ACTA SCIENTIAE

ISSN: 2178-7727
DOI: 10.17648/acta.scientiae.5892

Categorías para evaluar la comprensión de estudiantes universitarios sobre un concepto matemático

Flor Monserrat Rodríguez-Vásquez [a]
Jhonatan Andres Arenas-Peñaloza [b]

[a] Universidad Autónoma de Guerrero, Facultad de Matemáticas. Posgrado en Educación Matemática, Chilpancingo, México
[b] Universidad de la Costa CUC, Departamento de Ciencias Naturales y Exactas, Barranquilla, Colombia

Recibido para publicación el 29 mayo 2020. Aceptado tras revisión el 11 nov. 2020
Editora designada: Claudia Lisete Oliveira Groenwald

RESUMEN

Contexto: Una de las problemáticas en educación matemática, es la endeble comprensión en matemáticas que tienen los estudiantes, tanto en el nivel educativo básico como en el superior, por lo que consideramos fundamental el diseño de instrumentos y métodos adecuados que puedan medir la comprensión sobre conceptos específicos. **Objetivo:** Evaluar la comprensión de estudiantes universitarios sobre el concepto de función real. **Diseño:** La investigación es cualitativa, debido a que se analizaron e interpretaron los atributos sobre un constructo cognitivo. **Escenario y participantes:** Fueron 36 estudiantes de una licenciatura en matemáticas (18-20 años) de quienes se analizaron sus producciones, todos habían llevado el primer curso de cálculo. **Colección y análisis de datos:** Se aplicó un test de seis ítems relativos a tareas que involucraron el concepto de función, el análisis de datos se realizó desde las categorías de evaluación propuestas por Albert y Kim, quienes consideran tres categorías para evaluar la comprensión, a saber, la habilidad para justificar, entender por qué una afirmación matemática particular es verdadera y, entender de dónde viene una regla matemática. **Resultados:** La evaluación sobre la comprensión del concepto función, ha evidenciado que, para alcanzar una comprensión alta se deben desarrollar no solo habilidades para el reconocimiento de aspectos de la función como su definición, su discriminación o su aplicación, sino además considerar la habilidad para poder justificar tales aspectos. **Conclusión:** Las categorías de comprensión consideradas, ayudan en el fortalecimiento del entendimiento conceptual y procedimental indicando una comprensión integral.

Palabras clave: Comprensión; categorías de evaluación; función real; Educación Matemática.

Autor de correspondencia: Flor Monserrat Rodríguez Vásquez. Email: flor.rodriguez@uagro.mx

Categorias para avaliar a compreensão de estudantes universitários sobre um conceito matemático

RESUMO

Contexto: Um dos problemas da educação matemática é a fraca compreensão da matemática que os alunos têm, tanto nos níveis de ensino básico como superior, pelo que consideramos fundamental a concepção de instrumentos e métodos adequados que possam medir a compreensão sobre conceitos específicos. **Objetivo:** Avaliar a compreensão de estudantes universitários sobre o conceito de função real. **Desenho:** a pesquisa é qualitativa, pois os atributos de um construto cognitivo foram analisados e interpretados. **Cenário e participantes:** Houve 36 alunos de uma licenciatura em matemática (18-20 anos) cujas produções foram analisadas, todos tendo feito o primeiro curso de cálculo. **Coleta e análise de dados:** Foi aplicado um teste de seis itens relacionados às tarefas que envolviam o conceito de função, a análise dos dados foi realizada a partir das categorias de avaliação propostas por Albert e Kim, que consideram três categorias para avaliar a compreensão, para saber, a capacidade de justificar, entender por que uma determinada afirmação matemática é verdadeira e entender de onde vem uma regra matemática. **Resultados:** A avaliação da compreensão do conceito de função mostrou que, para alcançar um alto entendimento, não só devem ser desenvolvidas competências para o reconhecimento de aspectos da função como a sua definição, discriminação ou aplicação, mas também considerar a capacidade de ser capaz de justificar tais aspectos. **Conclusões:** As categorias de compreensão consideradas auxiliam no fortalecimento da compreensão conceitual e procedimental, indicando compreensão abrangente.

Palavras-Chave: Compreensão; categorias de avaliação; função real; Educação Matemática.

INTRODUCCIÓN

La comprensión de un concepto matemático es un tema que ha tomado amplia participación dentro de las investigaciones realizadas en Matemática Educativa. Para ello, se han implementado diferentes marcos teóricos que atienden a esta línea de investigación (e.g., Skemp, 1980; Sierpinska, 1990; Pirie & Kieren, 1994; Kastberg, 2002; Arnon et al. 2014; Albert & Kim, 2015), los cuales ponen de manifiesto la caracterización de comprensión desde cada una de sus perspectivas, sus similitudes y sus diferencias, pero todas con un objetivo común, medir o valorar la comprensión matemática de los estudiantes. Y en algunos casos, se propone establecer categorías para diseñar actividades o ítems que puedan ayudar a los docentes al momento de evaluar la comprensión matemática de sus estudiantes.

De acuerdo a Schoenfeld (2007), un objetivo común de los profesores debe ser la comprensión de los conceptos por parte de los estudiantes. En este sentido, particularmente en matemáticas, la comprensión de conceptos es un objetivo para su enseñanza y aprendizaje.

La comprensión en matemáticas se ha estudiado desde los años 70. Skemp (1976) identificó dos tipos de comprensión: la comprensión relacional como "saber tanto qué hacer y por qué" (p. 2) y la comprensión instrumental como "reglas sin razones" (p. 2). Michener (1978) señaló que entender las matemáticas es un proceso complementario para la resolución de problemas, donde el proceso se preocupa por construir y enriquecer una base de conocimiento, y esto incluye crear conexiones de diversos tipos, así como de elementos (ejemplos, resultados y conceptos). Sierpinska (1990) propuso la comprensión como un acto, pero un acto involucrado en un proceso de interpretación, siendo esta interpretación una dialéctica en desarrollo entre conjeturas y validaciones cada vez más elaboradas.

Nickerson (1985) identificó algunas características de lo que es la comprensión, entre ellas, poder visualizar las propiedades más profundas de un concepto, buscar información específica en una situación más rápidamente, ser capaz de representar situaciones y visualizar una situación utilizando modelos mentales. Nickerson destacó que cuanto más se sabe sobre un tema, mejor lo comprende, mostrando así la relación entre conocimiento y comprensión. Por su parte, Hiebert y Carpenter (1992) enfatizaron que el nivel de comprensión está determinado por el número y la fuerza de sus conexiones, conexiones entre ideas matemáticas, procedimientos o hechos. Además, Wilkerson y Wilensky (2011) mencionaron tres aspectos sobre los recursos y procesos para la comprensión matemática: el conocimiento matemático como red, el papel de los diferentes recursos en el aprendizaje y el aprendizaje como la construcción de conexiones. Señalan también, que los investigadores interesados en la flexibilidad y la naturaleza adaptativa de la comprensión matemática describen la estructura del conocimiento matemático como una red de relaciones entre diferentes propiedades, objetos y procedimientos que influyen en una idea matemática determinada.

Ahora bien, respecto del concepto *función*, este es uno de los conceptos fundamentales en la matemática, sin embargo, a pesar de estar en la columna vertebral de las matemáticas, es uno de los conceptos más difíciles de dominar en la matemática escolar, lo cual, en parte es consecuencia, de las diversas sub-nociones asociadas al concepto, pues incluso en niveles básicos, las funciones pueden abordarse desde diferentes contextos, por lo que las dificultades se presentan desde edades tempranas. Asimismo, Díaz (2013), menciona que el concepto de función es uno para el cual, los estudiantes tienen problemas para desarrollar una comprensión satisfactoria, además de que las dificultades que presentan los estudiantes parecen centrarse en su complejidad y generalidad. La noción de función se tiene desde los primeros años de vida, no obstante, como un objeto formal en la enseñanza de la matemática, el concepto función, es enseñado desde el nivel educativo secundaria hasta el nivel universitario (National Council of Teachers of Mathematics, 2000; Secretaría de Educación Pública, 2011). Dicho concepto se caracteriza por su naturaleza abstracta y se considera un conocimiento previo en asignaturas como el cálculo diferencial e integral, álgebra lineal, álgebra abstracta y análisis matemático (Farfán & García, 2005). Asimismo, las funciones son utilizadas para modelar fenómenos en áreas como física, química, biología, ciencias sociales y economía.

