.

O significado de **parte/todo** apresentado sob a forma $\frac{1}{n}$ ($n \neq 0$) em que esta fração representa uma ou mais partes da unidade que foi dividida em parte iguais (Lamon, 2006) normalmente é a base, isto é, o primeiro significado a ser explorado. Desta forma, a fração indica a comparação entre o numerador (número de partes que se toma da unidade dividida) e o denominador (número total de partes em que a unidade foi dividida).

O significado parte/todo é fundamental para o desenvolvimento de outros significados, no qual é possível desenvolver a noção de partição (em partes iguais) e, também a ideia entre partes e todo: as partes juntas devem reconstituir o todo; quanto mais partes tem o todo, menor é cada parte; independente da forma, tamanho ou orientação das partes, a relação entre as partes e o todo é conservada (Charalambous; Pitta-Pantazzi, 2006).

O significado de **quociente** remete à ideia de partilha, em que a fração $\frac{a}{b}$ indica o quociente $a:b$, $b \neq 0$. Neste significado, o entendimento de dividendo e divisor da operação de divisão deve estar claro pois, dividir em partes iguais é a base para que se compreenda os racionais como quocientes (Lamon, 2006). Desta forma, a pode ser maior, igual ou menor que b . O significado quociente extrapola o significado de parte/todo, uma vez que existem duas variáveis.

O significado **operador** está associado à ideia de modificar uma grandeza contínua, tanto aumentar quanto diminuir, considerando a fração imprópria ou própria respectivamente. Ideia equivalente quando a grandeza é discreta (Lamon, 2006). Silva (2005) aponta que este significado propicia ao aluno interpretar o multiplicador fracionário de pelo menos duas formas: $\frac{2}{5}$ significa 2 de $(\frac{1}{5})$ da unidade) ou $\frac{2}{5}$ significa $\frac{1}{5}$ de (duas vezes a unidade).

O significado **medida** possibilita ao aluno identificar a unidade de medida, determinar um comprimento e medir um comprimento por meio da repetição da unidade de medida – iteração (Lamon, 2006). A autora acrescenta que, a partir desse significado

podem ser exploradas também a unidade e a partição por meio de divisões sucessivas de uma unidade.

O significado **razão** do número racional surge da relação de duas quantidades, sendo necessário o raciocínio multiplicativo. Lamon (2006), afirma que se deve fazer uma distinção entre a noção de razão parte/parte (duas partes de um todo “ratio”) e a razão de grandezas de tipos diferentes (“rate”), dando origem a uma nova grandeza. Silva (2005) discute que o significado razão não permite associar a ideia de partição como os outros significados, mas a ideia de comparação entre duas grandezas.

Diante da exposição dos significados dos números racionais, percebe-se a diversidade e complexidade de ideias envolvidas e as diferentes contextualizações. Além da compreensão de cada significado, é preciso observar e explorar as ligações que os significados possuem. Kieren (1988) considera ser necessário o entendimento de cada significado e de suas conexões, para uma completa compreensão de número racional.

Além dos significados dos racionais, a sua linguagem (representação) também é necessária para sua compreensão, visto que os números racionais não são apenas as frações ou os decimais. Ainda, a interpretação de uma situação pode ser mais simples a um indivíduo numa representação do que em outra (Carpes, 2019).

A dimensão ecológica que contempla os condicionamentos do entorno, neste estudo tomou-se como referência o currículo proposto pela Base Nacional Comum Curricular, BNCC, (Brasil, 2017) que é o documento normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica.

A BNCC propõe cinco unidades temáticas para a matemática: números, álgebra, geometria, grandezas e medidas e estatística e probabilidade. Tomando como foco os números racionais que estão na unidade temática “números”, apresenta-se no tabela 1, os objetos de conhecimento e objetivos dispostos na BNCC para o 7º ano do Ensino Fundamental.

Tabela 1*Desenvolvimento dos objetos de conhecimento e objetivos para os números racionais (Brasil, 2017, p. 304-305)*

7º ano – Objetos de conhecimento	Objetivos
<ul style="list-style-type: none">• Fração e seus significados: como parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador.• Números racionais na representação fracionária e na decimal: usos, ordenação e associação com pontos da reta numérica e operações.	<p>Resolver um mesmo problema utilizando diferentes algoritmos.</p> <p>Reconhecer que as resoluções de um grupo de problemas que têm a mesma estrutura podem ser obtidas utilizando os mesmos procedimentos.</p> <p>Representar por meio de um fluxograma os passos utilizados para resolver um grupo de problemas.</p> <p>Comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros, resultado da divisão, razão e operador.</p> <p>Utilizar, na resolução de problemas, a associação entre razão e fração, como a fração $\frac{2}{3}$ para expressar a razão de duas partes de uma grandeza para três partes da mesma ou três partes de outra grandeza.</p> <p>Comparar e ordenar números racionais em diferentes contextos e associá-los a pontos da reta numérica.</p> <p>Compreender e utilizar a multiplicação e a divisão de números racionais, a relação entre elas e suas propriedades operatórias.</p> <p>Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais.</p>

Neste estudo tomou-se a BNCC como aporte ecológico na expectativa de guiar o professor quanto às potencialidades e limitações do processo instrucional analisado e, desta forma, promover maior idoneidade didática do processo de ensino e aprendizagem. Contudo, vale ressaltar, que o livro é anterior à BNCC. Logo, nesse trabalho é proposto identificar limitações e propiciar adequações ao processo instrucional.

