ACTA SCIENTIAE

ISSN: 2178-7727
DOI: 10.17648/acta.scientiae.5667

Generalización matemática desde la articulación del pensamiento matemático avanzado y la teoría de nudos

Enrique Mateus-Nieves[a]
Cristian Andrés Rojas Jimenez

[a] Universidad Externado de Colombia. Facultad de Educación, Departamento de Matemáticas, Bogotá, Colombia

Recibido para publicación 4 feb. 2020. Aceptado después de su revisión 5 mayo 2020.
Editora designada: Claudia Lisete Oliveira Groenwald

RESUMEN

Antecedentes: Los profesores de Topología y algebra moderna manifestaron interés en la necesidad de crear un espacio que permita profundizar el proceso de Generalización Matemática desde la articulación de algunos conceptos de la Teoría de Nudos con el desarrollo de habilidades del Pensamiento Matemático Avanzado (PMA). **Objetivo:** Ofrecer a los estudiantes un espacio adicional de formación disciplinar que les permita profundizar el proceso de Generalización matemática. **Diseño:** La metodología utilizada tiene un enfoque cualitativo, como estrategia asumimos la investigación-acción desde la propuesta de Whitehead (1991) desde tres fases. **Entorno y participantes:** estudiantes del programa Licenciatura en Matemáticas que cursan de tercer a sexto semestre. **Recopilación y análisis de datos:** enfatizamos en la segunda fase (de intervención), dado que nos permitió articular el esquema holístico de la teoría de nudos con el PMA como se muestra en las tablas 2, 3 y 4 (sección resultados). **Resultados:** El resultado fue la creación de un sílabo y guía de asignatura para un seminario electivo, que se oferta a los estudiantes de la licenciatura. **Conclusión:** desde el 2019 se oferta a los estudiantes este seminario electivo que otorga 3 créditos.

Palabras clave: Articulación; Generalización matemática; Teoría de nudos; Pensamiento matemático avanzado.

Mathematical generalization since the articulation of advanced mathematical thinking and knot theory

ABSTRACT

Background: The professors of Topology and modern algebra expressed interest in the need to create a space that allows deepening the process of Mathematical Generalization from the articulation of some concepts of Theory of Knots with the development of Advanced Mathematical Thinking (PMA) skills. **Objective:** To offer students an additional space for disciplinary training that allows them to deepen the process of Mathematical Generalization. **Design:** The methodology used has a qualitative approach, as a strategy we take action research from the Whitehead (1991) proposal from three phases. **Setting and participants:** students of the Bachelor of Mathematics

Autor correspondiente: Enrique Mateus-Nieves. Email: enrique.mateus@uexternado.edu.co

program who take the third to sixth semester. **Data collection and analysis:** we emphasized in the second phase (intervention), since it allowed us to articulate the holistic scheme of knot theory with the PMA as shown in Tables 2, 3 and 4 (results section). **Results:** The result was the creation of a syllabus and subject guide for an elective seminar, which is offered to undergraduate students. **Conclusion:** since 2019 this elective seminar is offered to students, which awards 3 credits.

Key words: Articulation; Mathematical generalization, Knot theory; Advanced mathematical thinking

Generalização matemática a partir da articulação do pensamento matemático avançado e da teoria dos nós

RESUMO

Antecedentes: Os professores de topologia e álgebra moderna manifestaram interesse na necessidade de criar um espaço que permita aprofundar o processo de Generalização Matemática a partir da articulação de alguns conceitos da Teoria dos Nós com o desenvolvimento das habilidades do Pensamento Matemático Avançado (PMA). **Objetivo:** Oferecer aos alunos um espaço adicional para treinamento disciplinar que lhes permita aprofundar o processo de Generalização Matemática. **Desenho:** A metodologia utilizada possui abordagem qualitativa, como estratégia adotamos a pesquisa-ação da proposta de Whitehead (1991) em três fases. **Cenário e participantes:** alunos do curso de Bacharelado em Matemática do terceiro ao sexto semestre. **Coleta e análise dos dados:** enfatizamos a segunda fase (intervenção), uma vez que ela permitiu articular o esquema holístico da teoria dos nós com o PMA, como mostra as Tabelas 2, 3 e 4 (seção de resultados). **Resultado:** O resultado foi a criação de um plano de estudos e um guia de disciplinas para um seminário eletivo, oferecido a estudantes de graduação. **Conclusão:** desde 2019, este seminário eletivo é oferecido aos alunos, com três créditos.

Palavras-Chave: Articulação; Generalização matemática; Teoria dos nós; Pensamento matemático avançado.

INTRODUCCIÓN

La Teoría de Nudos como campo disciplinar de la Topología no subyace simplemente a los procesos netamente disciplinares de las matemáticas, este campo teórico puede ser abordado desde un problema propio de la Didáctica de las Matemáticas, permitiendo a los futuros Licenciados de Matemáticas ahondar en esta área disciplinar desde otra perspectiva académica. El vincular algunos conceptos de la Teoría de Nudos con el desarrollo de habilidades del Pensamiento Matemático Avanzado permite ampliar el proceso de generalización matemática con fines fortalecer la gama de estrategias didácticas que orientan la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de una manera reflexiva e innovadora que posibilita la interacción con diversos escenarios y niveles de formación.

Este manuscrito se compone de siete apartados: el primero, describe los antecedentes. El segundo, presenta el marco normativo de la investigación, se describen los ámbitos conceptuales que permiten abordar el trabajo investigativo, relacionados con el proceso de generalización matemática, las habilidades propias del pensamiento matemático avanzado y algunos conceptos de la teoría de nudos. El tercero, presenta la metodología utilizada. El cuarto, los resultados analíticos de la articulación entre las categorías propuestas con las habilidades del Pensamiento Matemático Avanzado y la incorporación de algunos elementos de la teoría de nudos, que nos permitieron la construcción del sílabo, la guía de asignatura y la validación del seminario electivo. En el quinto, presentamos algunas conclusiones. En el sexto algunas recomendaciones y por último la bibliografía utilizada.