Adicionalmente, investigaciones realizadas sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje del concepto de función, reportan que hay distintas dificultades relacionadas a su aprendizaje. Por ejemplo, Ortega y Pecharromán (2014) mencionan que los estudiantes presentan errores en el aprendizaje de las propiedades globales de las funciones; Amaya y Sgreccia (2014) y Díaz, Haye, Montenegro y Córdoba (2015) reportan dificultades asociadas al realizar transformaciones y articulaciones entre las representaciones de una función; y más recientemente, Cuevas y Pluvinage (2017) reportan que las dificultades que los estudiantes manifiestan sobre el concepto de función, se centran en la formalidad y rigurosidad de la definición. Por otra parte, Watson y Harel (2013) aluden a que las dificultades son inducidas por los docentes de matemáticas cuando ellos mismos no tienen un buen conocimiento matemático del concepto de función.

Diversas concepciones inconsistentes que presentan los estudiantes sobre el concepto de función en el aula de clases son generadas por que no se prioriza la comprensión del concepto y de sus significados, debido a que tanto los docentes como los estudiantes, se limitan a la manipulación algebraica de este concepto, restringiendo así su comprensión (Prada, Hernández, & Ramírez, 2014). Como lo mencionan Flores, Neira, Carrillo y Peñaloza (2019) la enseñanza del concepto de función se concentra en priorizar el registro algebraico, dejando de lado tanto el registro gráfico como el tabular. Desvinculando que, la forma de comprender mejor un objeto matemático es mediante la coordinación de sus diferentes representaciones.

Algunas investigaciones que se han centrado en estudiar el concepto de función desde diferentes perspectivas (Vinner & Dreyfus, 1989; Crespo & Ponteville, 2003; Serrano, 2007; Silva & Kaiber, 2013; Figueiredo & Contreras, 2013), han dejado de manifiesto la necesidad de realizar investigaciones enfocadas en la comprensión de este concepto, debido a su impacto en el currículo y en otras disciplinas; así como la necesidad de atender las dificultades que la literatura reporta en sus procesos de enseñanza y aprendizaje. Particularmente, Bardini, Pierce, Vincent y King (2014), realizaron un estudio sobre la comprensión de estudiantes universitarios sobre el concepto de función, enfatizando en que es importante reforzar constantemente los conceptos antiguos en nuevos entornos, ayudando a establecer conexiones entre ideas matemáticas relacionadas, pues la comprensión se ve afectada por las creencias y las misconcepciones, e incluso mencionan que si los estudiantes van pasando de nivel escolar con conceptos erroneos o sin una comprensión profunda, puede ser dificil revertir. También, enfatizan que los estudiantes deben exponerse a muchos ejemplos donde las representaciones estén vinculadas, y entonces sintetizar y formalizar su aprendizaje a través de la aplicación del concepto de función. Finalmente, Bardini et al. (2014) señalan que es fundamental que los estudiantes sean conscientes de los aspectos de la definición de la función, y de ser capaces de establecer conexiones entre diversas representaciones del concepto función.

Por su parte, Díaz (2013), menciona también algunos aspectos cruciales para una profunda comprensión del concepto función, entre ellos, la interpretación de funciones representadas por gráficas, la descripción de situaciones, fórmulas y tabla, es decir, que se modelen situaciones del mundo real, trasferencia entre las múltiples representaciones de las funciones. Además, de promover que el estudiante sea capaz de utilizarlo en campos no matemáticos, y de que realice tareas de transformación y de conversión de representaciones entre al menos dos sistemas de representación.

No obstante, pensamos que aunque es fundamental conocer los factores que causan una endeble comprensión, se deben estructurar marcos de referencia específicos que permitan evaluar en los estudiantes la comprensión de los conceptos, y auxilien al profesor a rediseñar actividades para mejorar dicha comprensión en consecuencia.

Particularmente, para esta investigación, se usó el marco de referencia de Albert y Kim (2015) debido a que éste se sustenta sobre el diseño curricular que propone el Common Core State Standards for Mathematics (CCSSM) con el propósito de que los profesores evalúen la comprensión matemática de sus estudiantes. En este sentido, el objetivo de este artículo es analizar la comprensión de estudiantes universitarios acerca del concepto de función para contribuir a la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje de dicho concepto. Para ello, se diseñaron ítems de evaluación que permitieron medir el nivel de compresión que tienen los estudiantes acerca de este concepto y a partir de la interpretación de estos niveles se propone diseñar tareas para fortalecer los aspectos donde los estudiantes evidencian dificultades.

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Al igual que muchos conceptos matemáticos, el de función hace parte de aquellos conocimientos básicos que toda persona debe comprender para comunicarse e interactuar en la sociedad (Amaya, Pino-Fan & Medina, 2016). En este sentido, Bardini, et al. (2014), mencionan que la noción de función puede verse como un concepto unificador no solo dentro del contexto de la matemática misma, sino también entre la matemática y el mundo real.

En el desarrollo histórico del concepto función, sin duda es un aliado para entenderlo como unificador. Los griegos, por ejemplo, desde la antigüedad utilizaban representaciones verbales o gráficas que hoy día hacen referencia al concepto de función y que ellos en su momento desconocían. Históricamente, Díaz (2013), menciona tres periodos significativos en el desarrollo del concepto función: *la antigüedad* donde se puede identificar la dependencia entre cantidades y diferentes magnitudes, aunque no se llega a aislar las nociones de cantidad variable y de función; *la edad media*, cuyo desarrollo del concepto se divide en dos partes, la no latina y la latina, en la primera (años 500 al 1200) aunque se encontraron soluciones de ecuaciones, la idea de variable no surgió y por lo tanto la idea funcional entre dos variables tampoco, en la segunda (a partir del S. XIII) , en donde se logró una teoría primitiva de funciones pero todavía no se podía expresar la correspondencia funcional en un lenguaje algebraico, finalmente, *el periodo moderno*, en el cual se identifican cuatro etapas, y en correspondencia, cuatro definiciones de función dadas por Euler, Fourier, Dirichlet y Bourbaki respectivamente, y en las cuales se observar la evolución en sus constructos.

Pino-Fan, Parra-Urrea y Castro-Gordillo (2019) perciben el concepto de función, como un componente fundamental en el desarrollo histórico de la humanidad y que, a lo largo de su evolución se han adoptado al menos seis interpretaciones: *la función como correspondencia*, donde se establece el concepto como la asociación de elementos entre dos conjuntos; *la función como relación entre magnitudes variables*, vista desde el campo de la física de donde se estableció la noción de cantidades variables dependientes e independientes; *la función como representación gráfica*, se estableció mediante la necesidad de representar la relación de variación entre magnitudes físicas; *la función como expresión analítica*, se empezó a establecer una formalización conceptual mediante la relación de expresiones analíticas; *la función como correspondencia arbitraria*, donde se generalizó la regla de correspondencia entre variables. Por último, *la función a partir de la teoría de conjuntos,* donde se establece la definición formal del concepto, la cual se expresa como sigue:

"Definición: *Un relación donde a cada elemento de un conjunto A le corresponde un único elemento de un conjunto B, se denomina una función de A en B."* (Arizmendi, Carrillo & Lara, 2003, p. 40).

No obstante, la enseñanza tradicional del concepto se ha limitado en establecer solo la relación de dependencia entre las variables, dejando de lado la definición formal, aislando la conexión existente entre las definiciones del dominio, codominio y recorrido (Pino-Fan, Parra-Urrea & Castro-Gordillo, 2019). Aunque, Amaya, Pino-Fan y Medina (2016) mencionan que durante el proceso de enseñanza aprendizaje del concepto, los registros más usados son el analítico algebraico, numérico, gráfico y tabular.

Ahora bien, la comprensión en matemáticas es un tema ampliamente estudiado en Matemática Educativa, por ejemplo, desde diferentes marcos teóricos (e.g., Skemp, 1980; Vinner, 1983; Dreyfus & Eisenberg, 1982; Sfard, 1989; Sierpinska, 1990, 1992; Pirie & Kieren, 1994; Kastberg, 2002; Albert & Kim, 2015), se pone de manifiesto la caracterización de la comprensión desde cada una de sus perspectivas, sus similitudes y sus diferencias. Sin embargo, dado que nuestro interés es, *evaluar* la comprensión a partir de un modelo, en el cual se establecen categorías para el diseño de actividades o ítems, usamos el marco teórico para analizar ítems de evaluación, expuesto por Albert y Kim (2015), el cual se fundamenta en la definición de comprensión del CCSSM, quienes textualmente indican que: "One hallmark of mathematical understanding is the ability to justify, in a way appropriate to the student's mathematical maturity, why a particular mathematical statement is true or where a mathematical rule comes from…" (NGA Center & CCSSO, 2010, p.4). En este sentido, la comprensión matemática consiste de tres categorías: *la habilidad para justificar, entender porqué un enunciado particular de matemáticas es verdadero* y *entender de dónde viene una regla matemática*. Bajo estas tres categorías, se proporciona el marco teórico para analizar y organizar los ítems de evaluación. A continuación, se describen cada una de las categorías.