Dimensão instrucional

A dimensão instrucional (união da mediacional e interacional) refere-se à adequação e pertinência de recursos didáticos que favorecem a aprendizagem dos alunos e superações de possíveis concepções errôneas.

Nessa perspectiva vários autores consideram que no estudo dos números racionais não deve prevalecer um significado a outro (Campos & Magina, 2008; Silva, 2005; Lamon, 2007), bem como a necessidade de transitar entre os significados para uma compreensão completa desse conjunto numérico (Kieren, 1875; 1988).

Além disso, o uso precoce de regras e algoritmos para o estudo dos conceitos fundamentais, tais como: comparação, fração equivalente e operações torna o estudo das frações uma mera contagem dupla (Silva, 2005).

Há recursos didáticos (materiais concretos e digitais) que podem motivar e facilitar a compreensão dos significados e conceitos fundamentais. Entretanto, faz-se necessário os encaminhamentos e questionamentos do professor para elucidar e mobilizar o conhecimento pretendido. (Carpes, 2019).

PROBLEMA E MÉTODO

O livro didático analisado é intitulado *Vontade de Saber*, 7º ano, dos autores Souza e Pataro (2015), aprovado pelo PNLD de 2017 e utilizado por parte dos professores no Ensino Fundamental em escolas de um município do interior do Rio Grande do Sul. A análise foi feita considerando-se a seção Frações, pois os autores não colocam um capítulo com o título “Números Racionais”, apresentam apenas as seções sobre frações e números decimais separadamente.

Considerando a adoção desse livro didático como recurso para desenvolver o processo de ensino e aprendizagem sobre números racionais e, considerando os conhecimentos didático-matemáticos necessários ao processo, apresenta-se a seguinte questão norteadora desse estudo: qual o grau de idoneidade didática do processo de instrução utilizado no livro texto para o objeto matemático números racionais?

Nesse trabalho são analisadas as diferentes situações- problema apresentadas no livro didático, os conceitos, definições, representações e argumentos utilizados. Essa análise é feita sob a ótica das diferentes dimensões da idoneidade didática descritas no referencial teórico.

Descrição geral da seção Frações

O livro em estudo não aborda os números racionais em todos seus significados. Apresenta duas seções para tal, uma com frações e outra com números decimais, além da seção sobre números inteiros.

A Seção Frações é a primeira do livro, com 29 páginas destinadas à compreensão do número racional e a representação de frações. As subseções, “Estudando Frações” apresenta a fração sob seus diferentes significados como parte/todo, razão e quociente, leitura de frações e definição de fração própria, imprópria e aparente. A Subseção, “Simplificando Frações”, aborda frações equivalentes e fração irredutível. A subseção “Comparação de Frações” apresenta a representação de frações com registro figural, a comparação de frações que possuem o mesmo denominador e o algoritmo do mínimo múltiplo comum (m.m.c.). Aborda também, as operações de adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e raiz quadrada. Por fim, propõe uma revisão, além de problemas e questões da OBMEP e ENEM.

A atividade introdutória da seção aborda o consumo consciente da água disponível no planeta para consumo. A atividade propõe o registro fracionário da quantidade de água

doce disponível no planeta e pode ser motivadora aos alunos visto que é uma temática recorrente no seu cotidiano.

São apresentadas, a seguir, as unidades de análise utilizando-se as dimensões da idoneidade didática do EOS.

ANÁLISE DAS DIMENSÕES EPISTÊMICA E COGNITIVA

Nesta seção são discutidas as oito configurações didáticas organizadas. Em cada uma delas se descreve as práticas matemáticas e objetos que intervêm.

Configuração 1: significado de parte/todo da fração

Os autores apontam de antemão que o estudo é uma complementação dos anos anteriores conforme Figura 2. Inicialmente são apresentados três significados das frações: parte/todo, razão e quociente. O significado parte/todo é representado por meio de uma figura retangular (grandeza contínua) e, na sequência, é indicada a relação entre numerador (número de partes consideradas) e denominador (número de partes iguais da unidade) de uma fração.

Figura 2

Significado de parte/todo da fração. (Souza & Pataro, 2015, p. 14)

Estudando frações

Já estudamos em anos anteriores que as frações podem ser utilizadas em diversas situações, representando diferentes ideias. Veja a seguir algumas delas.