ANTECEDENTES

La presente investigación tuvo como propósito fundamental identificar cómo algunos conceptos básicos de la Teoría de Nudos permiten el desarrollo de habilidades del Pensamiento Matemático Avanzado (PMA) desde el proceso de generalización matemática en estudiantes de Licenciatura en Matemáticas, de tercer a sexto semestre, de una universidad no estatal de la ciudad Bogotá D.C., a través de la planeación, diseño e implementación de un seminario electivo denominado: "Una Aproximación a la Teoría de Nudos, y su incidencia en el proceso de generalización matemática, desarrollando habilidades del PMA".

El problema de investigación establecido se encuentra definido bajo los elementos conceptuales de la Teoría de Nudos y su incidencia en el proceso de generalización matemática, desde la postura teórica de Mason et al. (1999), quienes platean que existen tres aspectos sustanciales que se deben tener en cuenta en dicho proceso: ver, expresar y decir. En ese orden de ideas, la Teoría de Nudos a través de aspectos propios del pensamiento lógico-matemático y la enseñanza del algebra elemental permitirá ahondar en cada uno de los aspectos establecidos para el desarrollo de habilidades del PMA desde el proceso de generalización matemática de forma transversal y articulada con sus elementos sustantivos.

Como aspecto relevante de la investigación se evidenció que existen pocas investigaciones que abordan las habilidades del PMA y las integran con el proceso de generalización matemática, y que no existen otras que las relacionen con algunos conceptos de la Teoría de Nudos. Esta incidencia da cuenta del aporte de la presente investigación en el campo de la Didáctica de las Matemáticas.

MARCO TEÓRICO

Proceso de generalización matemática

Mason et al. (1999) define y caracteriza la generalización matemática como proceso que puede abordarse desde tres fases: V*er, Decir* y *Registrar*. Estas se evidencian a la hora de realizar métodos inductivos a partir de regularidades*,* que en términos genéricos convergen entre sí según las circunstancias que surgen al interactuar con un problema particular de regularidad. Si bien el dinamismo de este proceso permite potenciar las habilidades para la compresión de objetos matemáticos particulares y afianzar el reconocimiento de la simbolización algebraica, Mason et al., (1999) de manera tácita muestra que la generalización matemática debe ser un proceso transversal a la actividad matemática del aula, pues es un elemento transversal que impacta los contenidos que allí se imparten.

Mason et al. (1999) define las tres fases descritas de la siguiente manera: *Ver:* "(…) hace relación a la identificación mental de un patrón o una relación (ver un patrón puede ocurrir después de un periodo de tiempo trabajando con un numero de ejemplo particulares)" (p. 17). *Decir:* "(…) puede tener lugar tanto en voz alta, a otras personas, como en palabras que se dicen ´en la mente´" (p. 21). *Registrar:* "Es hacer visible el lenguaje, lo cual requiere un movimiento hacia los símbolos y la escritura escrita" (p. 17). Menciona que Registrar pude involucrar diversos mecanismos, tales como: dibujos; dibujos apoyados con palabras; solo palabras y algunos símbolos; solo símbolos; notación algebraica (p. 23).

Al igual que los elementos teóricos mencionados por Mason et al., (1999), el Grupo Azarquiel (1993, p. 31) define 3 etapas del proceso de generalización: "La visión de la regularidad, la diferencia, la relación. (*Ver*); Exposición verbal (*Describir*); Expresión escrita, de la manera más concisa posible. (*Escribir*)".

En primer lugar, el *Ver* se encuentra relacionado con la manera en la que se perciben y distinguen los elementos de una situación o regularidad en particular, es decir, observar la situación de una forma diferente, con una nueva perspectiva. "Se trata de distinguir entre lo que es propio de cada situación, de cada ejemplo, y lo que es común a todos ellos; lo que no varía" (Azarquiel, 1993, p. 31). La etapa dos, *Describir*, se enfoca en caracterizar y detallar la regularidad percibida a través de expresiones orales, en otras palabras, trata de comunicar y describir lo que se ha visto, la manera como se realice, y los elementos sustraídos de la regularidad, la expresión simbólica es más o menos exacta (Azarquiel, 1993, p. 37). En el desarrollo de *Describir* el trabajo en grupo "facilita el intercambio de ideas y de opiniones, porque la comunicación con otros propicia la comprobación conjunta de las conjeturas, la reformulación de las hipótesis, el acercamiento paulatino a soluciones cada vez más ajustadas" (Azarquiel, 1993, p. 38). La tercera etapa, *Escribir*, tiene como objetivo registrar de forma escrita las ideas que suscitan de la caracaterización de la regularidad. En ese sentido "Registrar no significa necesariamente escribir una expresión simbólica. La expresión simbólica es solo una forma de hacer, y no precisamente la más natural (...)" (Azarquiel, 1993, p. 37). Observamos entre las dos propuestas presentadas, una articulación sistémica entre el ver, decir (describir) y registrar (escribir).

