



Desarrollo de Habilidades del Pensamiento Matemático desde la Formulación y Resolución de Problemas de Enunciado verbal

Enrique Mateus-Nieves ^a
 Harold Randolph Devia Díaz ^a

^a Universidad Externado de Colombia, Departamento. de Matemáticas, Bogotá, Colombia

Recibido para su publicación el 11 de mayo de 2020. Aceptado tras revisión el 23 de noviembre de 2020
Editora designada: Claudia Lisete Oliveira Groenwald

RESUMEN

Contexto: los profesores de matemáticas interesados en mejorar los desempeños de los estudiantes ante los bajos resultados académicos presentados, buscamos, **Objetivo:** Articular las habilidades del pensamiento matemático con la Formulación y Resolución de Problemas de Enunciado verbal (PAEV). **Diseño:** La metodología se enfocó en la Investigación–Acción desde el diseño y aplicación de una secuencia didáctica desarrollada desde tres categorías de análisis: habilidades de pensamiento, formulación y resolución de problemas aritméticos. **Escenario y participantes:** estudiantes de educación básica que inician la secundaria. **Colección y análisis de datos:** creamos e implementamos una secuencia didáctica que contemplo dos direcciones: una para la formulación y la otra para la resolución de PAEV. Cada una se monitoreo desde tres actividades: de apertura, de desarrollo y de cierre. **Resultados:** Se evidenció en los estudiantes que inician la secundaria, dificultades para formular y resolver problemas aritméticos de enunciado verbal. **Conclusiones:** luego de aplicar la intervención, se evidenció cambios en la Formulación y Resolución de problemas aritméticos de enunciado verbal en los estudiantes. Algunas dificultades detectadas en los alumnos están relacionadas con la longitud del enunciado, el orden de presentación de los datos, la situación de la pregunta, el tamaño de los números utilizados, elementos que afectan las estructuras sintáctica, semántica y matemática de los PAEV.

Palabras clave: Formulación y resolución de problemas aritméticos; Pensamiento matemático; Habilidades de pensamiento.

Development of Mathematical Thinking Skill from the Formulation and Resolution of Verbal Arithmetic Problems

Autor correspondiente: Enrique Mateus-Nieves. Email: jeman124@gmail.com, enrique.mateus@uexternado.edu.co

ABSTRACT

Background: mathematics teachers interested in improving student performance in the face of the low academic results presented, we seek, **Objective:** articulate the skills of mathematical thinking with the formulation and resolution of verbal statement arithmetic problems (PAVE). **Design:** the methodology was focused on action research from the design and application of a didactic sequence developed from three categories of analysis: thinking skills, formulation, and solving of arithmetic problems. **Setting and participants:** basic education students starting high school. **Data collection and analysis:** we created and implemented a didactic sequence that includes two directions: one for the formulation and the other the resolution of PAVE. Each one was monitored from three activities: opening, development and closing. **Results:** difficulties in formulating and solving verbal statement arithmetic problems were evidenced in those students. **Conclusions:** after applying the intervention, changes were evidenced in the formulation and resolution of verbal statement arithmetic problems in the group of students. Some difficulties detected in the students are related to the length of the statement, the order of presentation of data, the situation of the question, the size of the numbers used, elements that affect the syntactic and mathematical structures of the PAVE

Keywords: Formulation and resolution of arithmetic problems; Mathematical thinking; Thinking skill.

Desenvolvimento de Habilidades de Pensamento Matemático a partir da Formulação e Resolução de Problemas de Declarações Verbais

RESUMO

Contexto: professores de matemática interessados em melhorar o desempenho dos alunos frente aos baixos resultados acadêmicos apresentados, buscamos, **Objetivo:** Articular as habilidades de pensamento matemático com a Formulação e Resolução de Problemas de Enunciado Verbal (PAEV). **Design:** A metodologia centrou-se na Pesquisa-Ação a partir do desenho e aplicação de uma sequência didática desenvolvida a partir de três categorias de análise: habilidades de pensamento, formulação e solução de problemas aritméticos. **Ambiente e participantes:** alunos do ensino fundamental iniciando o ensino médio. **Coleta e análise de dados:** criamos e implementamos uma sequência didática que inclui duas direções: uma para a formulação e outra para a resolução do PAEV. Cada um é monitorado a partir de três atividades: abertura, desenvolvimento e encerramento. **Resultados:** Dificuldades na formulação e solução de problemas aritméticos de enunciado verbal foram evidenciadas em alunos que ingressaram no ensino médio. **Conclusões:** após a aplicação da intervenção, evidenciaram-se mudanças na Formulação e Resolução de problemas aritméticos de enunciado verbal dos alunos. Algumas dificuldades detectadas nos alunos estão relacionadas com o comprimento do

enunciado, a ordem de apresentação dos dados, a situação da pergunta, o tamanho dos números utilizados, elementos que afetam as estruturas sintáticas, semânticas e matemáticas do PAEV.

Palavras-Chave: Formulação e resolução de problemas aritméticos; Pensamento matemático; Habilidades de pensamento.

INTRODUCCIÓN

Los Lineamientos y Estándares curriculares en el entorno colombiano proponen cinco procesos para la actividad matemática que deben desarrollarse en el tránsito de la educación primaria y secundaria. Uno de estos procesos se relaciona con la formulación y resolución de problemas conocidos como Problemas Aritméticos de Enunciado Verbal – PAEV y que aparecen al finalizar la educación primaria y comenzar la secundaria.

El grupo de niños observados ingresan a la educación secundaria (grado sexto en Colombia); en ellos se evidenció: a) bajo nivel de comprensión lectora, b) incompreensión para formular y/o solucionar problemas aritméticos, c) problemas en comprensión y expresión oral y d) desconexión entre conceptos o conformación de redes conceptuales de diferentes disciplinas. Estas debilidades obstaculizan el proceso de aprendizaje en el estudiante para alcanzar las habilidades básicas requeridas, de acuerdo con los parámetros de las políticas educativas establecidas por el Ministerio de Educación Nacional (MEN). La evidencia la encontramos en los altos porcentajes de reprobación en cada periodo académico (pruebas internas institucionales), así como los resultados de las pruebas externas (Pruebas Saber 5°, aplicadas por el estado).