- **Parte de uma figura**

As frações podem representar parte de um inteiro. Na fração $\frac{3}{10}$, por exemplo, o número 7 é o **denominador**, que indica em quantas partes iguais o inteiro foi dividido, e o 2 é o **numerador**, que indica quantas partes foram consideradas. Representando essa fração por meio de uma figura, temos:

numerador $\rightarrow \frac{3}{10}$ \leftarrow partes em vermelho
denominador $\rightarrow \frac{10}{10}$ \leftarrow número de partes iguais em que a figura foi dividida

Material: Livro de Matemática

Os conceitos implícitos nesta situação são os conceitos fundamentais de partição e unidade (a grandeza contínua dividida em partes iguais para representar o todo). Neste momento não é apresentado uma definição formal para o significado de parte/todo, apenas exemplificações numéricas. Os registros empregados são: a linguagem natural, a fração numérica e a geométrica. A interpretação de numerador e denominador leva a uma generalização de como representar uma fração.

A definição do significado de parte/todo não foi apresentada nem construída. E também, não foi explorado por meio de uma situação-problema, o significado de modo contextualizado. Foi descrita apenas uma contagem de dupla entrada (a área sombreada pela área total). A pouca exploração do significado do conceito pode gerar um conflito epistêmico.

Observa-se que se o aluno não tiver compreensão de partição, unidade, parte/todo, grandezas contínuas e discretas podem ocorrer também, conflitos cognitivos. A mecânica de dupla contagem pode confundir o aluno quanto aos outros significados da fração (Silva, 2005; Campos, Magina & Nunes, 2006).

Configuração 2: significado de razão da fração

O significado de razão é explorado de forma contextualizada, onde retoma a ideia de relação entre duas grandezas (pessoas aprovadas e total de pessoas), assim como apresenta as diferentes leituras e interpretações para a razão exemplificada conforme mostra a Figura 3.

Figura 3

Significado de razão da fração. (Souza & Pataro, 2015, p.14)

• **Razão**
Em um concurso, 7 de um total de 95 pessoas foram aprovadas. Podemos representar a quantidade de pessoas aprovadas pela fração $\frac{7}{95}$, isto é, 7 das 95 pessoas inscritas foram aprovadas ou, ainda, a quantidade de pessoas aprovadas nesse concurso está na razão de 7 para 95.

Nesta situação a fração é apresentada não como parte de um todo, mas como a relação de duas grandezas distintas. A razão 7 para 95 poderia ser também compreendida como 14 para 190 agregando uma generalização da razão estudada, porém, os autores não apresentam essa abordagem.

Lamon (2006) destaca que um conflito epistêmico que essa situação pode gerar é a interpretação de razão como parte/parte (duas partes de um todo “ratio”) e a razão de grandezas de tipos diferentes (“rate”), dando origem a uma nova grandeza. Na seção de “Proporcionalidade” do livro é exemplificado a situação de razão de 1 grama de cloro para 100 litros de água (relação entre duas grandezas distintas e indicada como 1:100).

Configuração 3: significado de quociente da fração

O significado de quociente de uma fração é explorado de forma numérica, isto é, o numerador dividido pelo denominador e utiliza os distintos símbolos de divisão (a barra e os dois pontos) conforme mostrado na Figura 4.

Figura 4

Significado de quociente da fração. (Souza & Pataro, 2015, p.14)

• **Quociente de uma divisão**
A fração $\frac{12}{4}$, por exemplo, representa 3 inteiros, ou seja, $\frac{12}{4} = 12 : 4 = 3$.
Podemos escrever uma fração na forma de divisão e vice-versa. O traço da fração representa uma divisão.

Na situação proposta os autores não fazem a ressalva sobre os elementos da divisão para ser um número racional. Embora, até então, os alunos não tenham estudado os números irracionais. Como também, não destacam a necessidade de duas grandezas distintas (12 balas divididas igualmente entre 4 pessoas, por exemplo) que difere do significado parte/todo.

A não compreensão da operação de divisão entre números inteiros, divisão em partes iguais podem gerar conflitos cognitivos. Os exemplos apresentando somente frações cujo numerador é maior que o denominador pode induzir outro conflito cognitivo ao considerar apenas frações impróprias como quocientes ou de apenas gerar números inteiros como resultado ($12 : 4 = 3$).

Configuração 4: Comparação entre frações


Os autores propõem fazer o estudo de comparação entre frações de modo contextualizado, questionando se a quantidade de alunos é maior no curso de Inglês ou de Espanhol conforme atividade descrita na Figura 5. O primeiro procedimento adotado para determinar a fração maior é analisando o significado parte/todo com a representação da unidade de forma geométrica. A maior fração é determinada identificando a maior área sombreada.