Sessa (2005) presenta de manera metodológica el proceso de generalización matemática, mediante siete etapas para concebir la generalización de una regularidad. 1) Dar un patrón y hacer la pregunta orientadora sobre la generalidad. 2) Hacer preguntas orientadoras sobre la ocurrencia de la generalidad. Estas dos primeras etapas se realizan de manera individual. 3) Reunión por grupos y discusión sobre el comportamiento de la regularidad. 4) Discusión general (todos los grupos), sobre las características primordiales de la generalidad. 5) Se le pide a cada grupo que presente de manera escrita una fórmula que represente la regularidad. 6) Se presentan las diferentes fórmulas a todos los grupos y se reflexiona de manera colectiva sobre cuál es la más apropiada. 7) Se plantean alternativas de utilidad de la formula al grupo en general. Articulando estos referentes teóricos, observamos que el proceso de generalización, de manera convergente contiene tres grandes categorías (*Ver*, *Describir* y *Escribir*) que, de manera implícita, se encuentran asociadas a una acción[1] puntual del proceso, permitiendo así un pleno reconocimiento y caracterización al interior de cada categoría.

Habilidades del Pensamiento Matemático Avanzado (PMA)

El pensamiento matemático elemental (PME) Garbín (2005, p. 142) "se considera como un estado preliminar, como el primer nivel, del PMA. Es una etapa y un momento intelectual en que los contenidos matemáticos no requieren de un formalismo previo". En ese sentido, este tipo de pensamiento se encuentra estrechamente relacionado con la formación escolar básica. El PMA se relaciona primordialmente con la enseñanza de las matemáticas que se imparten en la educación media y universidad, no obstante, como lo menciona Belmonte (2009) citando a Dreyfus (1991, p. 58):

> No hay una distinción evidente entre muchos de los procesos del PME y el PMA, incluso aunque las matemáticas avanzadas se centran mayormente en las abstracciones propias de la definición y la deducción (...) Es posible pensar en tópicos de matemáticas avanzadas de una manera elemental y también existe un pensamiento avanzado sobre tópicos elementales. Una característica diferencial entre el PME y el PMA es la complejidad y su manipulación (...).

Reconocemos que el PMA posee características particulares para abordar la enseñanza de las matemáticas, además de los elementos descritos por Garbín (2005) existen habilidades o capacidades cognitivas que lo relacionan, Azcárate, Camacho, y Sierra (1999, p. 284) indican que: "(...) la progresiva matematización implica la necesidad de abstraer, definir, analizar y formalizar. Entre los procesos cognitivos de componente psicológica, además de abstraer, podemos destacar los de representar conceptualizar, inducir y visualizar". Sin embargo, aunque, "(...) la abstracción no es una característica de las matemáticas superiores, como tampoco lo son analizar, categorizar, conjeturar, generalizar, sintetizar, definir, demostrar, formalizar, es evidente que estos tres últimos adquieren mayor importancia en los cursos superiores (...)" (Azcárate, Camacho, & Sierra, 1999, p. 284).

Teoría de Nudos

El concepto de nudo (*Figura 1*) es la abstracción matemática que surge de la noción tradicional, que se utilizaba para atar una piedra a una pieza de madera para formar un hacha, o trenzar lianas para construir cuerdas, que posteriormente se anudaban para

[1] Las acciones asociadas se determinaron a partir de los elementos que se evidenciaron en cada uno de los ejemplos propuestos por los autores mencionados.

construir redes de pesca (Cisneros, 2011). La Teoria de Nudos busca establecer una caracterización especifica que permita la compresión de sus elementos desde una óptica matemática, de ahí que, "es necesario destacar que el estudio de los nudos se lleva a cabo gracias al uso de técnicas muy profundas que provienen de distintas ramas de las matemática como la geometría, el álgebra y el análisis" (Vendramin, 2014).

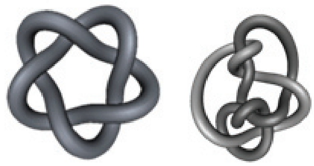


Figura 1. Ejemplo de nudos. Imagen tomada del software KnotPlot

Xiao (2012) define el "nudo como un subconjunto en $\mathbb{R}^3$ homeomorfo[2] a S^1, esto es, una curva conexa, compacta y sin borde dentro de un espacio en tres dimensiones" (p. 7). Molina (2011) indica que: "El subconjunto $K \subset \mathbb{R}^3$ es un nudo si existe un homeomorfismo del círculo unitario S^1 en $\mathbb{R}^3$ cuya imagen es *K*. Donde S^1 es el conjunto de puntos (x, y) en el plano $\mathbb{R}^2$ que satisfacen la ecuación $x^2 + y^2 = 1$" (Molina, 2011, p. 8).

La Representación gráfica de los nudos se encuentra estrechamente relacionado con los estudios desarrollados por Peter Tait a finales del siglo XX, clasificándolos con diez cortes o entrecruzamientos (Berenguer & Gil, 2010), generando una nueva estructura para la clasificación y comprensión de los nudos. Las representaciones graficas propuestas por Tait, fueron un insumo significativo para comprender gráficamente algunas características y particularidades de los nudos, además de manera sintética se puede constatar que un nudo puede representarse de forma plana o tridimensional siempre y cuando se respeten sus particularidades y aspectos teóricos.

Para este trabajo presentamos algunos tipos de nudos con su respectiva caracterización: *Nudo Trivial*: Es simplemente una cuerda sin anudar (Xiao, 2012, p. 7). *Nudo Primo*: "Dado dos nudos se puede hacer una suma conexa (suma o composición de nudos), que consiste en eliminar un arco en cada nudo que no pase por ningún cruce y unir los puntos extremos de esos arcos mediante caminos que no se crucen entre ellos." (Xiao, 2012, p. 13). Como ejemplo a este tipo de nudo presentamos la *Figura 2*:

Figura 2. Nudo primo. (Xiao, 2012, p. 14)

[2] A nivel intuitivo, dos objetos son homeomorfos si uno se obtiene del otro tras una deformación no traumática, esto es, sin rupturas ni apertura de agujeros. (Lopez, 2016, p. 1).