En los entornos escolares del contexto colombiano, existen orientaciones curriculares para distintas áreas del conocimiento. En particular, para matemáticas, se propone trabajar desde cinco pensamientos: 1) pensamiento numérico y sistemas numéricos, 2) pensamiento espacial y sistemas geométricos, 3) pensamiento métrico y sistemas de medida, 4) pensamiento aleatorio y sistemas de datos. 5) pensamiento variacional, sistemas algebraicos y analíticos (MEN, 2006). Dentro de estos cinco tipos de pensamiento propuestos cabe la posibilidad de integrar la formulación y resolución de problemas, es por ello que este trabajo busca realizar aportes a la relación entre la formulación y resolución de problemas aritméticos con el pensamiento matemático en poblaciones que terminan la educación básica primaria e inician la secundaria.

La muestra para esta investigación estuvo centrada en estudiantes que pasan de la educación básica primaria a la secundaria (grado sexto), en una institución de carácter público estatal, ubicada al sur occidente de la ciudad de Bogotá y que ofrece sus servicios a niños que habitan barrios subnormales de la zona. Buscamos identificar cambios en la Formulación y Resolución de Problemas Aritméticos en los estudiantes a partir del diseño e implementación de una secuencia didáctica que buscó desarrollar habilidades de pensamiento matemático elemental, desde la propuesta de Márquez (2014).

Considerando que la resolución de problemas se emprende casi a la par del aprendizaje de la lectura, encontramos que los problemas aritméticos elementales verbales utilizados por los niños están expresados mediante enunciados que no tienen como objetivo aclarar la comprensión del problema, sino formar parte de la tarea que se debe afrontar para resolverlo. Aspectos que generan dificultades en los estudiantes para comprender y relacionar la longitud del enunciado, el orden de presentación de los datos, la situación de la pregunta y el tamaño de los números para resolver el problema. Elementos que se perciben débiles, en la población objeto de este estudio, al momento de crear un problema matemático que tenga solución. En términos generales encontramos afectación en el uso y manejo de las estructuras sintáctica, semántica y matemática para formular y resolver PAEV.

ANTECEDENTES

Gaulín, (2001) indica que en el campo de la Educación Matemática se ha otorgado un espacio privilegiado a la Resolución de Problemas Matemáticos desde mitad del siglo XX, siendo Polya uno de sus precursores. Desde entonces la Resolución de problemas ha tenido tres perspectivas educativas: 1) enseñar para la resolución de problemas; 2) enseñar sobre la resolución de problemas; y 3) enseñar a través de la resolución de problemas (Gaulín, 2001). Desde entonces la resolución de problemas se ha incorporado en los currículos escolares y, por ende, es una habilidad que debe desarrollarse en los educandos a lo largo de su vida escolar.

Lara (2012) identifica tres corrientes generales que se interesaron desde finales de la década de los años 80 por las habilidades de pensamiento: La adquisición de destrezas intelectuales a través de programas académicos; el desarrollo del pensamiento crítico y los procesos de pensamiento. Por otra parte, Lucero (2009) ratifica la importancia de trabajar las habilidades de pensamiento como soporte el desarrollo integral del Ser; basada en los

resultados de la investigación adelantada por el grupo INDAGAR¹ de la Universidad Mariana (Colombia) en el periodo 2004-2009, la autora creó un modelo para desarrollar las habilidades de pensamiento expresadas en dos libros: *Desarrollo de habilidades de pensamiento* (1991) y *Aprende a pensar* (1993).

Araya (2014) estudia cómo presentar y potenciar cuatro habilidades de pensamiento (observación, inducción, razonamiento hipotético-deductivo y la abstracción en la resolución de problemas), con escolares de quinto grado, a través de una comparación de pre-test y post-test entre grupo control y grupo experimental, luego de aplicar un “plan institucional didáctico inteligente en matemáticas” (p. 9) en un periodo de seis meses.

Hernández (1996) enfoca la resolución *de problemas aritméticos verbales* en estudiantes con edades entre 8 y 11 años, a quienes se les enseña un sistema de representación visual-geométrico para abordar este tipo de problemas, centrado en el desarrollo de habilidades cognitivas, heurísticas y meta cognitivas. Allí, los estudiantes debían resolver tanto problemas de tipo aditivo como multiplicativo. Resalta la importancia a los significados semánticos que tienen los enunciados, dado que en los problemas que inventaban los estudiantes, se evidencian pocas palabras para indicar adiciones o sustracciones.

Bosch (2012) aborda aspectos del Pensamiento Matemático citando una diversidad de acepciones que existen del término «pensamiento». Bosch (2012) citando a Cantoral et al., lo caracteriza como la combinación de tópicos matemáticos y una serie de procesos de «pensamiento» como abstracción, justificación y visualización. Lo que nos permite referirnos al Pensamiento Matemático como la relación entre el pensamiento intuitivo y el pensamiento analítico debido a que se debe establecer una conexión entre ambos para resolver un problema matemático.

Saido, Siraj, Bin Nordin, & Al_Amedy (2018) categorizan los procesos mentales basados en la Taxonomía de Bloom vista desde dos elementos: las habilidades de pensamiento de orden inferior – LOTS (por sus iniciales en inglés *Lower Order of Thinking Skills*) y las habilidades de pensamiento de orden superior – HOTS (*Higher Order Thinking Skills*). En las LOTS se contempla Recordar, Comprender y Aplicar; y en las HOTS Analizar, Evaluar

¹ La investigación se llamó: Caracterización de las habilidades básicas de pensamiento que aplican, en la solución de problemas de la cotidianidad, los estudiantes del grado séptimo de la institución educativa municipal en San Juan de Pasto.

y Crear. Basada en estos aportes Márquez (2014) crea una propuesta de procesos mentales diseñada para apoyar el desarrollo del pensamiento en cualquier área del conocimiento, planteando una organización por niveles y tipos de conocimiento.