Figura 5

Significado de quociente da fração. (Souza & Pataro, 2015, p.18-19)

Comparação de frações

Em uma escola de idiomas, $\frac{5}{12}$ dos alunos cursam inglês e $\frac{4}{9}$ espanhol. Nessa escola, há mais alunos cursando inglês ou espanhol? Para responder a essa questão, é necessário **comparar as frações** $\frac{5}{12}$ e $\frac{4}{9}$ e verificar qual delas é maior. Representando os alunos que estudam cada um dos idiomas, temos:

alunos que cursam inglês: $\frac{5}{12}$ 

alunos que cursam espanhol: $\frac{4}{9}$ 


Observando as figuras, podemos notar que $\frac{4}{9} > \frac{5}{12}$, ou seja, há mais alunos que cursam espanhol.

Também podemos comparar essas frações obtendo frações equivalentes a elas com denominadores iguais. Para isso, podemos calcular o mínimo múltiplo comum (mmc) dos denominadores.

Vamos comparar as frações $\frac{5}{12}$ e $\frac{4}{9}$. Inicialmente, encontramos o mmc (12, 9).

$$\begin{array}{r} 12, 9 | 2 \\ 6, 9 | 2 \\ 3, 9 | 3 \\ 1, 3 | 3 \\ 1, 1 \end{array} \quad \text{mmc}(12, 9) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 36$$

Assim, devemos obter frações equivalentes a $\frac{5}{12}$ e $\frac{4}{9}$ cujos denominadores sejam 36.



Multiplicamos o numerador e o denominador da fração $\frac{5}{12}$ por 3, pois $3 \cdot 12 = 36$, e multiplicamos o numerador e o denominador da fração $\frac{4}{9}$ por 4, pois $4 \cdot 9 = 36$.

Como $\frac{16}{36} > \frac{15}{36}$, temos $\frac{4}{9} > \frac{5}{12}$.

Na seqüência os autores apresentam outro procedimento para comparar frações, por meio de frações equivalentes, determinando o mínimo múltiplo comum entre os denominadores das frações. Os conceitos e argumentos utilizados nesses procedimentos são: a compreensão da simbologia de maior ou menor ($<$, $>$), o porquê de tornar os denominadores iguais, obtenção de frações equivalentes, algoritmo do m.m.c. e o conceito de números primos.

Os registros empregados ao comparar frações foram a representação numérica (fração irredutível e equivalente) e a geométrica. A definição ou a argumentação do que é comparar números fracionários, de modo a generalizar, não foi construída de forma explícita. Também não é justificado o procedimento de tornar os denominadores iguais e comparar os numeradores para determinar a maior fração. Outro procedimento de comparação poderia ter sido adotado, pois, os autores do livro apontam no início da seção o significado de quociente, portanto, escrever as frações como quocientes também proporcionaria a comparação desejada e ainda determinaria o valor posicional das frações.

Um conflito epistêmico é evidenciado quando os autores não observaram o significado de operador de uma fração. A comparação desejada no exemplo da Figura 4, também poderia ser interpretada como um operador quando foi calculada a quantidade total de alunos da escola de idiomas. Por exemplo, se tivesse 36 alunos, $36 \cdot \frac{5}{12} = 15$ alunos estão cursando Inglês e $36 \cdot \frac{4}{9} = 16$ alunos cursam Espanhol. Além disso, destaca-se este significado, pois nas demais atividades são propostos exercícios em que o significado de operador é explorado, conforme mostra a Figura 5, mas inicialmente esse conceito não foi apresentado.

Ao comparar frações e adotar somente o procedimento de representar as frações de modo geométrico (parte/todo), pode gerar um conflito cognitivo para o aluno.

Na Figura 5 se o denominador for um número grande, serão muitos retângulos. Além disso, ao comparar frações, a unidade tem que ter o mesmo tamanho (área), logo os alunos precisariam, no mínimo, de uma régua para medir e poder visualizar corretamente a fração maior. Observe que as frações nesse exemplo da Figura 5, representam quantidades muito próximas.

Configuração 5: Significado de operador de uma fração – exercício

Dentre as atividades propostas para explorar a comparação de frações, apresenta-se o Exercício 14, mostrado na Figura 6. A atividade contextualizada propõe a comparação entre as frações no item (a) e operar uma fração sobre uma quantidade no item (b). É, também, descrita uma prática social de jogo de basquete e pontuação das jogadoras.