Nudo Equivalente: Un nudo es equivalente a otro, "(…) si y solo si se puede pasar de uno a otro por un número finito de transformaciones de tipo I, II y III (…)", Figura 3.

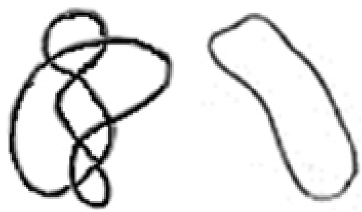


Figura 3. Nudo equivalente. (Xiao, 2012, p. 9)

Un nudo puede tener múltiples equivalencias y formas, no obstante, se pueden obtener diversas correspondencias entre sí, al efectuar una serie de transformaciones conocidas como "*Movimientos de Reidemeister"*. Según Livingstone (1993) el teorema de Reidemeister asegura que dos nudos son equivalentes si sus diagramas pueden convertirse uno en otro mediante una secuencia de movimientos. El teorema de Reidemeister establece tres tipos de movimientos (Xiao, 2012, p. 9), (*Figura. 4*):

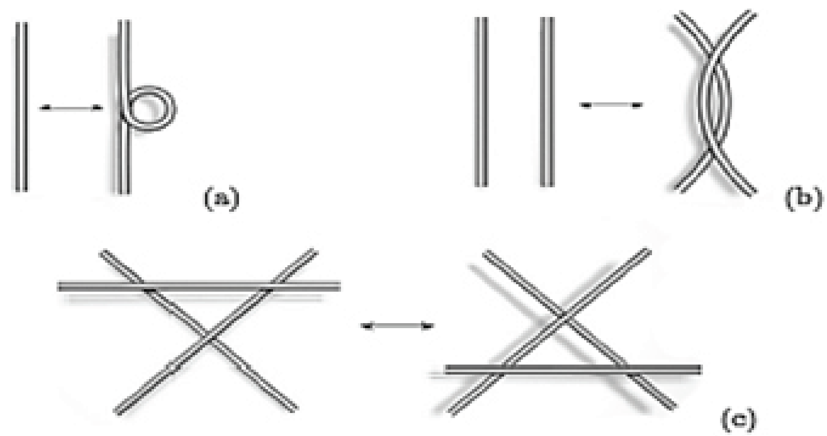


Figura 4. Movimientos de Reidemeister (a) Tipo I (b) Tipo II (c), (Xiao, 2012, p. 9)

Molina (2011) establece una definición para cada tipo de movimiento de Reidemeister. Tipo I: agregar o remover un rizo, tipo II: agregar o remover dos cruces por arriba (por abajo) consecutivos), y tipo III: movimiento triangular. En síntesis, los tres movimientos de Reidemeister demostraron que "dos nudos (o enlaces) en el espacio pueden ser deformados el uno en el otro si y solo si sus diagramas regulares pueden ser transformados uno en el otro mediante los tres movimientos" (Molina, 2011, p. 30). Asi pues, la utilizacion de estos movimientos en la manipulacion del nudo puede permitir el reconocmiento de nudos equivalente o triviales según sea el caso.

A medida que se profundiza en la comprensión de la noción cotidiana de nudo desde diversos aspectos matemáticos, se hace necesario buscar una notación matemática que represente significativamente las características particulares de los mismos, de acuerdo con esto, la notación más representativa fue la que estableció Gauss que consistía en transformar el aspecto grafico del nudo a una matriz de *1xn.* Molina (2011) describe esta notacion de la siguinte manera:

> Esta notación partía de un diagrama de nudo orientado. Se selecciona arbitrariamente un punto que no sea un cruce, se recorre el camino siguiendo la orientación hasta llegar al primer cruce, éste cruce se etiqueta con el número 1, se continúa hasta el siguiente cruce, si el cruce al que se llegó no está etiquetado se le asigna el número siguiente, si el cruce ya está etiquetado se sigue al siguiente cruce así hasta llegar al punto seleccionado inicialmente. Una vez etiquetado el diagrama, se hace el recorrido del nudo desde el punto seleccionado y se escriben cada una de las etiquetas por las que se pasa, si el cruce es por arriba se le asignará signo positivo y negativo en caso contrario (p. 32).

METODOLOGÍA

Desarrollamos la investigación con estudiantes que cursaban de tercer a sexto semestre de Licenciatura en Matemáticas, en una universidad no estatal de la ciudad Bogotá, durante dos semestres académicos en 2019. Elegimos un enfoque cualitativo, como estrategia asumimos la investigación-acción para abordar los propósitos investigativos planteados. Los abordamos desde tres fases: exploratoria, de intervención y de resultados (*Figura 5*). La tabla 1 muestra el desglose considerado para abordar cada una de las fases propuestas.

Figura 5. Fases de la investigación e Intervención

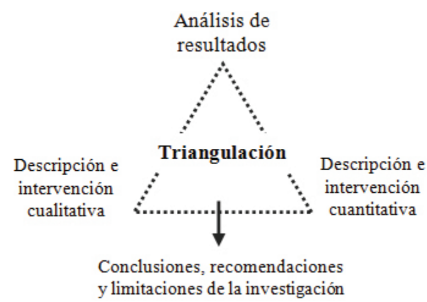
Tabla 1
Descripción fases de la investigación

