

Função Afim: uma Análise na Perspectiva da Idoneidade Epistêmica e Cognitiva do Enfoque Ontossemiótico

Valmir Ninow ^a
 Carmen Teresa Kaiber ^a

^a Universidade Luterana do Brasil, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Canoas, RS, Brasil.

*Recebido para publicação em 5 nov. 2019. Aceito após revisão em 12 nov. 2019.
 Editor designado: Claudia Lisete Oliveira Groenwald*

RESUMO

Este artigo apresenta uma análise de um conjunto de atividades envolvendo Função Afim, tomando como referência os componentes e indicadores da Idoneidade Epistêmica e Cognitiva, dimensões da Idoneidade Didática, do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática (EOS). Esta análise é parte de uma pesquisa que tem por objetivo investigar o desenvolvimento de um projeto educativo, para o Ensino Médio, com foco no estudo de Funções e que toma como aporte teórico e metodológico os pressupostos do EOS. A partir da análise realizada em um conjunto de atividades relacionadas a Função Afim, foi possível perceber a presença de modo mais representativo dos componentes e indicadores da idoneidade cognitiva e epistêmica referentes a Situações-Problema, Regras (conceitos e procedimentos), Linguagens, Raciocínio Lógico, Leitura e Interpretação. Com relação aos componentes Argumentos, Relações e Análise/Síntese, a análise apontou a necessidade do desenvolvimento de um maior número de atividades as quais permitissem aos estudantes ampliarem e aprofundarem a capacidade de produzir argumentação justificada e estabelecer relações, o que poderia contribuir para o desenvolvimento da produção de análises e sínteses.

Palavras-chave: Enfoque Ontossemiótico; Idoneidade Didática; Análise Cognitiva e Epistêmica; Função Afim.

Affine Function: An Analysis from the Perspective of the Epistemic and Cognitive Suitability of the Ontosemiotic Approach

ABSTRACT

This article presents the analysis of a series of activities involving Affine Function, taking as reference the components and indicators of Epistemic and Cognitive Suitability, dimensions of Didactic Suitability, the Onto-semiotic Approach to Mathematical Knowledge and Instruction. This analysis is part of a research that aims to investigate the development of an educational project for High School, focused on the study of functions and which takes as theoretical and methodological support the Onto-semiotic Approach assumptions. From the analysis carried out in a series of activities related to Affine Function, it was possible to realize the presence, in a more representative way, of components and indicators of cognitive and epistemic suitability related to

Autor Correspondente: Valmir Ninow. E-mail: vninow@gmail.com

Problem Situations, Rules (concepts and procedures), Languages, Logical Reasoning, Reading and Interpretation. Regarding the Arguments, Relations and Analysis/Synthesis components, the analysis indicated the need to develop a wider range of activities that would allow students to expand and deepen their ability to produce justified argumentation and establish relations, which could contribute to the development of analyses and syntheses.

Keywords: Onto-semiotic Approach; Didactic Suitability; Cognitive and Epistemic Analysis; Affine Function

INTRODUÇÃO

Quando se lança um olhar para o currículo de Matemática do Ensino Médio, no que se refere aos conteúdos a serem estudados (Brasil, 2002, 2006, 2018), identifica-se um que é fundamental para o desenvolvimento da Matemática no Ensino Médio e em Cursos Superiores da área científica e tecnológica: Funções. O estudo de Funções não é apenas importante no âmbito da Matemática, mas fundamental para resolver situações problema que envolvam outras áreas do conhecimento, bem como situações que surgem no cotidiano e no mundo do trabalho.

No que se refere ao ensino e aprendizagem de Funções considera-se ser pertinente e necessária a elaboração de instrumentos de trabalho que direcionem, aprofundem e fortaleçam aspectos referentes ao conhecimento sobre o tema, enquanto conteúdo a ser levado às aulas de Matemática. Kaiber (2002) pondera que a introdução do conceito de Função junto aos estudantes, em muitos casos, baseia-se na ideia de correspondência entre conjuntos. Destaca, ainda, que aliado à organização linear do currículo de Matemática essa abordagem transformou o estudo de Funções no Ensino Médio, e nos primeiros semestres dos cursos universitários da área científica e tecnológica, em algo formal e abstrato, trazendo dificuldades no entendimento de ideias, noções e conceitos pertinentes.

Considera-se que, atualmente, os apontamentos da autora ainda são válidos, apesar de se reconhecer que há uma busca por atribuir significados ao estudo de Funções considerando, principalmente, aplicações a partir da resolução de problemas, o que pode ser percebido, particularmente, em recomendações curriculares e em livros didáticos atuais

Nesse contexto, encontra-se no Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática (EOS) (Godino, 2011, 2012) aporte que pode contribuir para a elaboração de propostas de trabalho que podem favorecer a apropriação de ideias, conceitos e procedimentos, por parte dos alunos, relativos a essa temática.