La habilidad para justificar. En esta categoría los estudiantes deberán conocer cómo sustentar sus conclusiones para comunicar sus procesos en la resolución de ítems y construir justificaciones de calidad, es decir, proporcionar razones sólidas sobre su propia conclusión. Por lo tanto, se espera que los estudiantes den buenas justificaciones matemáticas, en otras palabras, que sus justificaciones se vean influenciadas por su razonamiento matemático, su habilidad para construir conjeturas matemáticas, desarrollar y evaluar argumentos matemáticos, y seleccionar y usar diferentes tipos de representaciones. Albert y Kim (2015) muestran un ejemplo de esta categoría, suponen que se pide al estudiante resolver el problema 2+2, entonces si el estudiante solo tiene habilidades de procedimiento pude responder que la suma es 4 sin proporcionar justificaciones adecuadas, pero si el estudiante tiene conocimiento de los conceptos relacionados, por ejemplo, el concepto de número incluidas cantidades continuas y discretas y conoce diferentes representaciones, entonces el estudiante podría justificar su proceso para resolver el problema por diferentes formas.

Entender por qué una afirmación matemática particular es verdadera. Se espera que los estudiantes identifiquen y argumenten si una afirmación es verdadera o falsa, dependiendo la situación de contexto de la afirmación. Por ejemplo, en la afirmación "tres multiplicado por cualquier número siempre aumenta" podría ser verdadera o falsa dependiendo el conjunto al cual pertenece ese número, es decir, el enunciado es verdadero bajo ciertas condiciones, por ejemplo, si se multiplica 3 por un número mayor que 1 la afirmación es verdadera, pero si se multiplica por números que estén entre 0 y 1 la afirmación es falsa. Entonces los estudiantes deben entender bajo qué condiciones el enunciado se cumple o no dando contraejemplos.

Entender de dónde viene una regla matemática. De acuerdo al CCSSM (NGA Center and CCSSO, 2010), los estudiantes quienes puede explicar una regla matemática entienden esa matemática y tienen más posibilidades de tener éxito en tareas menos familiares. Albert y Kim (2015) ponen el ejemplo, de cuándo se pide resolver la división entre las fracciones 2/5 y 14/15, entonces mencionan que los estudiantes quienes conozcan la regla matemática para la división de fracciones podrían encontrar la respuesta con base en las habilidades de procedimiento, pero podría ser sólo un procedimiento de memorización, es decir, cuando los estudiantes sólo demuestran habilidades de procedimiento o de memorización del proceso, pueden no entender el uso de la regla. Sin embargo, cuando los estudiantes entienden de dónde viene dicha regla, es decir, que es necesario en el denominador se múltiplique por su inverso multiplicativo para obtener la unidad, y por este mismo inverso múltiplicativo se múltiplica el numerador, entonces podrían resolver el problema de una manera diferente y mostrar que han comprendido el concepto de la división de fracciones.

Finalmente, cabe mencionar que uno de propósitos principales de este marco teórico para analizar ítems de evaluación, es ilustrar cómo la comprensión informa prácticas de enseñanza y sirve como catalizador para ayudar a los docentes a desarrollar tareas de medición que representan el aprendizaje matemático del estudiante. Además, se promueve que los profesores mejoren sus métodos de enseñanza de forma que sean más efectivos, puesto que conocen los procesos de comprensión de sus estudiantes (Codes, Delgado, Gonzalez & Monterrubio, 2013).

METODOLOGÍA

La investigación sigue una metodología descriptiva (Dankhe, 1986), puesto que se busca la especificidad de las características de la comprensión de un concepto y se evalúan éstas a partir del alcance logrado de acuerdo al éxito de los estudiantes al resolver problemas matemáticos. Para ello, se diseño un test que comprende seis ítems y se siguieron las siguientes fases:

Fase 1. Diseño de los ítems. Esta fase se desarrolló en cuatro etapas. En la primera se analizó el marco de referencia de Albert y Kim (2015) y con base en ello se diseñaron 6 ítems, 2 para cada categoría de comprensión del marco de referencia. Para la categoría 1 (la habilidad para justificar) corresponden los ítems 3 y 4; para la categoría 2 (entender por qué una afirmación matemática particular es verdadera) los ítems 2 y 5; y los ítems 1 y 6 a la categoría 3 (entender de dónde viene una regla matemática). En la segunda etapa se realizó una validación por expertos, en la cual se resolvieron cada uno de los ítems, y posterior a la validación se rediseñaron los ítems. En la tercera se realizó una validación por usuarios, en la cual participaron 5 estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas, que cursaban el segundo semestre. Consecuencia de esta validación se realizaron nuevas modificaciones a los ítems. Finalmente, en la cuarta etapa se realizó nuevamente una validación por un experto, quien tiene más de diez años como docente de matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero. Así se obtuvo el diseño final de los 6 ítems (ver anexo).

Fase 2. Aplicación de los ítems. Una vez realizada la validación por usuarios y por expertos, los ítems se aplicaron. El tiempo de aplicación fue de treinta minutos. Los estudiantes fueron codificados con la letra A y el número correspondiente al orden de entrega de sus respuestas. Es decir, A1 significa primer estudiante en entregar la solución a los seis ítems.

Fase 3. Evaluación de las respuestas a los ítems. Para la evaluación de los seis ítems aplicados, se consideró el marco de referencia de Albert y Kim. Esta fase se desarrolló en tres etapas. En la primera, se concretaron unos criterios de evaluación a los ítems (ver Tabla 1), en relación a las categorías de comprensión y las posibles respuestas de los estudiantes. En la segunda etapa, se confrontaron las respuestas de cada estudiante en relación a estos criterios. Finalmente, en la tercera etapa se realizó un análisis de las respuestas dadas por los estudiantes.

Tabla 1

Criterios de evaluación en relación a las categorías de comprensión

Items	Criterio 1 (Bajo)	Criterio 2 (Media)	Criterio 3 (Alta)
1	El estudiante no reconoce el criterio de la recta vertical para determinar si una representación gráfica es una función.	El estudiante reconoce el criterio de la recta vertical para determinar si una representación gráfica es una función, sin embargo, la justificación no es acorde a la correspondencia unívoca.	El estudiante utiliza correctamente el criterio de la recta vertical para determinar si una representación gráfica es una función. Además, sus argumentos ponen de manifiesto el entendimiento de la relación, que un elemento del dominio le corresponde un único elemento en el codominio.
2	El estudiante no emite una opinión sobre la afirmación o la opinión es incorrecta.	El estudiante identifica el valor de verdad de la afirmación, sin embargo, sus argumentos no validan su opinión.	El estudiante identifica el valor de verdad de la afirmación y sus argumentos validan correctamente su opinión.
3	El estudiante no identifica cuáles representaciones gráficas representan una función.	El estudiante identifica cuáles representaciones gráficas son funciones. Sin embargo, no proporciona razones sólidas en su conclusión.	El estudiante identifica cuáles representaciones gráficas son funciones y proporciona razones sólidas para validar su conclusión.
4	El estudiante no realiza ningún tipo	El estudiante logra clasificar algunas	El estudiante clasifica

	de clasificación en relación al tipo de función.	funciones, pero su justificación es insuficiente para validar su clasificación.	correctamente las funciones según sus características y proporciona razones sólidas para validar su conclusión.
5	El estudiante no emite argumento alguno para validar la afirmación.	El estudiante genera algunos argumentos, pero no son suficientes para justificar la validez de la afirmación.	El estudiante genera los argumentos necesarios para justificar que la afirmación es verdadera.
6	El estudiante no identifica los criterios por las cuáles dos funciones son iguales.	El estudiante reconoce los criterios (por lo menos uno) por las cuáles dos funciones son iguales. Sin embargo, la justificación no está acorde a la situación.	El estudiante reconoce los criterios por las cuáles dos funciones son iguales. Además, sus argumentos colocan en manifiesto el entendimiento de por qué ambas funciones son iguales.

Se aplicó el test a 36 estudiantes (18-20 años) de primer año de la Licenciatura en Matemáticas la Universidad Autónoma de Guerrero, México. El criterio de selección fue que los estudiantes hubieran cursado la asignatura de Cálculo I, pues en ésta se enseña el concepto función, así como sus aplicaciones. Asimismo , se indicó el objetivo de la investigación y se señaló que la participación era voluntaria, asegurando la confiabilidad anónima de los participantes, de acuerdo al Código de ética de la Universidad.[1]

[1] Se exonera a Acta Scientiae sobre cualquier consecuencia o daño resultante a cualquiera de los participantes de los ítems, según la Resolución nº 510, de 7 de abril de 2016, del Consejo Junta Nacional de Salud.