Nombre de la fase	Descripción
I. Fase exploratoria	Esta fase se orientó a la definición del problema de investigación, al reconocimiento de las diversas perspectivas y apuestas teóricas que se relacionan con las categorías de análisis que definimos. En fase nos brindó un panorama descriptivo sobre qué herramientas debíamos usar: prueba diagnóstica, validación, rúbrica de evaluación, proceso de validez del seminario propuesto y análisis de la información, que nos permitieron la compresión sistemática del problema de investigación.
II. Fase de intervención	Esta fase la abordamos desde la propuesta de Whitehead (1991) citado por Suarez (2002), sobre el ciclo de la investigación-acción. En el marco de esta fase metodológica se desarrollaron los procesos de intervención de la prueba diagnóstica, validación de instrumentos y validez del seminario electivo que propusimos. De acuerdo con los resultados obtenidos en la prueba diagnóstica se diseñó una versión preliminar del sílabo y guía de asignatura con su respectivo pilotaje, que posteriormente fue validado a través de la realización del seminario electivo durante los periodos 2019-I y II (curso de 16 semanas, cada uno) en una universidad no estatal de la ciudad de Bogotá. Los momentos del proceso de pilotaje y validación de sílabo y guía de asignatura permitieron tomar decisiones para la consolidación final del sílabo del seminario electivo.
III. Fase de resultados	En esta fase se evaluó y analizó cada uno de los resultados que arrojaron la prueba diagnóstica, pilotaje y validación del seminario electivo (fase de intervención). Igualmente, se proporcionaron algunas conclusiones, recomendaciones e indagaciones del estudio investigativo a la luz de los objetivos planteados.

Enfocamos nuestro trabajo en la fase de intervención desde cinco momentos que nos permitieran integrar las habilidades del PMA, con la teoría de nudos, como eje innovador del proceso, en miras de fortalecer el proceso de generalización matemática. En la tabla 2 mostramos el esquema holístico que establecimos para articular estos propósitos investigativos.

Tabla 2
Articulación entre el proceso de generalización matemática con las habilidades del PMA

Fases de investigación	Fases de Intervención	Actividades
I. Exploratoria		❖ Definición del problema de investigación. ❖ Definición Categorías de Análisis. ❖ Reconocimiento de las diversas perspectivas y apuestas teórica (Antecedentes-Marco Teórico). ❖ Reconocimiento de herramientas de recolección de información

Fases de investigación	Fases de Intervención	Actividades
II. Intervención	Sentir o experimentar un problema e imaginar la solución del problema	❖ Definir el problema de investigación. ❖ Reconocimiento de las diversas perspectivas y apuestas teórica (Antecedentes-Marco Teórico).
	Poner en practica la solución imaginada	❖ Diseño y validación de instrumentos de recolección de información. ❖ Diseño, validación y pilotaje del seminario electivo
	Evaluar los resultados de las acciones emprendidas y modificar la practica a la luz de los resultados	❖ Resultados de la información recolectada. ❖ Análisis de la información recolectada.
III. Resultados		

RESULTADOS

Para este trabajo definimos tres macro categorías (*Ver*, *Describir* y *Escribir*), articulando los aportes de Mason et al. (1999), Azarquiel (1993) y Sessa (2005), que nos permitieron evidenciar en los estudiantes observados, la potencialización de algunas de las habilidades del PMA (abstraer, definir, analizar y formalizar), para la compresión de objetos matemáticos particulares (nudos), donde alcanzaron a afianzar el reconocimiento de la simbolización algebraica de un nudo (conceptualizar, inducir y visualizar).

Durante la fase de intervención, en el pilotaje de los instrumentos creados encontramos serias dificultades en los estudiantes dado que no comprendían la estructura del nudo, ni tenían la capacidad de establecer algún tipo de generalización en el mismo. Era la primera vez que se enfrentaban a elementos de la teoría de nudos, figuras como las propuestas en el instrumento diagnóstico, nudos triviales, primos y equivalentes, les generaron serias dificultades para su comprensión. Por ello fue necesario reajustar el instrumento de diagnóstico creado y establecer relaciones y comparaciones entre los números poligonales como un primer elemento que los acercara a visualizar, analizar y sintetizar este tipo de gráfico. El objetivo era que los estudiantes pudieran llegar a formalizar, representar, categorizar, sintetizar y conjeturar regularidadres en este tipo de estrucuras, con el animo que las pudieran relacionar con los graficos de los nudos propeustos en el primer instrumento.

Como resultado de lo anterior, fue posible determinar cuáles habilidades del PMA eran susceptibles de relacionar con cada una de las categorías del proceso de generalización matemática. La tabla 3 presenta la asociación entre las categorías del proceso de generalización matemática, sus acciones asociadas y las respectivas habilidades del PMA.

Tabla 3
Habilidades del PMA y proceso generalización matemática

	Categorías Grupo Azarquiel (1993) - Mason (1999)	**Acciones asociadas** Grupo Azarquiel (1993) - Mason (1999) - Sessa (2005)	**Habilidades del Pensamiento Matemático Avanzado**
Proceso de generalización matemática	Ver - Ver	❖ Reconocer la secuencia ❖ Dibujar un Patrón ❖ Identificación de un patrón ❖ Analizar las regularidades ❖ Intuir regularidades visuales	❖ Analizar ❖ Definir ❖ Visualizar ❖ Representar ❖ Categorizar ❖ Inducir
	Describir - Decir	❖ Mostrar los resultados encontrados de la generalidad al grupo ❖ Decir y hablar sobre lo que ocurre con la regularidad ❖ Describir oralmente ❖ Discutir en el aula sobre lo encontrado en la regularidad	❖ Inducir ❖ Representar ❖ Sintetizar ❖ Conjeturar
	Escribir - Registrar	❖ Utilizar símbolos, dibujos, etc. para describir la relación encontrada. ❖ Registrar y/o describir por escrito la relación encontrada. ❖ Expresar por escrito ❖ Expresar por escrito con símbolos ❖ Utilizar símbolos algebraicos para expresar lo evidenciado en la regularidad. ❖ Plantear una fórmula de la regularidad, ❖ Validar la formula.	❖ Representar ❖ Formalizar ❖ Sintetizar ❖ Conceptualizar ❖ Inducir ❖ Demostrar

Las acciones asociadas al proceso, descrito en la anterior tabla, no presentan de ninguna manera una secuencia entre sus partes, al contrario, son actividades que se pueden distinguir de forma simultánea en cada una de las categorías del proceso de generalización de donde relacionamos las siguientes habilidades con el PMA: definir, analizar, formalizar, conceptualizar, inducir, visualizar, demostrar, dado que encontramos el desarrollo implicito de estas habilidades relacionadas con: representar, categorizar, sintetizar y conjeturar.