Figura 6

Significado de operador de uma fração. (Souza & Pataro, 2015, p.19)

14. Na partida final de um campeonato de basquete, Alice marcou $\frac{7}{42}$ do total de pontos marcados, Mônica, $\frac{5}{58}$, e Sílvia, $\frac{1}{6}$.

a) Quais das atletas marcaram o mesmo número de pontos? Alice e Sílvia

b) Sabendo que o total de pontos marcados nessa partida foi 174, quantos pontos foram marcados por:

- Alice? 29 pontos
- Mônica? 15 pontos
- Sílvia? 29 pontos

O registro é proposto apenas pela fração numérica. O exercício propõe o reconhecimento do significado parte/todo ou de operador para comparar frações. Ainda havendo a possibilidade de resolução por meio de frações equivalentes. Um procedimento comum, e possivelmente mais eficiente, é operar sobre a quantidade 174, cada fração. Entretanto, os autores do livro não apresentam esse procedimento em nenhum momento da seção analisada.

Se apenas um dos significados for considerado, no caso o significado parte/todo, de acordo com Kieren (1988), isso pode gerar um conflito epistêmico. O mesmo autor aponta que o aluno deve transitar entre os significados para que o conceito de número racional se torne compreensível.

Configuração 6: Frações equivalentes – exercício

A atividade ilustrada na Figura 7 apresenta outro procedimento para determinar se as frações são equivalentes. São propostos exemplos em que o produto dos extremos é igual ao produto dos meios e um segundo exemplo em que isso não ocorre.

Figura 7

Frações equivalentes. (Souza & Pataro, 2015, p.19)

15. Podemos verificar se duas frações são equivalentes, multiplicando o numerador de uma fração pelo denominador da outra e vice-versa.

Veja os exemplos:

• $\frac{8}{12}$ e $\frac{14}{21}$ $\frac{8}{12} \times \frac{14}{21} \rightarrow 12 \cdot 14 = 168$
 $\qquad\qquad\qquad \rightarrow 8 \cdot 21 = 168$

Como $12 \cdot 14$ e $8 \cdot 21$ têm o mesmo resultado, as frações $\frac{8}{12}$ e $\frac{14}{21}$ são equivalentes.

• $\frac{2}{10}$ e $\frac{3}{12}$ $\frac{2}{10} \times \frac{3}{12} \rightarrow 10 \cdot 3 = 30$
 $\qquad\qquad\qquad \rightarrow 2 \cdot 12 = 24$

O resultado da multiplicação $10 \cdot 3$ é diferente de $2 \cdot 12$. Portanto, essas frações não são equivalentes.

De maneira semelhante, verifique quais pares de frações são equivalentes. a; c; d; f

a) $\frac{3}{15}$ e $\frac{1}{5}$ c) $\frac{18}{8}$ e $\frac{9}{4}$ e) $\frac{42}{77}$ e $\frac{14}{29}$

Nesta atividade são utilizados os conceitos de razão de proporcionalidade e produto dos meios pelos extremos para justificar que “duas frações são equivalentes quando multiplicando o numerador de uma fração pelo denominador da outra obtém-se o mesmo resultado”. Pode-se gerar um conflito epistêmico afirmar uma condição, sem argumentar ou defini-la. No livro o conceito de razão e constante de proporcionalidade são apresentados na seção “Proporcionalidade” onde o procedimento de multiplicar o numerador de uma fração pelo denominador da outra é explorado, mas sem argumentos claros.

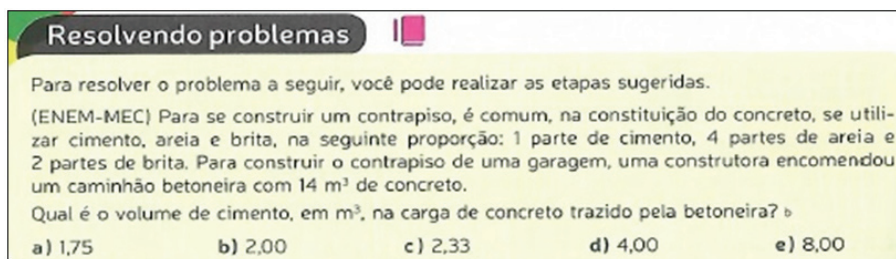
Ainda pode causar um conflito cognitivo ao aluno a não compreensão da comparação e da equivalência de frações. O que define uma equivalência, a mesma quantidade representada por diferentes números fracionários não é explicitada no livro. O exemplo apresentado propicia também interpretar que apenas duas frações podem ser equivalentes e não a possibilidade de ter-se infinitas frações equivalentes.

Configuração 7: Mobilizando significados por meio de uma situação-problema

No final da seção “Frações” há uma proposta de resolução de uma situação-problema, denominada “Resolvendo problemas”, ilustrada na Figura 8. No livro, há algo semelhante a um roteiro para encontrar a solução do problema. A questão foi retirada de um processo seletivo (ENEM) e explora a compreensão do todo e suas partes sem fazer referência a uma fração explicitamente.

Figura 8

Situação-problema. (Souza & Pataro, 2015, p.40)



Resolvendo problemas

Para resolver o problema a seguir, você pode realizar as etapas sugeridas.