RESULTADOS Y ANÁLISIS

A continuación, se presentan los resultados obtenidos con base en la evaluación de las respuestas de los estudiantes considerando los criterios establecidos en la Tabla 1. Asimismo, la evaluación permitió clasificar la comprensión que presentaron los estudiantes en términos de cada categoría como se puede apreciar en la Tabla 2.

Tabla 2

Comprensión de los estudiantes en relación a cada categoría.

Categorías	**Item evaluado**	**Números de estudiantes**		
		Con comprensión baja	**Con comprensión media**	**Con comprensión alta**
Habilidad para justificar	3	16	8	12
	4	16	14	6
Entender porque una afirmación matemática es verdadera	2	9	16	11
	5	12	14	10
Entender de donde viene una regla matemática	1	24	1	11
	6	12	21	3

Para organizar y describir mejor el trabajo realizado por los estudiantes, el análisis se presenta en relación a las tres categorías de comprensión.

La habilidad para justificar

Para esta categoría de comprensión, se evaluaron las respuestas de los estudiantes en los ítems 3 y 4. Respecto al ítem 3, se evidenció que 12 estudiantes, es decir el 33% lograron una alta comprensión del mismo, dado que identificaron cuáles representaciones gráficas corresponden a una función y además, lograron generar razones y argumentos sólidos para validar sus respuestas. Mientras que 8 estudiantes (22%) solo llegaron a identificar cuáles de las representaciones gráficas dadas corresponden a una función. Por último, 16 estudiantes (45%) manifestaron una baja comprensión, dado que no identificaron cuáles representaciones gráficas representan una función.

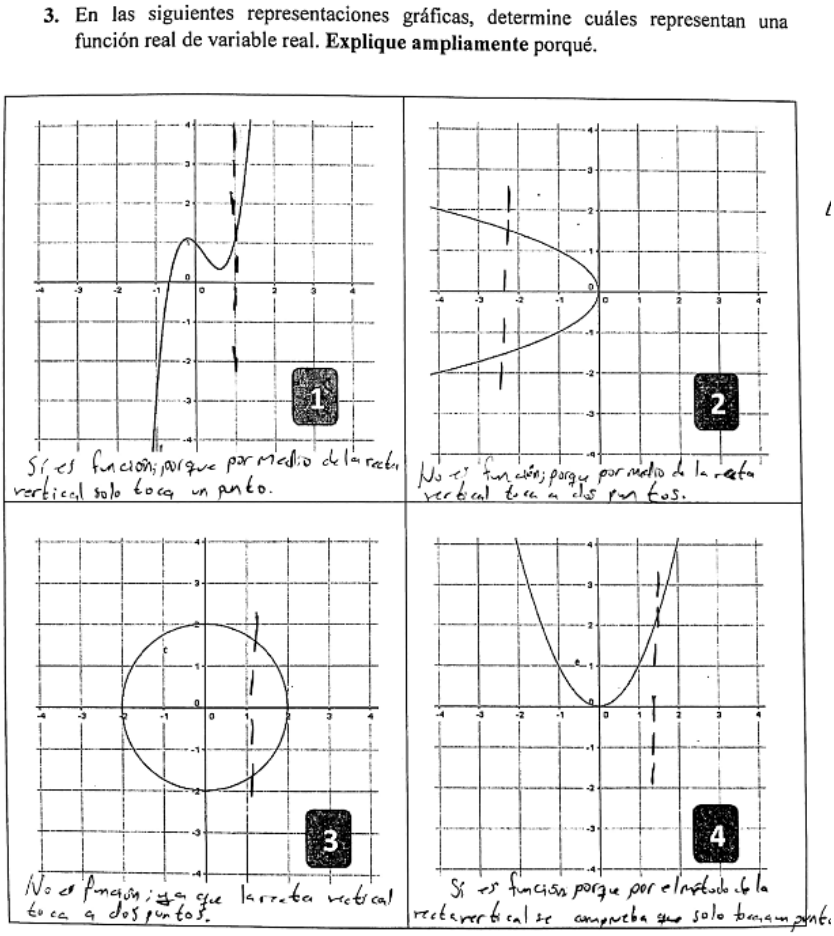
Para el ítem 4, se evidenció que 16 estudiantes (44%) no lograron realizar algún tipo de clasificación en relación con los tipos de función, mostrando dificultades en relacionar sus características para clasificarlas. De acuerdo al marco de referencia teórico, los estudiantes no lograron proporcionar razones sólidas para construir conjeturas y evaluar argumentos matemáticos. También, se hace evidente que 14 estudiantes (39%) lograron clasificar algunas funciones, pero al momento de justificar su clasificación no brindaron los argumentos suficientes para validar sus respuestas. Sin embargo, 6 estudiantes (17%) clasificaron correctamente las funciones y, además, lograron dar razones sólidas para validar sus conclusiones.

En esta primera categoría, se obtuvo como resultado que la mayoría de los estudiantes presentaron una baja comprensión de la misma. Puesto que al colocar en correlación ambos ítems (3 y 4) se puedo constatar que solo el 25% ([(12+6)*100]/72) de los estudiantes tiene la habilidad para justificar. En comparación con lo mencionado por la Common Core State Standards for Mathematics (2010), se puede establecer que los estudiantes universitarios no comprenden eficientemente, ya que no fueron capace de utilizar propiedades establecidas en el concepto de función para generar argumentos sólidos con relación al desarrollo de sus procesos matemáticos, tampoco cuentan con la capacidad de criticar los razonamientos de sus otros compañeros.

Por ejemplo, sobre el ítem 3, el estudiante A6 mostró una alta comprensión en esta categoría, ya que utilizó corretamente el criterio de la recta vertical para determinar si una representación gráfica es una función y sus argumentos manifestaron su entendimiento sobre la correspondencia de la regla y sobre una característica del concepto de función, específicamente sobre que a cada elemento del dominio le corresponde un único elemento en el codominio (ver Figura 1).

Figura 1

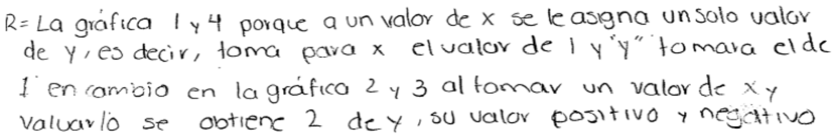
Respuesta de A6 para la categoría 1 (ítem 3)



Otro argumento para justificar una alta comprensión en esta categoría, se evidenció en la respuesta dada por A22 (Figura 2), en la cual, el estudiante manifiesta una condición para determinar cuándo una representación gráfica es o no es función. También él reconoció la característica del concepto de función, de que a cada elemento del dominio le corresponde un único elemento en el codominio, por medio de una representación verbal. Específicamente A22 evalúa en puntos particulares para generalizar que todo elemento de *x* le corresponde un único elemento de *y*, para las representaciones que son funciones. Y para las representaciones que no son funciones, utiliza el mismo criterio dando ejemplos donde no se cumple.

Figura 2

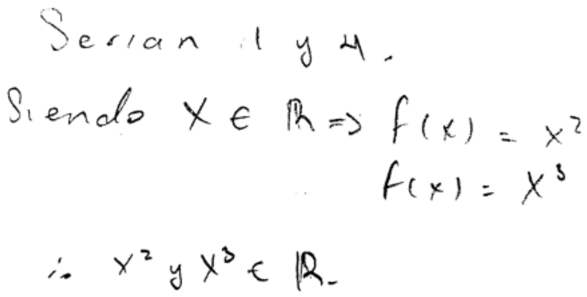
Respuesta de A22 para la categoría 1 (ítem 3)


R= La gráfica 1 y 4 porque a un valor de x se le asigna un solo valor
de y, es decir, toma para x el valor de 1 y "y" tomara el de
1 en cambio en la gráfica 2 y 3 al tomar un valor de x y
valuarlo se obtiene 2 de y, su valor positivo y negativo

Por otra parte, un caso que representa comprensión media, es decir, la categoría que, hace énfasis en que el estudiante identifique cuáles representaciones gráficas son funciones, pero no proporcione razones sólidas en su conclusión, es el caso de A17. Sus argumentos son insuficientes para justificar su respuesta al ítem 3 (ver Figura 3), ya que, A17 no evidencia conocimiento sobre la característica de correspondencia de la unicidad de las variables del dominio con el codominio. Limitando su respuesta en asociar las representaciones gráficas a sus representaciones algebraicas, las cuales corresponden a funciones determinadas.