Cuando validamos que los estudiantes visualizaban, analizaban, inducían y formalizaban los números poligonales, les presentamos un segundo instrumento con nudos triviales y algunos equivalentes buscando que alcanzaran una generalización matemática desde la aplicación de las habilidades del PMA antes descritas. Para ello, los enfrentamos a la propuesta plateada por Whitehead (1991), citado por Suarez (2002, p. 38) sobre el ciclo de la investigación-acción: "sentir o experimentar un problema; imaginar la solución del problema; poner en practica la solución imaginada; evaluar los resultados de las acciones emprendidas; y modificar la practica a la luz de los resultados".

Encontramos que los dos primeros, hacían referencia al reconocimiento del problema por medio de elementos teóricos particulares, como el tipo de número poligonal, luego el tipo de nudo, la regularidad presente en cada uno de ellos, y de trabajo previo sobre el tema, esto es: identificar la regularidad existente, analizarla, formalizarla, y tratar de conceptualizar y expresar dicha regularidad en una fórmula que permita generalizarla. Elementos que pudieron alcanzar facialmente con los números poligonales y gradualmente con nudos triviales, y con alguno equivalentes, situación no validable con nudos primos dada la complejidad del grafo.

El tercer momento, poner en práctica la solución imaginada, tubo como objetivo, en primer lugar, establecer el tipo de instrumentos de recolección de información. En segundo lugar, el diseño del sílabo y guía de asignatura del seminario electivo y posteriormente su validación. Por último, en los momentos, evaluar los resultados de las acciones emprendidas y modificar la práctica a la luz de los resultados, se estableció el sílabo definitivo para el seminario propuesto y que actualmente se oferta a los estudiantes como una electiva dentro de su formación como licenciados en matemáticas.

CONCLUSIONES

Con los resultados obtenidos se diseñó la versión final del sílabo y guía de asignatura del seminario electivo. Se elaboró una rúbrica evaluativa en la cual se integran las categorías del proceso de generalización matemática, sus acciones asociadas y las habilidades del PMA. Para cada uno de estos aspectos, se establecieron preguntas e indicadores[3] específicos de acuerdo con los conceptos de la Teoría de Nudos[4] que se definieron; elementos resumidos en la tabla 4.

[3] La rúbrica cuenta con 25 indicadores distribuidos en cada una de las categorías del proceso de generalización matemática (ver-ver; describir-decir; escribir-registrar). Los indicadores establecidos son congruentes con las habilidades del PMA que se platearon. La rúbrica diseñada sirvió de orientación evaluativa del proceso diagnóstico y de validez del seminario electivo.

[4] Los conceptos básicos de la Teoría de Nudos que se contemplaron son: Representación gráfica de los nudos; Tipos de nudos; Movimientos de Reidemeister y Notación de los Nudos.

Tabla 4

Aspectos característicos de las rubricas evaluativas del sílabo del seminario electivo propuesto[5][6]

N° de sesión del pilotaje	N° de sesión de la guía de asignatura	Instrumento de evaluación[5]	Categorías del proceso de generalización matemática a evaluar	Habilidades del PMA	Indicadores de evaluación[6]
1	Sesión 1	Socialización y explicación sobre el proceso de generalización matemática.			
2	Sesión 2	Taller individual: caso práctico del proceso de generalización matemática a través de una regularidad particularidad 1.	Ver–Ver; Describir–Decir; Escribir-Registrar	Visualizar, analizar, representar, categorizar definir, inducir, sintetizar, formalizar y sintetizar.	11
3	Sesión 3	Taller individual: caso práctico del proceso de generalización matemática a través de una regularidad particularidad 2.	Describir–Decir; Escribir-Registrar	Inducir, representar, sintetizar, formalizar, conceptualizar y demostrar.	10
4	Sesión 7	Taller individual: notación de nudos.	Ver–Ver; Escribir-Registrar	Visualizar, analizar, representar, categorizar, definir, inducir, formalizar y sintetizar.	7
5	Sesión 8	Taller individual: nuestra propia notación de nudos.	Escribir-Registrar	Representar, formalizar, sintetizar, conceptualizar e inducir	6
6	No aplica	Cuestionario de percepción final del seminario electivo	No aplica		

Una vez consolidado el sílabo y guía de asignatura del seminario electivo, con el apoyo de la dirección del programa de Licenciatura en Matemáticas de la universidad seleccionada, se gestionó un espacio académico para que un grupo de estudiantes de tercer semestre lo cursara durante el primer y segundo semestre académico de 2019. De ello se encontró que es conveniente abordar inicialmente, el proceso de generalización matemática, cambiando la regularidad de nudos por números pentagonales, pero conservando la misma estructura, dado que esta transición permite a los estudiantes una aproximación y posterior apropiación a los conceptos propios de la Teoría de Nudos. A la fecha este seminario se oferta a los estudiantes de dicha licenciatura.

[5] Cada instrumento de evaluación responde a unas categorías específicas del proceso de generalización matemática y de las habilidades del PMA.