MARCO TEÓRICO

Se trabajaron dos ejes conceptuales: 1) los Problemas aritméticos, su clasificación y formulación, desde la postura de Puig & Cerdán (1988). 2) Las Habilidades de pensamiento desde la propuesta de Márquez (2014).

Problemas aritméticos

También conocidos como Problemas Aritméticos de Enunciado Verbal (PAEV), Puig & Cerdán (1988) citado en Espinoza et. al. (2015) plantea:

En el enunciado, la información que se proporciona tiene carácter cuantitativo ya que los datos suelen ser cantidades; la condición expresa relaciones de tipo cuantitativo y la pregunta se refiere a la determinación de una o varias cantidades, o relaciones entre cantidades. La resolución del problema, o lo que es preciso hacer para contestar la pregunta del problema, fundamentalmente parece consistir en la realización de una o varias operaciones aritméticas.

Desde esta postura teórica de los PAEV es posible analizar tres estructuras con las que se puede evidenciar la riqueza de un problema propuesto por los estudiantes en tareas de formulación: *Estructura semántica*, dividida en aditiva y multiplicativa, cada una con sus propias subdivisiones. *Estructura sintáctica*, indica la complejidad lingüística con la cual se plantea un enunciado escrito; considerando la longitud del texto, la proposición interrogativa y el tipo de números empleados. *Estructura matemática*, donde está presente el número de etapas y la cantidad de pasos para conseguir una solución. En la tabla 1 presentamos una adaptación de la clasificación de los PAEV considerando su estructura semántica, sintáctica y matemática guiados en los aportes de Espinoza et. al. (2015).

Tabla 1

Clasificación de PAEV (Espinoza et. al., 2015, p.21)

Tipo de estructura	PAEV	Sub clasificación	Caracterización	Ejemplo	
Estructura semántica	Aditiva	Combinación	Existe una relación parte – parte – todo entre conjuntos y se pide hallar el cardinal de uno de estos elementos.	En una granja hay 223 gallinas y 168 patos. ¿Cuántas aves hay en total?	
		Cambio	Existe una cantidad inicial la cual es sometida a cambios en una secuencia temporal.	En el colegio hay 264 chicos, entran después otros 264. ¿Cuántos chicos hay ahora?	
		Comparación	Existe una cantidad de referencia, una comparada y la diferencia entre ellas.	El Real Madrid ha marcado 89 goles. El Barcelona ha marcado 22 goles más. ¿Cuántos goles ha marcado el Barcelona?	
		Isomorfismo de medida	Existe una relación de proporcionalidad directa simple, donde se expresa la regla de correspondencia	El colegio va a comprar 150 cuadernos, cada uno cuesta 125 pesos. ¿Cuánto costarán todos los cuadernos?	
		Multiplicativa	Comparación	Existe una comparación entre dos cantidades del mismo tipo de magnitud a través de un escalar.	En el patio del colegio caben 240 niños. En la clase de 3° caben 30 niños. ¿Cuántas veces más, caben niños en el patio que en la clase de 3°?

		Existe la multiplicación cartesiana entre dos conjuntos o espacio de medidas. Aplican problemas de área o volumen, entre otros.	Tengo 6 consonantes y 5 vocales. ¿Cuántas sílabas distintas que empiecen por consonante puedo formar?
Producto de medidas			
Estructura sintáctica	Complejidad lingüística, entendido como el tipo del lenguaje usado, natural, analítico, simbólico. Vistos desde tres complejidades: estructural, cognitiva y del desarrollo. La información se presenta exclusivamente mediante el lenguaje verbal, y para resolverlos es necesario aplicar una o varias de las cuatro operaciones elementales.		
Estructura matemática	Los datos se ofrecen en forma de cantidades, ya sea verbal o numéricamente, y entre estos se establecen relaciones de tipo cuantitativo. Las preguntas nos instan a determinar una o varias de dichas cantidades. Se espera que haya claridad en el número de etapas y pasos a seguir.		

Usos del término “complejidad” en lingüística

Pallotti (2015) subraya la polisemia del término en la bibliografía lingüística y clasifica los diferentes significados de complejidad en tres grandes bloques: *Complejidad estructural*: propiedad formal de textos y sistemas lingüísticos que tiene que ver con el número de sus elementos y sus patrones relacionales. *Complejidad cognitiva*: tiene que ver con el coste de procesamiento asociado a las estructuras lingüísticas. *Complejidad del desarrollo*: considera el orden en que las estructuras lingüísticas emergen y se aprenden en la adquisición de segundas (y posiblemente, primeras) lenguas. Sin embargo, el concepto de complejidad ha sido interpretado de maneras diferentes en los estudios lingüísticos, permitiendo distinguir distintos tipos de complejidad dependiendo del tipo de análisis que se quiera realizar. Para ello, Dahl (2004) recomienda distinguir la complejidad del sistema de la complejidad estructural. La *complejidad del sistema* hace referencia a las propiedades de una lengua; mide el número de distinciones dentro de una categoría y calcula el contenido de la competencia del hablante. La *complejidad*

estructural calcula la cantidad de estructura de un objeto lingüístico y analiza la estructura de las expresiones.