Figura 3

Respuesta de A17 para la categoría 1 (ítem 3)



Entender por qué una afirmación matemática particular es verdadera

En esta categoría, se evaluaron las respuestas de los estudiantes dadas a los ítems 2 y 5. En relación al ítem 2, se aprecia que 9 estudiantes (25%) presentaron una comprensión baja, ya que no emitieron un valor de verdad sobre la afirmación del ítem o el valor de verdad emitido es incorrecto. Sin embargo, 16 estudiantes (45%) emitieron el valor de verdad correctamente, pero sus argumentos no validan su opinión. También, se evidencia que 11 estudiantes (30%), lograron emitir un valor de verdad correcto y sus argumentos son suficientes para validar su opinión, manifestando una comprensión alta.

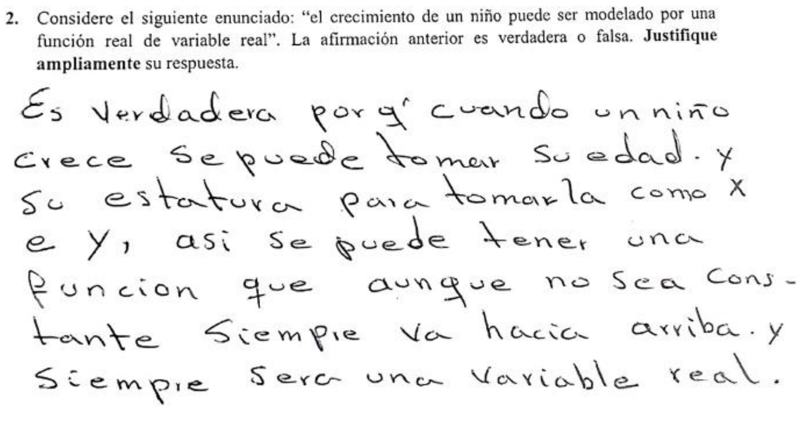
Respecto al ítem 5, se puede evidenciar que 10 estudiantes (28%) presentaron una comprensión alta en sus respuestas, ya que lograron generar los argumentos necesarios para justificar que la afirmación emitida es verdadera. Asimismo, 14 estudiantes (39%) presentaron en sus respuestas algunos argumentos para justificar la validez de la afirmación, pero no siendo suficientes para respaldar su postura. Finalmente, se tiene que 12 estudiantes (33%) no lograron emitir argumentos para validar o refutar la afirmación.

Al confrontar los resultados obtenidos de ambos ítems (2 y 5) en esta categoría, se puede afirmar que el 42% ([(16+14)*100]/72) de las respuestas dadas por los estudiantes, evidencia que la mayoría relativa, se encuentra con una comprensión media para entender por qué una afirmación matemática particular es verdadera. Mientras que en los niveles bajo y alto para esta categoría se encuentran cada uno con un 29% de estudiantes. Con relación a lo mencionado por la Common Core State Standards for Mathematics (2010), se puede establecer que pocos estudiantes universitarios realizaron conjeturas de su proceso para explorar la veracidad de las mismos, realizando razonamientos inductivos según el contexto de la información que les brinda la situación problema (ítems).

Por ejemplo, sobre el ítem 2, el estudiante A19 manifiesta una comprensión alta, puesto que emitió un valor de verdad correcto y, además en su justificación se aprecian argumentos que validan su postura en relación a la afirmación emitida. Se observa que el estudiante identifica la variable dependiente (estatura) y la independiente (edad) relacionándolas como una función. Asimismo, hace referencia sobre el comportamiento de la función que podría modelar la situación, descartando que ésta es constante, aunque siempre es creciente (ver Figura 4).

Figura 4

Respuesta de A19 para la categoría 2 (ítem 2)



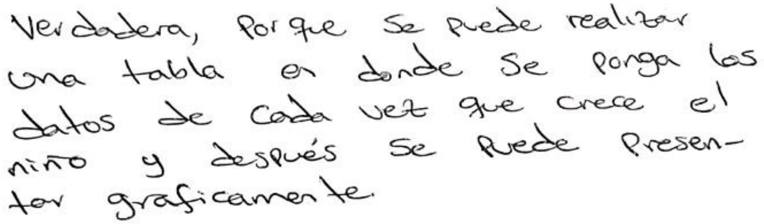
2. Considere el siguiente enunciado: "el crecimiento de un niño puede ser modelado por una función real de variable real". La afirmación anterior es verdadera o falsa. **Justifique ampliamente** su respuesta.

Es verdadera porq' cuando un niño crece se puede tomar su edad. y su estatura para tomarla como x e y, asi se puede tener una funcion que aunque no sea Cons- tante siempre va hacia arriba. y siempre sera una variable real.

También en el ítem 2, el estudiante A23 hace parte del 42% de los estudiantes que se encuentra con una comprensión media debido a que el valor de verdad emitido es correcto pero sus argumentos son insuficientes para validar su respuesta (ver Figura 5). Se observó que, A23 no logró explicar detalladamente las variables inmersas en la situación y cómo se comportan éstas, por ejemplo, no logran expresar dependencia entre las dos variables involucradas.

Figura 5

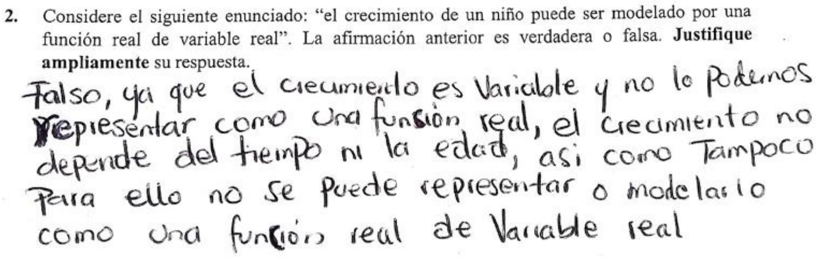
Respuesta de A23 para la categoría 2 (ítem 2)


Verdadera, Porque Se puede realizar
una tabla en donde Se Ponga los
datos de Cada vez que crece el
niño y después Se Puede Presen-
tar graficamente.

Respecto al nivel de compresión baja, en el mismo ítem 2, A20 emitió un valor de verdad incorrecto y sus argumentos no estuvieron acordes con la situación. A20, expresó que la afirmación dada era falsa y además no relacionó las variables de la función que podría modelar la situación. Por ejemplo, manifestó que no existe una dependencia entre el crecimiento de un niño con el tiempo transcurrido (ver Figura 6).

Figura 6

Respuesta de A20 para la categoría 2 (ítem 2)



2. Considere el siguiente enunciado: "el crecimiento de un niño puede ser modelado por una función real de variable real". La afirmación anterior es verdadera o falsa. **Justifique ampliamente** su respuesta.

Falso, ya que el crecimiento es Variable y no lo Podemos representar como una función real, el crecimiento no depende del tiempo ni la edad, así como Tampoco Para ello no se puede representar o modelarlo como una función real de Variable real

Entender de dónde viene una regla matemática

Para analizar esta última categoría, se revisaron las respuestas dadas por los estudiantes a los ítems 1 y 6. Respecto al ítem 1, se evidencia que 24 estudiantes (67%) tienen una comprensión baja, ya que estos no manifiestan un entendimiento al utilizar el criterio de la recta vertical, para determinar si una representación gráfica corresponde a una función. Solo 1 estudiante (3%) logró reconocer la utilidad del criterio de la recta vertical, sin embargo, la justificación de su uso, no estuvo acorde a las características de la regla matemática. Asimismo, 11 estudiantes (30%) reconocieron la utilidad del criterio y sus argumentos ponen de manifiesto el entendimiento de la regla matemática, para establecer que un elemento del dominio le corresponde un único elemento en el codominio.