[6] De acuerdo con los 25 indicadores que se establecieron en la rúbrica general, se determinó la cantidad de indicadores por instrumento de evaluación para el proceso de validación del seminario electivo, esto en coherencia con el tema propuesto en la guía de asignatura y las habilidades del PMA.

Contemplamos los propósitos formativos del seminario sobre la caracterización del proceso de generalización matemática. Frente a esta sesión se evidencio que en la categoría *Ver-Ver* del proceso de generalización matemática los estudiantes alcanzan habilidades para visualizar, analizar y representar patrones, elementos que les permite superar las dificultades para categorizar y definir regularidades. El seminario aplicado mostró que los estudiantes alcanzaron un nivel medio de superación. Con respecto a la categoría *Describir-Decir* y *Escribir-Registrar* el seminario permitió que los estudiantes que presentaban ciertas dificultades para describir de forma escrita la regularidad propuesta en un nudo trivial, primo o equivalente, alcanzaran un desarrollo medio de las habilidades: inducir, sintetizar y formalizar propias del PMA. En cuanto a la categoría *Describir-Decir* y *Escribir-Registrar*, los estudiantes describen en forma correcta la regularidad presentada.

Es de resaltar que, en la categoría de *Describir-Decir* regularmente los estudiantes utilizan algunos símbolos para interpretar lo que ocurre en la regularidad, sin embargo, la explicación que presentan para su descripción no es clara y con posibles ambigüedades, lo que nos permite inferir que no se puede determinar un desarrollo concreto de las habilidades de inducir, representar y sintetizar en los estudiantes para esta categoría. Elementos pendientes a considerar en una futura investigación.

Por lo que se refiere a la categoría de *Escribir-Registrar* el seminario permite identificar que los estudiantes alcanzan a realizar una descripción de la formalización del patrón, sin embrago la explicación que ofrecen no soporta el trabajo realizado. Reviste un interés particular de este trabajo este tipo de análisis y el supuesto de que la formalización del conocimiento es una estrategia de desarrollo y contribución a los procesos de cohesión del aprendizaje de las matemáticas. Ahora bien, la mayoría de los estudiantes alcanzó a desarrollar una fórmula matemática de la regularidad sin inconvenientes, además de realizar su comprobación, corroborando que esta era acertada, lo que valida la postura mencionada.

Evaluamos el seminario mediante una encuesta de percepción, con los estudiantes que lo tomaron durante los dos semestres académicos de 2019, destacando que: 1) el seminario plantea temas interesantes que trascienden y aportan a la formación del Licenciado en Matemáticas, tales como habilidades para visualizar, analizar, representar, categorizar, definir e inducir una regularidad. 2) consideran que los elementos conceptuales de la Teoría de Nudos pueden ser abordados con mayor facilidad desde el proceso de generalización matemática desmitificando la complejidad conceptual de la topología que se trabaja en los últimos semestres del pregrado en algunas licenciaturas en matemáticas, fortaleciendo habilidades como formalizar, conceptualizar y demostrar.

Por lo anterior, es necesario que, para implementar el proceso de generalización matemática y el desarrollo de habilidades propias del PMA, se contemple como mínimo:

a) Un acercamiento a los procesos de generalización matemática desde la identificación de regularidades comunes con números poligonales. Se espera que en esta etapa los estudiantes puedan conjeturar algebraicamente sobre aspectos propios de la regularidad.

b) Formalización de las generalizaciones y regularidades. El estudiante debe ser capaz de identificar regularidades desde diferentes registros.

c) Teorización sobre qué es un nudo, clases de nudos y algunos elementos característicos del nudo.

d) Generalización matemática a partir de una aproximación de la Teoría de Nudos.

Es imprescindible reconocer, que la estructuración de una rúbrica de evaluación con criterios y lineamientos definidos fue un garante esencial para reconocer aquellos elementos de partida que permitieron la consolidación del seminario electivo. Esto porque los resultados presentados en la fase diagnóstica evidenciaron que los estudiantes evaluados poseían dificultades en algunas habilidades del PMA específicas de cada categoría del proceso de generalización matemática. Esta incidencia implica que la guía de asignatura propuesta debe abarcar mayor tiempo en fortalecer el desarrollo de estas habilidades con el fin de que el estudiante tenga un acercamiento conceptual y práctico de cada una ellas. En otras palabras, que el estudiante sepa y sepa hacer, es decir, que sea competente matemáticamente.

Encontramos que la generalización matemática es un proceso que requiere el desarrollo de habilidades particulares como visualizar, analizar, representar, categorizar, definir e inducir una regularidad; no obstante, las habilidades de formalizar, conceptualizar y demostrar se presentan como una debilidad. Lo que evidencia la necesidad de potenciar y desarrollar el proceso de generalización matemática desde los primeros años de escolaridad.

De nuestra experiencia con esta investigación proponemos un acercamiento a la definición de generalización matemática como: un proceso sistémico y dinámico que permite reconocer las características particulares de una regularidad con el fin de establecer una ley general, para ello es necesario poder expresar de manera eficiente lo observado ya sea a través de comunicación verbal, escrita o algebraica.

Presentamos en la tabla 5 el esquema global del seminario diseñado e implementado.

Tabla 5

Esquema general del seminario.

INFORMACIÓN GENERAL DEL SEMINARIO ELECTIVO						
Programa que oferta	Licenciatura en Matemáticas					
Nombre del seminario	Didáctica de las Matemáticas: Una Aproximación a la Teoría de Nudos					
Tipo de asignatura	Electiva					
Número de[7] créditos	2 -3					
Tipo de crédito	Teórico / relación 1:2					
Distribución de los créditos	Horas de trabajo directo con el profesor	32-48	Horas de trabajo autónomo	64-96	Horas totales	96-144
Prerrequisitos	Ninguno					

RECOMENDACIONES

Se sugiere al docente encargado del seminario, hacer previamente una retroalimentación teórico-práctica concreta sobre los aspectos conceptuales de la teoría de nudos, planeados para cada sesión, con el ánimo que trasmita a sus estudiantes seguridad y manejo adecuado de las habilidades de: formalizar, conceptualizar y demostrar, que regularmente se presentan en los jóvenes como una debilidad.