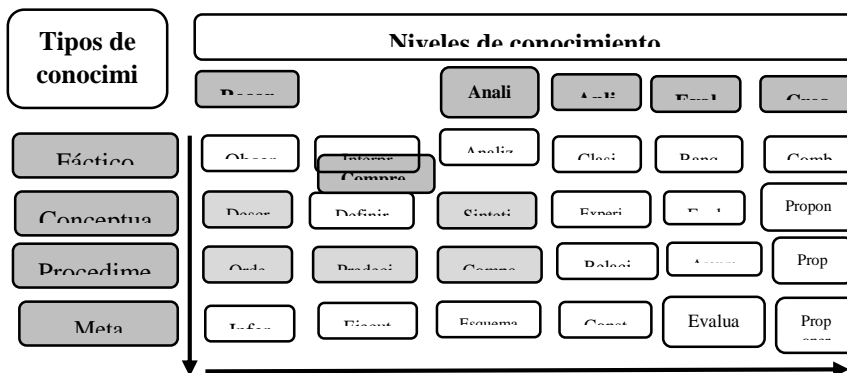
Habilidades de Pensamiento

Márquez (2014) señala que el desarrollo de habilidades de pensamiento “propicia un aprendizaje perdurable, significativo y de mayor aplicabilidad en la toma de decisiones y en la solución de problemas” (p. 33), retoma los trabajos relacionados con el pensamiento y formula una propuesta que desarrolla veinticuatro habilidades. Éstas son organizadas en una matriz que descompone el conocimiento en dos direcciones, por un lado, presenta seis niveles y por otro establece cuatro tipos, cada uno en orden ascendente como se muestra en la Figura 1.

La Figura 1 muestra la adaptación que elaboramos a la taxonomía para las habilidades el pensamiento desde la propuesta de Márquez (2014).

Figura 1

Taxonomía, habilidades de pensamiento. (Márquez, 2014, p. 66)



METODOLOGÍA

Se implementó la investigación acción, a un grupo de estudiantes que hacen transición de la básica primaria a la secundaria, en una institución de carácter público estatal, ubicada al sur occidente de la ciudad de Bogotá, que

atiende niños que viven en barrios subnormales de esta zona. Situación que les impide el manejo de recursos básicos para un desempeño escolar aceptable.

La investigación se desarrolló en tres fases. 1) *Planeación*: identificación del problema, antecedentes, postura teórica de respaldo que nos condujo a: diseñar y aplicar una prueba diagnóstica, desde dos instrumentos: uno para identificar la formulación de PAEV que los estudiantes hacían (invención de problemas). El otro, para monitorear la resolución de este tipo de problemas. Para ambos instrumentos se consideraron las estructuras semántica, sintáctica y matemática vista desde los aspectos: conceptual y procedimental, con nueve ítems que pretenden vislumbrar la complejidad en la formulación vista desde el razonamiento de los estudiantes en el proceso para solucionar las situaciones problema planteadas por ellos. Analizamos y triangulamos los resultados obtenidos, identificando fallas en las tres estructuras, centradas en 3 niveles de conocimiento que consideramos fueron de mayor relevancia (*recordar, comprender, analizar-sintetizar*), señalados en color gris claro en la *Figura 1*. Lo que nos permitió planificar y diseñar una secuencia didáctica (SD) de intervención centrada en la formulación y resolución de los PAEV.

Para el diseño de la SD se contemplaron las características básicas que plantea Díaz-Barriga (2013) desde tres momentos: *Actividades de apertura*: aquellas que permiten crear un clima apropiado para el aprendizaje, en el que el estudiante participa de discusiones, expresa interrogantes y en general muestra sus conocimientos previos al respecto del concepto a trabajar. *Actividades de desarrollo*: permiten que el estudiante genera interacción entre sus conocimientos previos y una nueva información para dotarla de significado. *Actividades de cierre*: permiten sintetizar todas las tareas realizadas y vislumbrar el aprendizaje desarrollado.

Fase 2) *Ejecución y observación*: se aplicó la SD durante un periodo académico, 9 semanas aproximadamente. Se observó, sistematizó y trianguló la información recogida, en el diagnóstico y la aplicación de la SD. Se sistematizó conforme a los descriptores propuestos en la Tabla 2 (expuesta en la sección 4 «resultados» de este manuscrito). Las respuestas se organizaron desde tres posibilidades de clasificación: (Sí) cuando un estudiante cumple con el descriptor, (No) cuando no lo logra y NA (No aplica) cuando un ítem es omitido o lo escrito en él no tiene relación alguna con el descriptor. Fase 3) *Evaluación*: se realizó una prueba de salida que evaluó la intervención de la SD, y se contrastó con los resultados del diagnóstico, para verificar si existió evolución en los procesos matemáticos de los estudiantes. La información se

recolectó utilizando la herramienta Google forms, donde es posible crear tablas dinámicas y los filtros por categorías.

RESULTADOS

En la tabla 2 mostramos la triangulación entre habilidades del pensamiento matemático, Formulación y Resolución de los PAEV, con el objeto de identificar en cuál estructura se presentan dificultades. Desde este instrumento diseñamos la prueba diagnóstica que arrojó debilidades en los cuatro tipos de conocimiento propuestos en Márquez (2014), detectando serias fallas en las estructuras sintáctica, semántica y por ende en la matemática. Por cuestión de espacio nos detendremos únicamente en los tipos: conceptual y procedimental abordados desde tres niveles (recordar, analizado desde describir, ordenar); comprender, (analizado desde predecir); y analizar (desde sintetizar y comparar) considerado el tipo de estructura que se involucra.

Tabla 2

Triangulación entre habilidades del pensamiento matemático, formulación y resolución de PAEV desde cada estructura

Habilidad de pensamiento	Indicador de la habilidad	Categoría	Subcategoría	Código	Descriptor
Describir	El estudiante relaciona elementos característicos de objetos o situaciones	Formulación	Estructura sintáctica	1	El enunciado del problema tiene tres o más proposiciones
				2	El enunciado del problema contiene al menos dos cantidades
				3	El problema tiene estructura aditiva de cambio (existe variación sobre una cantidad inicial)
			Estructura semántica	4	El problema tiene estructura aditiva de combinación (existen dos o más cantidades aisladas sin variaciones y forman parte de un todo)
				5	El problema tiene estructura aditiva de comparación (existen dos o más cantidades y se debe calcular la diferencia entre ellas)