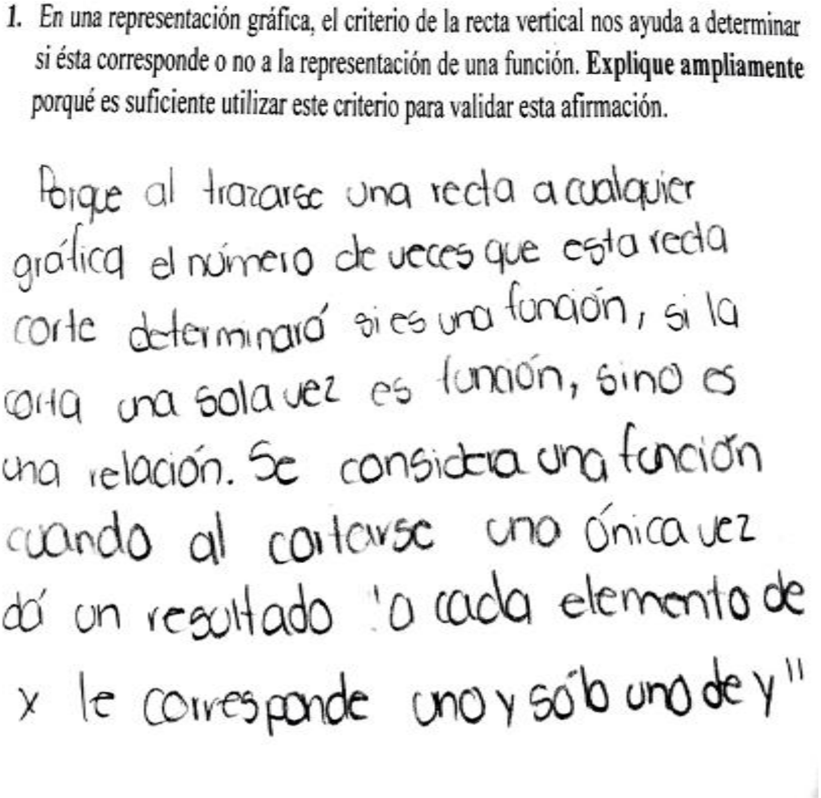
En el ítem 6, se obtuvo que 12 estudiantes (33%) no evidenciaron entender por qué dos funciones son iguales. Mientras que 21 estudiantes (58%) lograron reconocer por lo menos un criterio para determinar cuándo dos funciones son iguales sin embargo sus justificaciones no fueron acordes. Solo 3 estudiantes (8%) reconocieron los criterios por los cuáles, dos funciones son iguales y los argumentos presentados lo ponen en manifiesto.

En esta última categoría, el 50% de las respuestas de los estudiantes evidencia una baja comprensión. Puesto que al colocar en correlación ambos ítems (1 y 6) se puede constatar que los estudiantes no entienden de dónde viene una regla matemática, tanto en su uso como en su existencia. Por tanto, los estudiantes universitarios no consideraron cuales son las herramientas necesarias para resolver un problema matemático o no lograron establecer o por lo menos, identificar un patrón o estructura algebraica. En consecuencia, les costó trabajo aplicar los conceptos matemáticos para resolver problemas que surgen en la vida cotidiana (CCSSM, 2010).

Por ejemplo, para el ítem 1, la respuesta dada por A3 evidenció que él entiende de dónde viene una regla matemática, dado que logra explicar cuándo y cómo usar el criterio de la recta vertical para determinar si una representación gráfica es o no una función. A3 expresa que para que una representación gráfica corresponda a una función, la recta solo debe cortarla una sola vez, lo que indica que a cada elemento del dominio le corresponde un único elemento en el codominio. Además, expresa que, si la recta vertical toca dos veces a la representación gráfica, se estaría hablando de una relación y no de función (ver Figura 7).

Figura 7

Respuesta de A3 para la categoría 3 (ítem 1)



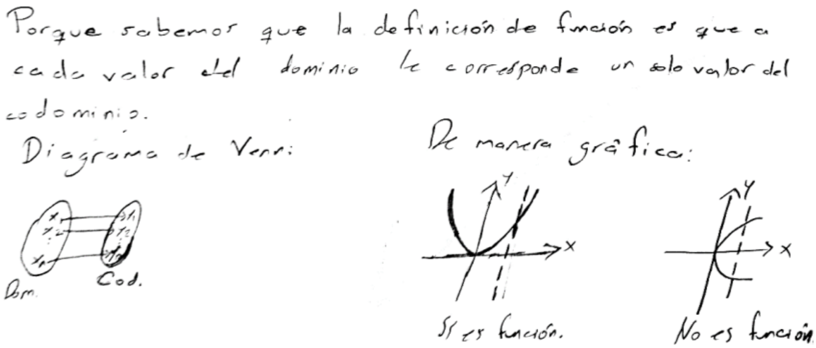
1. En una representación gráfica, el criterio de la recta vertical nos ayuda a determinar si ésta corresponde o no a la representación de una función. **Explique ampliamente** porqué es suficiente utilizar este criterio para validar esta afirmación.

Porque al trazarse una recta a cualquier gráfica el número de veces que esta recta corte determinará si es una función, si la corta una sola vez es función, sino es una relación. Se considera una función cuando al cortarse una única vez dá un resultado "a cada elemento de x le corresponde uno y sólo uno de y"

Otro argumento para justificar una comprensión alta en esta categoría se evidenció en la respuesta dada por A6 (Figura 8), se observó que este estudiante logró relacionar el criterio de la recta vertical con una característica de la definición del concepto de función. Ejemplificó por medio del diagrama de Venn la relación de correspondencia de que a cada valor de dominio le corresponde un único elemento del codominio. También, mostró evidencia de esta relación, con la utilización del criterio de la recta vertical, cuando se trata de determinar si una representación gráfica es o no función, mediante ejemplos gráfico-verbal.

Figura 8

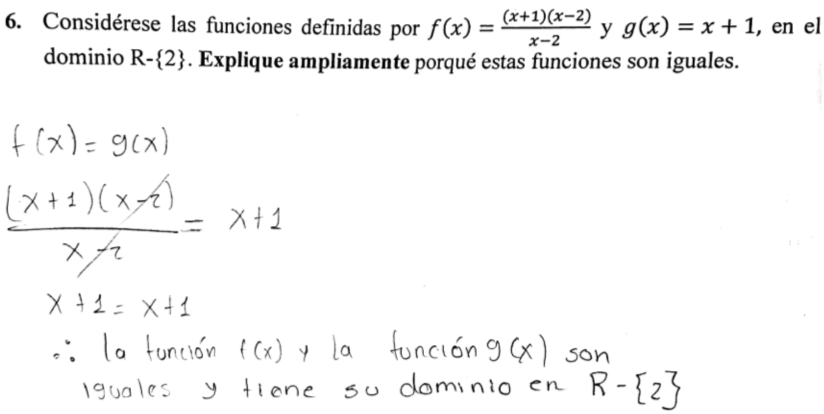
Respuesta de A6 para la categoría 3 (ítem 1)



Para el ítem 6 una respuesta que justifica una comprensión alta en esta categoría se evidenció en la respuesta dada por A24 (Figura 9), en la cual, el estudiante entiende que para que dos funciones sean iguales, sus dominios y regla de correspondencia deben ser las mismas. Esto se observa cuando el estudiante da evidencia por medio de un proceso algorítmico de la igualdad de las reglas de correspondencia y para el dominio de ambas funciones identifica que tienen el mismo conjunto de salida.

Figura 9

Respuesta de A6 para la categoría 3 (ítem 1)



6. Considérese las funciones definidas por $f(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{x-2}$ y $g(x) = x + 1$, en el dominio R-{2}. **Explique ampliamente** porqué estas funciones son iguales.

$f(x) = g(x)$

$\frac{(x+1)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} = x+1$

$x+1 = x+1$

$\therefore$ la función f(x) y la función g(x) son iguales y tiene su dominio en R-{2}

Los resultados, evidencian que los estudiantes universitarios al momento de utilizar el concepto de función, en general, no sustentan sus conclusiones para comunicar sus procesos en la resolución de ítems y construir justificaciones de acuerdo a lo considerado en el criterio 3, es decir, no proporcionan razones sólidas sobre su propia conclusión. Lo que intentan hacer, es identificar y argumentar solo si una afirmación es verdadera o falsa, dependiendo la situación de contexto de la afirmación. Lo que conlleva, que los estudiantes no logren explicar una regla matemática, presentando una endeble comprensión del concepto de función. Esto implica que para tener una comprensión alta se deben desarrollar no solo habilidades para el reconocimiento de aspectos de la función como su definición, su discriminación o su aplicación, sino además considerar la habilidad para poder justificar tales aspectos.

CONCLUSIÓN

En este trabajo se presentó el análisis de la comprensión de treinta y seis estudiantes universitarios acerca del concepto de función cuando resolvieron seis ítems que aludieron al concepto mencionado. Para el análisis se empleó el marco de referencia de Albert y Kim (2015), el cual, permitió el diseño de los ítems y conocer la capacidad de justificación y argumentación de los estudiantes.