(ENEM-MEC) Para se construir um contrapiso, é comum, na constituição do concreto, se utilizar cimento, areia e brita, na seguinte proporção: 1 parte de cimento, 4 partes de areia e 2 partes de brita. Para construir o contrapiso de uma garagem, uma construtora encomendou um caminhão betoneira com 14 m³ de concreto.

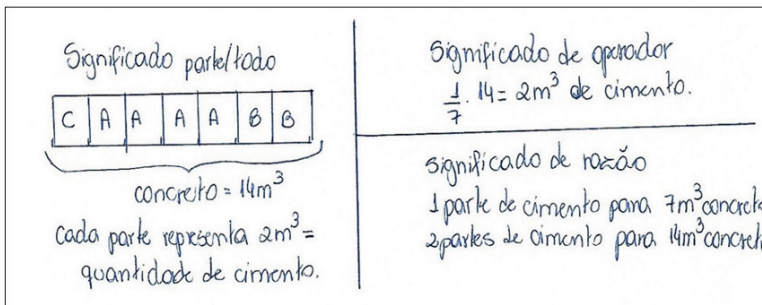
Qual é o volume de cimento, em m³, na carga de concreto trazido pela betoneira?

a) 1,75 b) 2,00 c) 2,33 d) 4,00 e) 8,00

Os conceitos relacionados nessa atividade são proporção, razão, parte/todo, números decimais, volume e grandeza de medida, assim como de uma prática social da constituição do concreto por meio de cimento, areia e brita. O processo de resolução de tal atividade não perpassa pela simples aplicação de um algoritmo, mas requer interpretação. Nessa situação problema são utilizados diferentes significados de fração visto que o aluno pode interpretar a fração $\frac{1}{7}$ pelos significados de parte/todo, operador ou razão conforme ilustrado na Figura 9.

Figura 9

Diferentes procedimentos de resolução da atividade da Figura 8. (Carpes, 2019, p. 98)



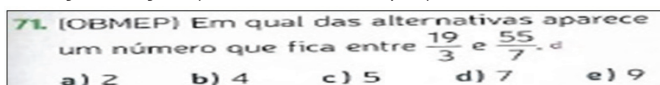
Cabe destacar que a elaboração do enunciado da questão proposta na Figura 8 é mais complexa do que das demais questões ilustradas nas Figuras 6 e 7, por exemplo. Nessa atividade destacam-se a contextualização, a adequação pertinente ao cotidiano dos alunos e o nível de abstração proposto.

Configuração 8: Comparação e ordenação de frações

A Figura 10 ilustra uma atividade proposta pela OBMEP. O enunciado da questão solicita identificar um número inteiro entre dois números fracionários dados.

Figura 10

Comparação e ordenação de frações. (Souza & Pataro, 2015, p.41)



A questão é objetiva e no livro texto a comparação de frações foi feita utilizando-se frações equivalentes, entretanto esse procedimento por si só não garante a solução desejada. O exercício assim colocado pode gerar conflitos epistêmicos, visto que os autores não abordam o conceito de valor posicional e esse conceito é importante para resolução da atividade.

Um procedimento comum para solução da questão é aplicar o significado de quociente de uma fração e determinar o seu valor em número decimal. Esse processo requer a compreensão da comparação de números decimais

ANÁLISE DA DIMENSÃO INSTRUCIONAL

A dimensão instrucional representa a união das dimensões mediacional e interacional. Desse modo, contempla o emprego adequado e pertinente dos recursos didáticos, o tempo destinado ao desenvolvimento do tema/objeto matemático, assim como as interações entre professor e aluno, entre os alunos e professor, aluno e recursos utilizados.

O livro didático considerado como um processo instrucional é amplamente adotado pelo professor para o estudo de um tópico matemático em sala de aula. A seção do livro analisado apresenta inicialmente uma situação contextualizada onde os números racionais são mobilizados, seguido de exemplos para apresentar três diferentes significados das frações e exercícios de fixação.

No EOS, de acordo com (Godino et al., 2007), a Matemática é vista como uma atividade de resolução de problemas, com simbologia e linguagem próprias. Neste sentido, não cabe um processo instrucional de somente transmitir o conhecimento, mas de um processo de construção.

Os exercícios propostos na seção considerada são de fixação, para repetir o processo várias vezes. Dos exercícios que exploraram os significados das frações, mais da metade refere-se ao significado parte/todo e apenas um exercício sobre o significado de quociente e um de razão. Logo, a mobilização dos significados parciais do objeto matemático pode ser insuficiente.

As configurações didáticas analisadas demonstram um modelo instrucional caracterizado pela exposição do conteúdo, com poucas definições ou argumentações procedimentais e, de forma constante, o uso de regras e algoritmos como, por exemplo, o uso do m.m.c.