Ordenar	El estudiante organiza información según un patrón indicado o inventado	Resolución	Fase de análisis	6	El problema tiene estructura multiplicativa de isomorfismo de medida (existe una relación de proporcionalidad directa simple)		
				7	El problema tiene estructura de comparación multiplicativa (en la situación interviene un escalar sobre una variable como método de comparación)		
				8	El problema tiene estructura de producto de medida (plantea un producto cartesiano de medidas)		
				9	Identifica la información relevante del problema		
				10	Identifica qué pregunta la proposición interrogativa del problema		
		Predecir	El estudiante pronostica posibles causas o consecuencias de	Formulación	Estructura matemática	11	La estructura matemática del problema es mixta, (combina estructura aditiva y estructura multiplicativa)
						12	La estructura matemática del problema es aditiva (+, -)
						13	La estructura matemática del problema es multiplicativa, (\cdot , \div)
						14	La estructura matemática del problema es de más de una etapa
						15	Plantea una secuencia lógica de pasos que permiten resolver el problema
				Resolución	Fase de exploración	16	Muestra indicios de diagramas, tablas o esquemas que le permitan comprender el problema
17	Muestra indicios de desarrollar correctamente adiciones						
18	Muestra indicios de desarrollar correctamente sustracciones						
19	Muestra indicios de desarrollar correctamente multiplicaciones						
20	Muestra indicios de desarrollar correctamente divisiones						
Formulación	Estructura sintáctica	21	Sigue todos los pasos concebidos para resolver el problema				
		22	Verifica que su problema tenga solución				
		23	La proposición interrogativa se puede contestar con la información numérica del problema				
		24	La proposición interrogativa tiene solución coherente con el tipo de números empleados y las relaciones entre variables involucradas en el enunciado				
		25	La proposición interrogativa es de asignación (preguntar por la cantidad de una variable)				

	una situación			26	La proposición interrogativa es relacional (está presente un escalor a manera de comparación)
				27	La proposición interrogativa es condicional (dependencia entre dos variables medida por una cantidad explícita)
		Resolución	Fase de exploración	28	Muestra indicios de estrategias numéricas que le permitan llegar a la solución del problema
		Formulación	Estructura sintáctica	29	El problema presenta la información numérica y la proposición interrogativa relacionada con ella
Sintetizar	El estudiante integra un todo a partir de las partes	Resolución	Fase de comprobación	30	El problema involucra más de un tipo de número (natural, decimal, etc.)
				31	Escribe una respuesta lógica y correcta a la proposición interrogativa del problema
				32	Escribe una respuesta correcta numéricamente pero parcial a la proposición interrogativa
		Formulación	Estructura matemática	33	Formula problemas que requieren diferentes procesos aritméticos para su solución
Comparar	El estudiante identifica semejanzas y diferencias entre objetos o situaciones	Resolución	Fase de comprobación	34	Muestra indicios de que revisa la solución de un problema
				35	Compara su solución con otra y considera que la suya es la correcta
				36	Identifica semejanzas entre procesos de resolución de un mismo problema
				37	Identifica diferencias entre procesos de resolución de un mismo problema

En la *Figura 2* mostramos algunas imágenes, de una serie de ellas, que les ofrecimos a los estudiantes en la fase diagnóstica, invitándolos a que inventaran un problema de matemáticas, permitiéndoles mezclar información entre imágenes o con datos que ellos podían colocar. Identificamos debilidades en las estructuras sintáctica y semántica dado que los niños redactan situaciones problema limitándose a escribir frases que involucran cantidades seguidas por preguntas que algunas veces no tienen solución; otras, la información que proporcionan no es suficiente para responder la pregunta formulada.

Figura 2

Imágenes entregadas a los estudiantes (Fuente: ver pie de página 4, 5, y 6)



Algunos niños formularon problemas como: Estudiante E1. *Juan va a la barbería a peluquearse, ¿cuánto paga si va tres veces en la semana?* Normalmente nadie va a peluquearse tres veces a la semana. E2: *Con mi mamá hacemos biscochos, usamos huevos, 1 libra de harina y sal. ¿cuantos biscochos hacemos al día?* E3: *el carro 21 va de primero a 80 km/h, ¿cuantos kilómetros recorre?* de esta información se infiere que en estos estudiantes poco se ha trabajado en las complejidades estructural y del desarrollo que debe tener una situación problema para que sea bien formulada y tenga solución. Luego de la intervención con la SD implementada a partir de los problemas por ellos creados se encontró la relación que mostramos en la tabla 3

Tabla 3

Cambios en la Formulación de PAEV

Diagnóstico	Prueba de salida
Los niveles de acierto en la creación de un problema, estaban entre el 19 y 40%.	Se presenta una variación inversa entre los problemas de estructura aditiva y multiplicativa.
Las producciones de los estudiantes tienden a ser de tipo	

² Tomado y adaptado de: <https://graffica.info/la-barberia-del-mono-art-show/>

³ Tomado de: <https://sp.depositphotos.com/186650702/stock-illustration-cartoon-of-mother-and-son.html>

⁴ Tomado de: <http://melhores-desenhos-para-colorir.blogspot.com/2017/04/5-desenhos-de-carros-para-colorir.html>

Estructura matemática	<p>aditivos, seguidos por los de tipo multiplicativos.</p> <p>El 40% de las producciones logran tener de más de una etapa.</p> <p>La cuarta parte de los problemas planteados requieren diferentes operaciones aritméticas para su solución.</p>	<p>La creación de problemas que requieren diferentes operaciones aumenta en 47%.</p> <p>La creación de problemas que involucra más de una operación aumenta en 55%</p>
Estructura semántica	<p>En las estructuras aditivas predomina la combinación, seguida por el cambio. Ninguna es de comparación.</p> <p>La estructura multiplicativa predominante fue isomorfismo de medida, seguida de comparación multiplicativa y ninguna de producto de medida.</p>	<p>La estructura aditiva de combinación continúa predominando, mientras que la de cambio disminuye en un porcentaje bajo.</p> <p>La estructura de producto de medida sigue ausente y la de comparación multiplicativa desaparece. Sólo predomina el isomorfismo de medida.</p>
Estructura sintáctica	<p>El 64% de las producciones utiliza al menos tres proposiciones. Sin embargo, menos de la mitad de los estudiantes verifican que el problema formulado tenga una solución coherente con las relaciones numéricas y semánticas que han establecido.</p>	<p>Aumenta el uso de proposiciones igual o superior a tres, manteniendo el uso de al menos dos cantidades en el enunciado. El porcentaje de problemas redactados que son solubles aumenta en 55%.</p> <p>La proposición interrogativa condicional aparece por primera vez.</p>