En las producciones escritas de los estudiantes se aprecia que la mayoría de ellos, presentaron una comprensión baja en la categoría habilidad para justificar, lo que significa que no proporcionaron razones sólidas para justificar sus propias conclusiones. Al igual que en la categoría tres, entender de dónde viene una regla matemática, nuevamente la mayoría de los estudiantes presentan una comprensión baja del concepto de función, lo que da evidencia que ellos sólo demuestran habilidades de procedimiento o de memorización del proceso y no lograron entender el uso de una regla matemática. Mientras que, en la segunda categoría, entender por qué una afirmación matemática es verdadera, se evidencia que la mayoría de los estudiantes manifestaron una comprensión media del concepto de función, puesto que emitieron un valor de verdad correcto pero sus argumentos no validaron su postura en relación a lo afirmado.

En comparación con lo mencionado por la Common Core State Standards for Mathematics (2010), se puede concluir que los estudiantes universitarios no presentan una comprensión del concepto de función, ya que no cuentan con la capacidad de justificar sus procesos matemáticos de una manera adecuada, en contraste con su madurez formativa. Por tanto, para comprender un concepto matemático no solo se debe tener la habilidad procedimental de desarrollar un ejercicio, se debe tener una combinación de las tres categorías mencionadas por Albert y Kim (2015). Para ello, los docentes deben fomentar ítems que demanden a los estudiantes la necesidad no solo de desarrollar un ejercicio de forma procedimental, sino que logren entender, justificar y apropiarse de los conceptos matemáticos, con el objetivo que se preparen para su vida universitaria y profesional.

Por otra parte, de acuerdo a las razones presentadas por Prada, Hernández y Ramírez (2014) y lo encontrado en esta investigación, se puede ratificar que la comprensión baja que manifiestan la mayoría de los estudiantes sobre el concepto de función, se debe a que estos no priorizan la comprensión del concepto y de sus significados, debido a que se limitan a la manipulación algebraica del concepto, restringiendo así su comprensión. Lo cual, probablemente que se deba a lo mencionado por Cuevas y Pluvinage (2017), quienes expresan que uno de los problemas de la enseñanza del concepto de función, radica en como lo caracterizan los textos de matemáticas, como un objeto formal y no aplicado.

Es de notarse que hoy día, nos encontramos en el periodo moderno del desarrollo del concepto de función como se menciona en Díaz (2013), sin embargo, aunque el concepto hace parte fundamental del desarrollo de la vida de toda persona, se evidencia que, los estudiantes universitarios no han logrado comprenderlo para así poder comunicarse e interactuar de una forma asertiva en la sociedad, a pesar de que, en sus niveles educativos anteriores han trabajado con el concepto de función. Razón por la cual, se sugiere a los profesores tanto de educación media superior y superior, fomentar en sus estudiantes la habilidad de justificar sus argumentos matemáticos y profundizar la enseñanza del concepto de función, más desde lo conceptual que de lo procedimental. Lo que se busca, es que el estudiante comprenda de dónde provienen las reglas matemáticas inmersas en el concepto, como usarlas y logre argumentar su utilidad.

En relación con uno de los propósitos principales del marco de referencia, particularmente el diseño de tareas de medición que permitan conocer el aprendizaje matemático del estudiante, se dio evidencia del diseño de los ítems, los cuales fueron validados por usuarios y expertos. Permitiendo conocer el nivel de comprensión en que se encuentran los estudiantes universitarios en relación al concepto de función.

DECLARACIÓN DE LA CONTRIBUCIÓN DE LOS AUTORES

FMRV concibió la idea presentada. FMRV y JAAP desarrollaron la teoría. JAAP adaptó la metodología para la investigación, elaboró las actividades, y colectó los datos. FMRV and JAAP analizaron los datos. Todos los autores participaron activamente en la discusión de resultados, revisaron y aprobaron la versión final del trabajo.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos que respaldan los resultados de este estudio serán puestos a disposición por el autor correspondiente, [FMRV], previa solicitud razonable.

REFERENCES

Albert, L. & Kim, R. (2015). Applying CCSSM Definition of Understanding to Assess Students Mathematical Learning. In: *Assessment to Enhance Teaching and Learning* (pp. 233-246). National Council of Teachers of Mathematics.

Amaya, T. & Sgreccia, N. (2014). Dificultades de los estudiantes de once grado al hacer transformaciones de representaciones de una función. *Épsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales", 31*(3), nº 88, 21-38. https://thales.cica.es/epsilon/sites/thales.cica.es.epsilon/files/%5Bfield_volumen-formatted%5D/epsilon88_2.pdf

Amaya, T., Pino-Fan, L. & Medina R. (2016). Evaluación del conocimiento de futuros profesores de matemáticas sobre las transformaciones de las representaciones de una función. *Educación matemática*, *28*(3), 111-144. https://doi.org/10.24844/EM2803.05

Arizmendi, H., Carrillo, A. & Lara. M. *Cálculo. Primer curso nivel superior.* Addison-Wesley Iberoamericana.

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. & Weller, K. (2014). *APOS Theory. A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. Springer.

Bardini, C., Pierce, R., Vincen, J. & King, D. (2014). Undergraduate mathematics students' understanding of the concept of function. *IndoMS-JME*, *5*(2), 85-107. https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1079527.pdf

Common Core State Standards for Mathematics (2010). *National Governors Association Center for Best Practices*. Council of Chief State School Officer. http://www.corestandards.org/wp-content/uploads/Math_Standards.pdf

Cuevas, C. & Pluvinage, F. (2017). Revisitando la noción de función real. *El cálculo y su enseñanza*, *8*, 19-35. https://recacym.org/index.php/recacym/article/view/43/25

Delgado, M. L., Codes, M., Monterrubio, M. C. & González, M. T. (2014). El concepto de serie numérica. Un estudio a través del modelo de Pirie y Kieren centrado en el mecanismo "folding back". *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *6*, 25-44. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i6.85

Díaz, J. (2013). El concepto de función: ideas pedagógicas a partir de su historia e investigaciones. *El Cálculo y su enseñanza*, *4*, 13-26. https://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/data/docs/Diaz.a535a5fbaf7a54a6250cf5a0bf132fda.pdf

Crespo, C. & Ponteville, C. (2003). El concepto de función: su comprensión y análisis. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 16(1)*, 235-241.

Díaz, M., Haye, E., Montenegro., F. & Córdoba, L. (2015). Dificultades de los estudiantes para articular representaciones gráficas y algebraicas de funciones lineales y cuadráticas. *Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *41*, 20-38. http://www.fisem.org/www/union/revistas/2015/41/Artigo1.pdf

Dreyfus, T. & Eisenberg, T. (1982). Intuitive Functional Concepts: A Baseline Study on Intuitions. *Journal for Reseach in Mathematics Education*, *13*(5). 360-380.

Farfán, R. & García, M. (2005). El concepto de Función: Un breve recorrido epistemológico. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 18,* 489-494.

Figueiredo, C. & Contreras, L. (2013). A função quadrática: variação, transparência e duas tipologias de exemplos. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *3*, 45-68. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i3.62

Flores, J., Neira, V., Carrillo, F. & Peñaloza, T. (2019). Funciones reales de variable real: mediación de la calculadora científica. *Acta*

Latinoamericana de Matemática Educativa, *32* (2), 684-692. https://www.clame.org.mx/documentos/alme32_2.pdf

Hiebert, J. & Carpenter, T. P. (1992). Learning and Teaching with Understanding. In: *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 65-97). Macmillan.

Kastberg, S. E. (2002). *Understanding Mathematical Concepts: The Case of the Logarithmic Function*. The University of Georgia.

Michener, E. R. (1978). Understanding understanding Mathematics. *Cognitive Science*, *2*, 361-383. https://doi:10.1207/s15516709cog0204_3

National Governors Association Center for Best Practices and Council of Chief School Officers (NGA Center and CCSSO). (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. NGA Center and CCSSO.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. NCTM.

Nickerson, R. S. (1985). Understanding Understanding. *American Journal of Education 93*(2), 201-239.

Ortega, T. & Pecharromán, C. (2014). Errores en el aprendizaje de las propiedades globales de las funciones. *Revista de Investigación en Educación*, *12*(2), 209-221. http://reined.webs.uvigo.es/index.php/reined/article/view/258/305

Pino-Fan, L. R., Parra-Urrea, Y. E. & Castro-Gordillo, W. F. (2019). Significados de la función pretendidos por el currículo de matemáticas chileno. *Revista Internacional de Investigación en Educación*, *11*(23), 201-220. https://doi.org/10.11144/Javeriana.m11-23.sfpc

Pirie, S. & Kieren, T. (1994). Growth in mathematical understading: how can we characterise it and how can we represent it? *Educational Studies in Mathematics*, *26*, 165-190. https://doi.org/10.1007/BF01273662

Prada, R., Hernández, C. & Ramírez, P. (2014). Comprensión del concepto de función en los primeros cursos de educación superior. *El Cálculo y su Enseñanza*, *6*(6), 29-44.