Apenas um exercício no final da seção apresenta a possibilidade de construir uma resposta e buscar diferentes estratégias de resolução. Os autores do livro reforçam essa ideia apresentando uma espécie de roteiro seguido de quatro passos: compreendendo o problema, elaborando um plano, executando o plano e realizando o retrospecto e a verificação. É uma atividade que possibilita aos alunos o diálogo, a cooperação e a argumentação incrementando a idoneidade didática do processo instrucional.

No início da seção os autores propõem, no livro do professor, uma atividade usando tecnologias digitais. Consiste em representar as informações (frações de) de um exercício (envolvendo comparação de frações) em forma de tabelas e gráficos desenvolvidos no LibreOffice Cal. A atividade instiga o aluno quanto à representação de informações por meio de gráfico de setores.

O uso de tecnologias digitais vem ao encontro do que aponta Godino et al. (2004), quando indicam os recursos tecnológicos como um meio para enriquecer a aprendizagem matemática, contribuindo para a construção do conhecimento matemático.

SÍNTESE DAS CONFIGURAÇÕES DIDÁTICAS

O livro didático empregado como um processo instrucional deve mobilizar o conhecimento de um conjunto de objetos matemáticos pretendidos. Logo, por meio da análise da seção Frações, foram descritas oito configurações didáticas, referente a ordem de desenvolvimento do tema.

As três primeiras configurações são referentes à exemplificação do conceito de número racional (parte/todo, razão e quociente), as configurações 4 e 6 referem-se a um procedimento (regra), as configurações 5 e 7 referem-se a aplicações e a configuração 8 a um exercício de fixação. Não foram analisadas as operações com números fracionários presentes nesta seção.

De acordo com as configurações analisadas, não foi observado a construção dos conceitos e de seus significados. Embora o livro, seja para alunos do Ensino Fundamental, os autores apenas exemplificam numericamente as situações propostas. E, ainda, não abordam os conceitos fundamentais, como valor posicional, densidade, ordenação e raciocínio multiplicativo. Como os autores do livro iniciam a seção destacando que é uma retomada de conceitos já conhecidos, considera-se que os conceitos de partição e unidade seriam conhecimentos já adquiridos pelos alunos visto que esses conceitos são a base para compreensão de frações (Behr et al, 1983).

De acordo com a BNCC (Brasil, 2017), as ações de comparar e ordenar frações devem estar relacionadas aos significados parte/todo, quociente, razão e operador. No entanto, por meio da descrição das configurações, pode-se observar que nem todos os significados foram explorados. A compreensão dos conceitos fundamentais fica prejudicada quando não se transita entre os significados pois, o entendimento de partição e unidade, por exemplo, é fundamental para a compreensão de número racional (Behr et al, 1983; Kieren, 1988).

Ressalta-se a predominância de exercícios de fixação para o significado parte/todo com grandezas contínuas, assim como exercícios envolvendo o significado de operador de uma fração (Configuração 5). O livro não aborda explicitamente o significado de operador de uma fração nos conceitos e exemplos desenvolvidos. Reforçando que na BNCC (Brasil, 2017), no 7º ano, é indicado o estudo das frações por meio de seus significados como parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador. Atualmente, o professor deve ficar atento ao novo documento curricular adequando o currículo e o planejamento.

O processo instrucional analisado no qual busca exemplificar uma situação e propor na sequência, uma lista de exercícios de fixação, é considerada ineficiente e não contempla todas as competências e habilidades requeridas no contexto social e acadêmico atual. Estudos de Godino e outros (Godino et al, 2006; Godino et al, 2014) reforçam a importância de uma prática educativa voltada para a construção do conhecimento como uma forma mais significativa de aprendizagem ao aluno.

Além disso, as configurações que ilustram técnicas procedimentais para aplicação do objeto matemático carecem de uma argumentação ou definição que justifique tais passos

e apontam para a necessidade do professor em organizar seu planejamento identificando tais limitações e agregando seus conhecimentos didático-matemáticos ao objeto de estudo para complementar seu processo instrucional.

A configuração 7, denominada pelos autores do livro como “Resolvendo um Problema”, uma das últimas atividades da seção, é uma atividade adequada para desenvolver conhecimentos envolvendo números racionais. É uma atividade rica para criar um ambiente investigativo, argumentativo e de exploração dos conhecimentos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste estudo foi feita uma análise de um processo instrucional baseado em um livro didático do 7º ano do Ensino Fundamental para o objeto matemático número racional, por meio de ferramentas teóricas do EOS. A análise foi feita a partir de configurações didáticas em que foram identificadas as dimensões para classificar a idoneidade didática do livro.

Para alcançar uma idoneidade didática, por meio do processo instrucional analisado, o professor deve considerar em seu planejamento os conflitos epistêmicos e cognitivos apontados para cada configuração.