De la tabla 3 podemos inferir que, la complejidad cognitiva: relacionada con el procesamiento asociado a las estructuras lingüísticas empleadas «semántica y sintáctica» es necesario considerar otras cuestiones que tienen que ver más con el significado matemático del texto. Hablamos de los operadores semánticos y de las situaciones representadas. Los primeros son una serie de palabras cuya importancia para la comprensión del problema es crucial, pues se encargan de establecer las conexiones entre la incógnita y los datos. En nuestro caso los operadores más utilizados fueron “*cuánto cuesta*” seguido por la palabra “*mas*”. El significado de estos operadores viene definido

por la función que desempeñan en el enunciado del problema, y no por los atributos informativos propios. Por ejemplo, “más” sugiere claramente una suma. Sin embargo, “cuánto cuesta” se convierte en un término ambiguo, porque implica tanto una pérdida (resta) para la persona que realiza la acción como un aumento (suma), en el caso de la persona que vende. Por tanto, ninguno de los dos términos es plenamente contradictorio con la operación que debemos realizar. En estos casos se dice que el enunciado es congruente o consistente cuando el estudiante considera que al formular la pregunta, esta vaya orientada al comprador o vendedor.

Con relación a la complejidad del desarrollo, al igual que los operadores, las situaciones que recrean los enunciados también son una de las causantes de que, por ejemplo, no todos los problemas creados por ellos puedan resolverse gracias a una operación aritmética. Sin embargo, para que el estudiante alcance habilidad y destreza para crear PAEV, necesitará apoyo del profesor que lo dirija a aprender a plantear este tipo de problemas escolares y comprenda correctamente el significado y uso de cada una de las cuatro operaciones básicas. La primera variable que debe considerar el profesor, es enseñarle al niño a considerar si la situación por él planteada es realmente un problema matemático. Luego enseñarle a reconocer diferencia en la clasificación, esto es, si el problema se resuelve por más de una operación aritmética. De esta manera el niño distinguirá entre PAEV simple (o de una etapa), en cuya resolución se necesita únicamente una de las cuatro operaciones elementales, y los PAEV compuestos (o de varias etapas), en el caso de que requiera el uso de varias operaciones.

De las tres estructuras que componen el proceso de Formulación de PAEV, las principales variaciones posteriores a la intervención pedagógica se concentraron en la estructura sintáctica relacionada con la redacción del enunciado y la proposición interrogativa del problema. A pesar de ello, las estructuras matemática y semántica no lograron variaciones superiores al 50%.

CONCLUSIONES

En Formulación de PAEV. De las tres estructuras que se estudian en la Formulación de un PAEV de acuerdo con Espinoza et. al. (2015), la tabla 4 muestra cómo los estudiantes alcanzan comprensión de la importancia de considerar las cuatro fases que debe tener la estructura matemática para que el problema planteado tenga solución «complejidad estructural»; cabe aclarar que

se fortaleció la estructura matemática, pero se obtuvo menor variación en las estructuras semántica y sintáctica «complejidades: cognitiva y del desarrollo».

Tabla 4

Cambios en la Resolución de PAEV

Fases	Diagnóstico	Prueba de salida
Fase de Análisis	El estudiante expone información irrelevante en el enunciado sin coordinar lo que indica la proposición interrogativa.	El estudiante identifica información relevante para formular problemas matemáticos. Se logra que al menos el 30 % de ellos identifique cambios relacionados con la proposición interrogativa.
Fase de Exploración	Ausencia de estrategias numéricas para aproximarse a la solución de problema. El 14% de los estudiantes logra escribir una secuencia de pasos lógicos para resolver el problema. Es ausente el uso de diagramas o esquemas que permitan organizar la información.	Uso de estrategias numéricas, como relacionar cantidades “semejantes” para solucionar un problema. Se evidencia uso de secuencias lógicas que permitan solucionar el problema planteado. Persiste la ausencia en usar diagramas o esquemas que le permitan abordar el problema.
Fase de Ejecución	Los estudiantes prefieren aproximarse a los resultados por medio de adiciones o sustracciones evitando multiplicaciones y divisiones. Sólo la tercera parte de los estudiantes ejecuta el plan tal como lo escribe en la fase de exploración.	Continúa la tendencia a preferir adiciones o sustracciones. Aparece la multiplicación como una operación a utilizar. Se crea conciencia sobre la importancia de seguir una secuencia de pasos lógicos.

Fase de Comprobación	<p>Hay identificación de semejanzas al comparar dos procesos de resolución.</p> <p>No existe indicios de escribir respuestas correctas y lógicas a la proposición interrogativa.</p> <p>Se percibe aproximación a resultados numéricos sin redacción alguna.</p> <p>El 19% de los niños considera que su proceso de solución es correcto.</p>	<p>Se prioriza la identificación de semejanzas y diferencias entre dos procesos de resolución.</p> <p>Se logra conciencia al redactar el PAEV, de tal forma que sea coherente con el uso de número.</p> <p>Se valida la respuesta obtenida como correcta.</p>
-----------------------------	---	---

De las tablas 3 y 4 podemos inferir que la Resolución presenta variaciones superiores a la Formulación, debido a que los estudiantes expresaron que, en las clases de matemáticas no es habitual que los profesores les pidan inventar problemas y menos a partir de imágenes; regularmente el profesor los da. Los problemas aritméticos con los cuales están familiarizados se reduce al uso de operaciones aditivas. Como consecuencia del constante trabajo individual alternado con trabajo en equipo que propició la SD, la interacción entre los estudiantes de alguna manera obligó a mejorar su comunicación e intercambio de ideas, generando mayor confianza frente a las tareas matemáticas propuestas y su propia identidad como par académico de sus compañeros. De alguna manera este efecto podría asociarse con lo que en el Modelo de Schoenfeld denomina Sistema de creencias (en relación con la confianza ganada hacia sí mismo) y las estrategias heurísticas (en el diálogo e intercambio de ideas con los pares académicos).