Schoenfeld, A. H. (2007). What is mathematical proficiency and how can it be assessed? In: *Assessing Mathematical Proficiency* (pp. 59-74). Cambridge University Press.

Sfard, A. (1989). Transition from operational to structural conception: The notion of function revisited. In: *Proceedings of the Thirteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 3*, 151-158. G.R Didactique, CNRS.

Sierpinska, A. (1990). Some Remarks on Understanding in Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *10*(3), 24-36.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. In: *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*. Mathematical Association of America.

Skemp, R. (1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching*, *77*, 20-26.

Skemp, R. (1980). *Psicología del aprendizaje de las Matemáticas*. Ediciones Morata S.A.

Secretaria de Educación Pública. (2011). *Programa de estudio 2011. Guía para el Maestro. Educación Básica. Secundaria. Matemáticas.* SEP.

Serrano, W. (2007). Concepciones de los estudiantes sobre la inyectividad, sobreyectividad de la función cuadrática y sobre la gráfica de H: R-{0}→R definida por h (x)= sen x/x. *Sapiens: revista universitaria de investigación*, *8*(2), 169-186. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=41080211

Silva, L. & Kaiber, C. (2013). Reflexões sobre o ensino de funções sob a perspectiva do enfoque ontossemiótico. *Educação matemática em revista*, *14*(2), 27-36.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *The International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *14*, 293-305.

Vinner, S. & Dreyfus, T. (1989). Images and Definitions for the Concept of Function. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*(4), 356-366.

Watson, A. & Harel, G. (2013). The role of Teacher's Knowledge of Functions in their teaching: a conceptual approach with illustrations from two cases. *Canadian Journal of Science Mathematics and Technology Education*, *13*(2), pp. 154-158. http://dx.doi.org/10.1080/14926156.2013.784826

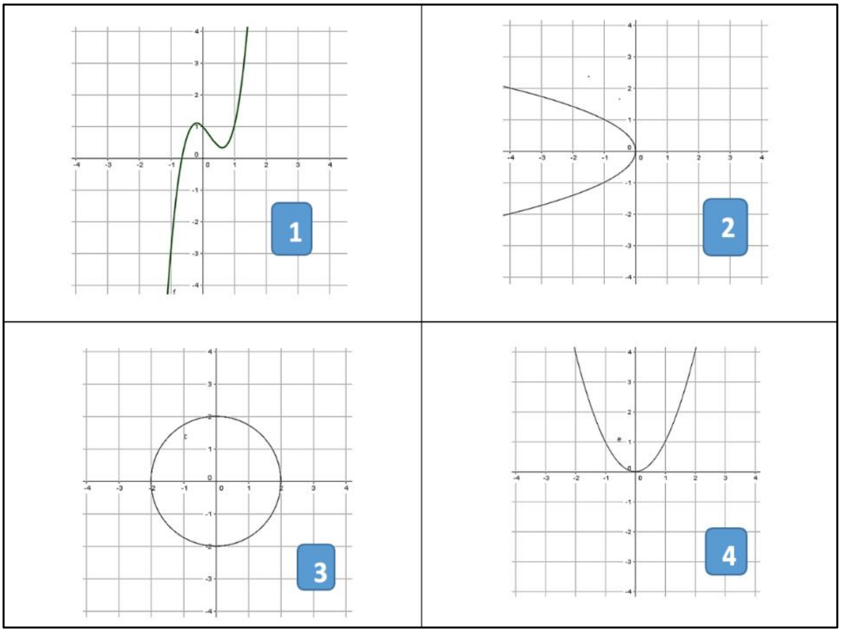
Wilkerson-Jerde, M. H. & Wilensky, U. J. (2011). How do mathematicians learn math?: resources and acts for constructing and understanding mathematic. *Educational Studies in Mathematics*, *78*, 21-43. https://doi.org/10.1007/s10649-011-9306-5

Anexo. Test de items diseñados y aplicados a los estudiantes.

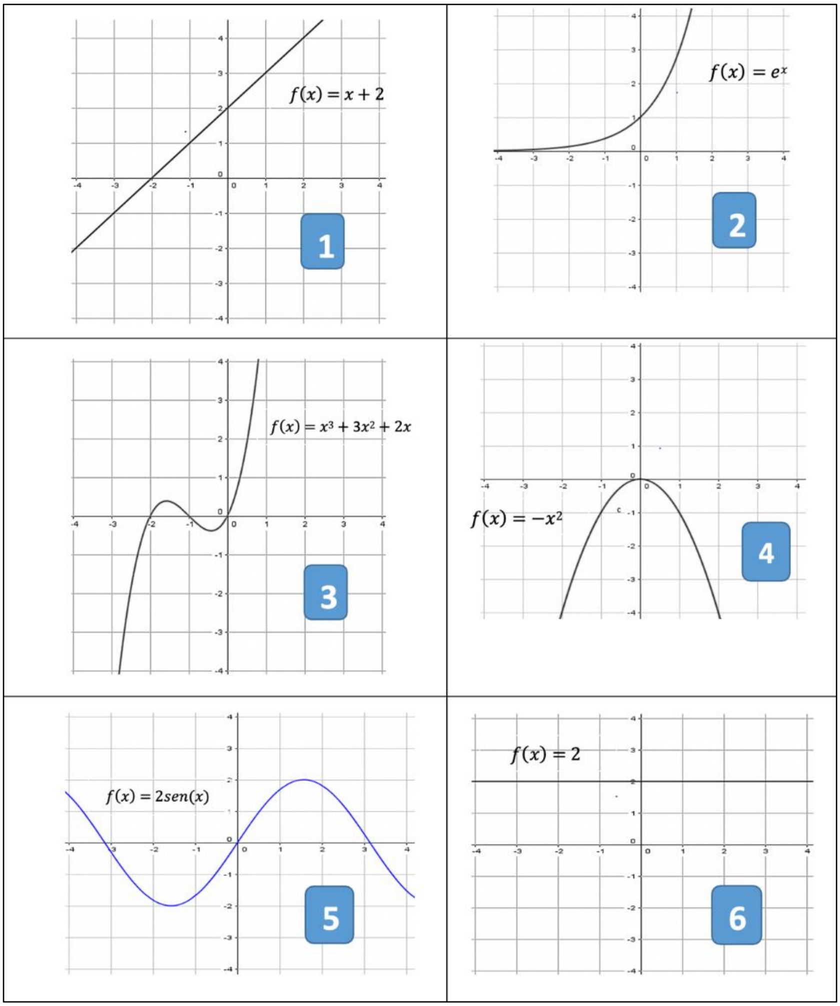
ÍTEMS

Sea $\Re$ el conjunto de los números reales y considérese las funciones de un subconjunto de $\Re$ en $\Re$.

1. En una representación gráfica, el criterio de la recta vertical nos ayuda a determinar si esta corresponde o no a la representación de una función. **Explique ampliamente** por qué es suficiente utilizar este criterio para validar esta afirmación.
2. Considere el siguiente enunciado: "el crecimiento de un niño puede ser modelado por una función real de variable real". La afirmación anterior es verdadera o falsa. **Justifique ampliamente** su respuesta.
3. En las siguientes representaciones gráficas, determine cuáles representan una función real de variable real. **Explique ampliamente** por qué.

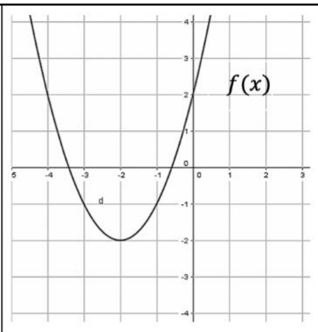


4. Considere las siguientes representaciones gráficas de funciones de dominio real con variable real y clasifíquelas en grupos diferentes según sus características. **Explique ampliamente** su respuesta.



5. Las siguientes representaciones están asociadas a una misma función real de variable real. **Explique ampliamente** por qué esta afirmación es verdadera.

x	$f(x)$
…	…
-4	2
-3	-1
$-{}^{3}/_{2}$	$-{}^{7}/_{4}$
-1	-1
0,2	2,84
1	7
2	14
…	…



$f(x) = x^2 + 4x + 2$

6. Considérese las funciones definidas por $f(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{x-2}$ y $g(x) = x + 1$, en el dominio R-{2}. Explique ampliamente por qué estas funciones son iguales.