A apresentação dos conteúdos no livro, não favorece a construção de conceitos e não explora as definições e argumentações dos objetos e procedimentos adotados. Não aborda diretamente os números racionais, apenas separadamente as frações, os números decimais e números inteiros.

Vale destacar, que as ações de ordenar e determinar o valor posicional das frações não são explicitamente estudadas na seção Frações e, de acordo com a BNCC, são conceitos que devem ser abordados por meio da reta numérica para os números racionais com representação na forma de fração e como número decimal.

Para atender as orientações da BNCC o livro didático pode ser usado como um material de apoio, mas não como planejamento de um processo instrucional pois, ao utilizá-lo o professor pode fazer uso de diferentes recursos tecnológicos e diferentes estratégias para superar as limitações e favorecer a aprendizagem dos alunos.

DECLARAÇÕES DE CONTRIBUIÇÕES DOS AUTORES

Este artigo foi preparado e organizado pelas duas autoras. P.P.G.C. desenvolveu o referencial teórico, metodologia e coletou os dados. E.B. analisou os dados e trabalhou na construção geral do artigo.

DECLARAÇÃO DE DISPONIBILIDADE DE DADOS

As autoras concordam em disponibilizar seus dados mediante solicitação razoável de um leitor. Cabe às autoras determinar se uma solicitação é razoável ou não.

REFERÊNCIAS

- Behr, M et al. (1983). Rational number concepts. In Lesh, R & Landau, M (Eds.) *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*. Academic Press, (p. 91-125).
- Behr, MJ et al. (1992). Rational number, ratio, and proportion. In Grouws, DA (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Macmillan, (p. 296-333).
- Burgos, M et al. (2019). Análisis Didáctico de una Lección sobre Proporcionalidad en un Libro de texto de primaria con Ferramientas del Enfoque Ontosemiótico. *Boletim de Educação Matemática*, 1-30.
- Brasil. Ministério da Educação (2017). *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF, 472f. http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_20dez_site.pdf.
- Campos, TMM, Magina, S & Nunes, T (2006). O Professor Polivalente e a Fração: Conceitos e Estratégias de Ensino. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, 8(1), 125-136.
- Carpes, PPG (2019). *Conhecimentos didático-matemáticos dos professores de matemática ao ensinar números racionais para uma maior idoneidade didática (327f)*. Tese de Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática - Universidade Franciscana, Santa Maria.
- Charalambous, CY & Pitta-Pantazi, D (2006). Drawing on a theoretical model to study students' understanding of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, 64(3), 293-316.
- Godino, JD (2002). Un Enfoque Ontológico y Semiótico de la Cognición Matemática. *Recherches en didactique des Mathématiques*, 22(2,3), 237-284.
- Godino, JD et al. (2004). Recurso para el Estudio de las Matemáticas. In: Godino, JD (Dirección). *Didáctica de La Matemática para Maestros*, España, Manual para el Estudiante. Universidad de Granada. <http://www.ugr.es/~local/jgodino/edumat.maestros>
- Godino, JD et al. (2006). Análisis Ontosemiótico de una Lección sobre la Suma y la Resta. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9 (Especial), 131-155.
- Godino, JD et al. (2007). The Onto-semiotic approach to research in Mathematics Education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135.
- Godino JD et al. (2014). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico-semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 34(2/3), 167-200.
- Godino, JD (2017). Construyendo un sistema modular e inclusivo de herramientas teoricas para la educacion matematica. In: Contreras, J.M. et al (Eds.), *Actas del Segundo Congreso*

International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos. 2017. <http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html>.

Kieren, T (1975). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. In Lesh, R (Ed.) *Number and measurement: Paper from a research workshop*. 101-144, ERIC/MEAC.

Kieren, T (1980). Personal Knowledge of rational numbers: its intuitive and formal development. In: Hiebert, J & Behr, M. (eds.) *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*. Lawrence Erlbaum, 162-180.

Lamon, SJ (2006). *Teaching fractions and ratios for understanding: essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. 2 ed. Lawrence Erlbaum.

Lamon, SJ (2007). Rational numbers and proportional reasoning. In: Lester, F.K. (Jr. Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*. Information Age Publishing, 629-667,

Magina, S & Campos, T. (2008) A fração na perspectiva do professor e do aluno dos dois primeiros ciclos do Ensino Fundamental. *Boletim de Educação Matemática*, 21(31), 23-40.

Silva, MJF (2005) *Investigando saberes de professores do ensino fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série*. (302f) Tese de Doutorado em Educação Matemática - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

Souza, J & Pataro, PM. (2015) *Vontade de Saber matemática*, 7º ano. 3. Ed. FTD.

Ventura, HMGL (2013) *A aprendizagem dos números racionais através das conexões entre as suas representações: Uma experiência de ensino no 2º ciclo do ensino básico*. (386f) Tese de Doutorado em Educação - Universidade de Lisboa, Lisboa.