Para la Resolución de PAEV se evidenció avance significativo en las fases de análisis, exploración y comprobación cuando existió la posibilidad de comparar el proceso realizado con la de otro par académico. Destacamos que la fase de análisis se fortaleció debido a que los estudiantes aprendieron a identificar información relevante en un enunciado y la relación que éste tenía con la formulación de la pregunta. Creemos que este cambio en la estructura sintáctica se atribuye a la posibilidad que hubo durante las actividades de desarrollo de la SD, de mostrar al grupo de estudiantes algunas de sus propias producciones de manera anónima y ponerlas al juicio de ellos. En esta actividad, los estudiantes expresaban si tenía sentido un enunciado, si era comprensible, si la proposición interrogativa tenía relación con el enunciado u

otras opiniones que les suscitara el ejercicio. Al parecer, el hecho de identificarse como autor de una producción que no clasificaba como un PAEV, motivó a que en la prueba de salida los estudiantes invirtieran mayor concentración en las tareas de Formulación. Los pocos problemas en la prueba de salida que corresponden a la estructura semántica multiplicativa permiten evidenciar que la idea de proporcionalidad directa opera en la mente de los estudiantes, pero aún no conciben la posibilidad de comparar dos cantidades a través de un escalar o una situación donde exista el producto de medidas, tarea a fortalecer y tema para otra investigación.

En contraste, las estructuras matemática y semántica no lograron una variación significativa, dado que requieren dedicar mayor tiempo para su trabajo. De acuerdo con Espinoza et. al. (2015) para la Formulación de un PAEV, el cambio presentado con relación al proceso de la Resolución, se evidenció en la variación en las fases de Análisis y Comprobación al alternar trabajo individual con grupal, donde algunas ocasiones era necesario brindar más tiempo para la discusión grupal en la que varios estudiantes se veían comprometidos con las tareas propuestas. El hecho que el docente sólo diera respuesta decisiva a los resultados de los estudiantes poco antes de finalizar las sesiones de clase generó tanto emociones como asunciones frente a los problemas planteados.

En cuanto la secuencia de pasos propuesta para abordar un PAEV, se destaca que la identificación de información primaria y secundaria causaba bastantes conflictos en las discusiones de grupo, evidenciando así un esfuerzo de parte de los estudiantes por entender la relación entre las cantidades que aparecen en los enunciados y las relaciones que se establecen con ellas, conduciéndoles a identificar si la situación presentaba un PAEV simple o un PAEV compuesto. Otro paso que representó dificultad para los aprendices fue el explicitación de la secuencia lógica para resolver un problema «fases», por un lado, al comparar el trabajo con otro compañero generaba discusiones porque los de mayor edad trataban de ser más específicos en sus indicaciones «análisis y exploración» y, por otro lado, el asumir como obvias ciertas interpretaciones «ejecución», causaba descontento en el trabajo grupal, particularmente en los niños de menor edad. Elementos a considerar por parte del docente encargado para no generar malestar en los estudiantes.

Logramos superar las dificultades que había en las fases de análisis y exploración, enseñado a los niños a identificar la estructura semántica que debe tener una situación que deseamos sea un problema en matemáticas, relacionados con longitud del enunciado, el orden de presentación de los datos,

la situación de la pregunta y el tamaño de los números a usar. En este apartado identificamos dificultades para usar las fases de ejecución y comprobación relacionado con la elección de las estrategias resolutorias que seguían los estudiantes. Algo lógico, si tenemos en cuenta que la resolución de problemas se emprende casi a la par del aprendizaje de la lectura. En este sentido, hay que resaltar que los problemas aritméticos elementales verbales están expresados mediante el lenguaje propio de la instrucción aritmética y que, por lo general, sus enunciados no tienen como objetivo aclarar la comprensión del problema, sino formar parte de la tarea que se debe afrontar para resolverlo.

Los elementos antes descritos, nos permiten inferir que las habilidades de pensamiento, desde la perspectiva de Márquez (2014), se logró avance en *describir, ordenar, predecir* desde la implementación de tareas que requerían la descripción y síntesis (relacionadas con las fases de análisis y exploración), de una situación problema; destacándose la habilidad de predicción como la mejor desarrollada. En tanto las fases de ejecución y comprobación, relacionadas con las habilidades *sintetizar y comparar*, requieren de mayor trabajo con este tipo de población, debido a que los niños se encuentran en transición de una etapa de operaciones concretas a una de operaciones formales. Sin embargo, notamos que las prescripciones autoimpuestas que se hace un adulto y sitúa el foco en lo que realmente les interesa no está presente en la mente los niños. Creemos que esto sucede porque la experiencia lectora de estos niños se reduce a literatura infantil y a algunos textos informativos adaptados en los años escolares anteriores, y los rasgos semánticos que se destacan durante la lectura narrativa son diferentes a los que debemos acentuar cuando afrontamos el texto de problemas matemáticos escolares.

Creemos que el análisis de contenido desarrollado en este trabajo es útil para profesores de matemáticas de primaria como herramienta para clasificar los diferentes PAEV aditivos y multiplicativos, considerados como modelo de enseñanza para promover los mismos desde los más sencillos a los más difíciles. Reiteramos, se debe hacer énfasis en la estructura semántica y la componente sintáctica. En este sentido, la forma de esquematizar es otro elemento que contribuye en la comprensión y representación del problema; elementos que hacen necesaria la articulación de áreas del saber, mínimo lecto-escritura y matemáticas.

Durante el desarrollo de este trabajo notamos que el nivel bajo en la competencia de resolución de problemas por parte de los estudiantes, puede estar influenciada por la forma natural en que los profesores usan de manera

directa los problemas planteados en los libros de texto, sin considerar las fases de planificación y desarrollo de los mismos.