Consideramos importante realizar un acompañamiento permanente por parte del profesor encargado, con el propósito de direccionar al estudiante sobre los objetivos de cada una de las actividades propuestas, dado que, si el estudiante no puede visualizar, analizar, representar e inducir una regularidad en forma acertada, esto será un obstáculo que frenará el avance en el proceso de generalización matemática.

Por otra parte, para la realización del seminario electivo, se hace necesario contar con el apoyo permanente de infraestructura, así como, de medios educativos didáctico-metodológicos de la universidad, lo cual permitirá tener una organización horaria y de espacio para desarrollar cada una de las sesiones propuestas.

Durante el desarrollo del seminario electivo, es posible que los estudiantes participantes presenten algunas dificultades en el reconocimiento de regularidades en

[7] En los resultados de evaluación de satisfacción del seminario electivo, se concluye que, para alcanzar los resultados de aprendizaje esperado, es necesario contar con mayor tiempo, tanto para el trabajo directo con el profesor, como de trabajo autónomo en los estudiantes. La anterior implicación tiene como propósito la flexibilidad de aumentar en un crédito académico el seminario electivo, pasando de 2 a 3, en términos de horas, incrementar de 96 a 144. Sin embargo, si el grupo de estudiantes presenta un nivel medio avanzado en el proceso de generalización matemática, puede dejarse con dos créditos con su respectiva intensidad horaria.

tres dimensiones, aquí se hace necesario que el docente encargado cuente con los medios tecnológicos (software matemático), de apoyo que le permita realizar las construcciones respectivas para que los estudiantes puedan visualizar, analizar, representar, categorizar, definir e inducir la regularidad presentada.

La realización de diversas actividades en dos y tres dimensiones, fortalece las habilidades de formalizar, conceptualizar y demostrar, propias del PMA, que regularmente se presentan en los estudiantes como una debilidad. Aquí es necesario que el profesor encargado reconozca las características, conocimientos y habilidades con los que cuenta la población que desea tomar el seminario electivo en aras de fortalecer, de empoderar el grupo de estudiantes para que alcancen un desarrollo óptimo de las habilidades mencionadas al inicio de este párrafo. En esta misma dirección se hace necesario que los profesores encargados cuenten con un mayor tiempo de docencia directa y trabajo autónomo para la construcción de una notación particular del nudo.

De acuerdo a la experiencia obtenida, consideramos que el seminario puede ser aplicable a otros contextos educativos y niveles de formación, por ejemplo, en educación básica y media.

CONTRIBUCIONES DE LOS AUTORES

EMN dirigió el proyecto de investigación, planeó: antecedentes, pregunta, objetivos, marco teórico, metodología, triangulación de la información recopilada, resultados del sílabo, guía de asignatura del seminario electivo, y la estructura formal del presente documento. CARJ desarrolló el proyecto de investigación, y ejecutó el trabajo de campo, recopilando información in situ, ayudó a: diseñar, aplicar instrumentos; aplicar las fases de la metodología, la planeación de resultados, conclusiones, así como, la organización del sílabo y guía de asignatura del seminario electivo.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos que respaldan este estudio serán puestos a disposición por el autor correspondiente (EMN), previa solicitud razonable.

BIBLIOGRAFÍA

Azarquiel, G. (1993). *Ideas y actividades para enseñar Algebra.* . España.: Editorial Síntesis.

Azcárate, C., Camacho, M., & Sierra, M. (1999). Perspectiva de investigación en Didactica de las Matemáticas Investigación en Didactica del análisis. 283-292.

Belmonte, J. (2009). *Modelos intuitivos y esquema conceptual del infinito en estudiantes de educación primaria, secundaria obligatoria, bachillerato y universida*d. (Tesis doctoral). Universidad de Salamanca. España.

Berenguer, R. y Gil, E. (2010). La fascinante matemática de los nudos. *Números, Revista de Didáctica de las Matemáticas*. http://www.sinewton.org/numeros V. 76, 47–54.
Cisneros, J. (2011). *Introducción a la Teoría de Nudos*. México.
Garbin, S. (2005). ¿Cómo piensan los estudiantes entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 8 (2), 169-193.
Livingston, C. (1993). *Knot theory*. Cambridge University Press.
Mason, J., Graham, A., Pimm, D. y Gowar, N. (1999). Rutas hacia al álgebra. Raíces del álgebra (Cecilia Agudelo, Tr. y Ed.). Tunja, Colombia: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (Primera edición en inglés, 1985).
Molina, J. (2011). Introducción a la teoria de nudos. *V jornadas de física y matemáticas Universidad Autonoma De Ciudad de Juarez*. Juarez. Mexico.
Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del álgebra*. Orígenes y perspectivas. Buenos Aires, Argentina: libros del Zorzal.
Suárez, M. (2002). Algunas reflexiones sobre la investigación – acción colaboradora en la educación. *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias*, v. I, nº 1, 40-56.
Vendramin, L. (2014). Teoría combinatoria de nudos. Argentina.
Xiao, L. W. (Octubre de 2012). *Introducción a la teoria de nudos*. Recuperado el Febrero de 2017, de https://repositorio.unican.es/xmlui/handle/10902/1215: ttps://repositorio.unican.es/xmlui/bitstream/handle/10902/1215/Luping%20Wang%20Xiao.pdf?sequence=1&isAllowed=y