RECOMENDACIONES

Es inminente la articulación diferentes áreas del conocimiento para que los estudiantes de este nivel alcancen un manejo adecuado de las estructuras semántica y sintáctica de manera coherente, lo que facilitara una estructura matemática adecuada.

Es importante que el profesor que enseña matemáticas en primaria, reconozca que los PAEV pueden entrañar dificultades que seremos incapaces de solventar correctamente si solo hacemos un estudio superficial de ellos, dado que, los problemas aritméticos elementales verbales son el primer contacto con la resolución de problemas que tienen los niños, de ahí que es importantísimo que sus primeros acercamientos por este nuevo campo de actividad no empiecen de forma inadecuada. Aquí es importante que el profesor oriente al estudiante a reconocer que un problema no es problema, hasta que el niño comprenda sus características y reglas. Es decir, hasta que asume que lo que tiene delante es una tarea de las matemáticas escolares y no otra cosa.

Los PAEV son necesarios, gracias a ellos los niños y niñas pueden empezar a ser competentes en esa particular tarea de “escribir” en matemáticas por medio de problemas. Por ello, se hace necesario que el profesor considere en detalle las características semánticas y sintácticas que forman un problema matemático coherente y soluble. Es decir, al enseñar enfatice si el estudiante comprende e identifica la estructura semántica del problema que ha creado o que se le ha ofrecido. Dado que, al no comprenderlo, este podría elegir un procedimiento inadecuado para solucionarlo o simplemente abandonarlo, como se refleja actualmente en la mayoría de los estudiantes que cursan secundaria.

Un aspecto que consideramos quedó pendiente para profundizar está relacionado con el proceso de Formulación, particularmente en los descriptores 3, 7 y 13, La interpretación de la situación presente con estos descriptores se presenta en la Tabla 5.

Tabla 5

Interpretación de variación negativa o nula en la Formulación

Descriptor	Interpretación
3	Los estudiantes abandonaron la estructura aditiva de cambio. Se presume que algunos hicieron transición de problemas de cambio a las de combinación y comparación.
7	Descriptor referido a la estructura multiplicativa. Muy pocos estudiantes lograron hacer transición hacia la estructura de isomorfismo de medida.
13	Referido a la estructura matemática multiplicativa de los PAEV. Algunos estudiantes que habían presentado manejo elemental de esta estructura, o la abanderaron, o regresaron hacia la formulación de PAEV con estructura matemática netamente aditiva.

CONTRIBUCIONES DE LOS AUTORES

EMN dirigió el proyecto de investigación, planeó los antecedentes, pregunta, objetivos, marco teórico, metodología, triangulación de la información recopilada, resultados, conclusiones y la estructura formal del presente documento. HRDV desarrolló el proyecto de investigación, y ejecutó el trabajo de campo, recopilando información in situ, ayudó a diseñar, aplicar instrumentos; aplicar las fases de la metodología, la planeación de resultados, conclusiones, así como la organización del sílabo y guía de asignatura del seminario electivo.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos que respaldan este estudio serán puestos a disposición por el autor correspondiente (EMN), previa solicitud razonable.

BIBLIOGRAFIA

Araya, N. (2014). Las habilidades de pensamiento y el aprendizaje significativo en matemática, de escolares de quinto grado de Costa Rica. *Actualidades Investigativas en Educación*, 14(2), 1-30.
<https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5671684>

- Bosch, M. (2012). Apuntes teóricos sobre el pensamiento matemático y multiplicativo en los primeros niveles. *Edma 0 -6: Educación matemática en la infancia*, 1(1), 15–37.
- Dahl, O. (2004). *The growth and maintenance of linguistic complexity*. John Benjamins.
- Díaz-Barriga, A. (1996). Guía para la elaboración de una secuencia didáctica. *Comunidad de Conocimiento*. UNAM.
- Espinoza, J., Lupiáñez, J. & Segovia, I. (2015). Un esquema para analizar los enunciados de los problemas de los estudiantes en contextos de invención de problemas. *Uniciencia*, 29(1), 58 – 81.
- Gaulín, C. (2001). Tendencias actuales de la resolución de problemas. *Sigma*, 19, 51 -63.
- Hernández, J. (1996). *Sobre habilidades en la resolución de problemas aritméticos verbales, mediante el uso de dos sistemas de representación yuxtapuestos*. (Tesis doctoral). España: Universidad de la Laguna.
- Lara, A. (2012). Desarrollo de habilidades de pensamiento y creatividad como potenciadores de aprendizaje. *Revista UNIMAR*, 30(1), 85–96.
- Lucero, S. (2009). Las habilidades de pensamiento en del desarrollo humano. Una aplicación de la investigación. *Revista UNIMAR*, 27(2), 59–64.
- Mateus-Nieves, E. & Rojas, C. (2020). Generalización matemática desde la articulación del pensamiento matemático avanza y la teoría de nudos. *Acta Sci. (Canoas)*, 22(3), 65-82, <http://doi.org/10.17648/acta.scientiae.5667>
- Márquez, P. (2014). *Cómo desarrollar habilidades de pensamiento. Guía basada en cinco propuestas de investigadores*. Ediciones de la U.
- MEN. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. En Ministerio de Educación Nacional (Ed.), *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas* (pp. 46–95).
- Pallotti, G. (2015). A simple view of linguistic complexity. *Second Language Research*, 31, 117-134.
- Pinchao, L. (2009). Desarrollar habilidades de pensamiento en el educando, una necesidad apremiante. *Revista UNIMAR*, 27(2), 29–34.

- Puig, L. & Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Síntesis.
- Saido, G., Siraj, S., Bin Nordin, A., & Al_Amedy, O. (2018). Higher Order Thinking Skills Among Secondary School Students in Science Learning. *MOJES: Malaysian Online Journal of Educational Sciences*, 3(3), 13-20. <https://mojes.um.edu.my/article/view/12778>