O Enfoque Ontossemiótico, de acordo com Godino (2012), concebe a Matemática a partir de uma tripla visão: como atividade de resolução de problemas socialmente compartilhada, como linguagem simbólica e como um sistema conceitual logicamente organizado. No que se refere ao ensino e aprendizagem considera elementos que permitem a passagem de uma didática descritiva ou explicativa para uma didática normativa, a qual fornece ferramentas que possibilitam analisar aspectos epistemológicos, cognitivos,

mediacionais, interacionais, normativos e ecológicos do pensamento, da linguagem e das situações em que a atividade matemática ocorre.

O estudo e análise dos fundamentos do EOS permite identificar elementos os quais se consideram pertinentes e essenciais para servir de orientação tanto para a avaliação de processos de ensino e aprendizagem, quanto para sua estruturação. Assim, encontra-se no EOS espaço para discussão e reflexão para o entendimento do que sejam objetos matemáticos, a negociação de significados atribuídos a esses objetos no âmbito escolar e sua articulação em projetos de ensino e aprendizagem que podem ser amplos, como quando se pensa em organizar um currículo, ou específicos quando se pensa em desenvolver um determinado conteúdo ou conceito (Godino, 2012).

Nesse contexto, foi desenvolvido um estudo que teve por objetivo investigar a organização e desenvolvimento de um projeto educativo para a Matemática, no Ensino Médio, na perspectiva do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática, tendo como foco o estudo de Funções.

A investigação, de base qualitativa, tomou como referência os aportes da Investigação Baseada no Design (IBD) (Godino et al., 2013), envolvendo a organização, aplicação e avaliação de um projeto educativo com foco no estudo de Funções, junto a um grupo de estudantes do primeiro ano do Ensino Médio de uma escola da rede privada do Município de Farroupilha, Rio Grande do Sul, Brasil, ao longo do ano de 2018. O projeto educativo foi organizado em torno de sete tópicos: conceitos iniciais sobre Funções, Funções Afim, Quadrática, Modular, Exponencial, Logarítmica e Trigonométrica. Envolveu a organização de um conjunto de situações-problemas, atividades de construção com lápis e papel e no *software* Geogebra, objetos de aprendizagem, materiais de estudo e vídeos selecionados do *YouTube*, para cada um dos sete tópicos abordados.

Particularmente, no presente artigo, destaca-se parte da investigação que se refere a uma análise da aplicação de um conjunto de atividades em torno do estudo da Função Afim, na perspectiva das Idoneidades Epistêmica e Cognitiva do EOS. No que segue apresentam-se noções teóricas do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática, aspectos metodológicos, bem como, a análise e discussão de atividades envolvendo a Função Afim.

ENFOQUE ONTOSSEMIÓTICO DO CONHECIMENTO E DA INSTRUÇÃO MATEMÁTICA (EOS)

O Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática tem sua origem a partir dos estudos do grupo de pesquisa “Teoría y Metodología de Investigación en Educación Matemática¹” da Universidade de Granada, na Espanha, no início dos anos 90. O EOS é o resultado da análise de fundamentos, questões e métodos de distintos marcos teóricos da Didática da Matemática e da Didática Fundamental da Matemática,

¹ Grupo de pesquisa coordenado pelo Professor Doutor Juan Díaz Godino (Godino, 2011, 2012).

além da aplicação e ampliação de ferramentas teóricas que surgiram a partir de trabalhos experimentais desenvolvidos por Juan D. Godino², Carmen Batanero, Vicenç Font, Ángel Contreras, Miguel Wilhelmi, Núria Planas, entre outros (Godino, 2011, 2012).

Por meio das investigações realizadas, os pesquisadores desenvolveram ferramentas teóricas as quais pudessem ser utilizadas para analisar conjuntamente o pensamento matemático, os objetos matemáticos, as situações e os fatores que condicionam seu desenvolvimento (Godino, 2012). O enfoque busca qualificar o processo de ensino e aprendizagem apresentando como principais características a articulação das facetas institucional e pessoal do conhecimento matemático, a atribuição de um papel-chave à atividade de resolução de problemas e à incorporação coerente de pressupostos pragmáticos e realistas sobre o significado dos objetos matemáticos. Assim, o ponto de partida do EOS é a organização de uma ontologia dos objetos matemáticos que considere e articule os três aspectos da Matemática: como atividade de resolução de problemas socialmente compartilhada, como linguagem simbólica e como sistema conceitual logicamente organizado (Godino, Batanero & Font, 2008).

Segundo Godino (2012) o conjunto de noções teóricas que compõem o EOS estão articulados em cinco grupos ou níveis: Sistemas de Práticas, Configurações de Objetos e Processos Matemáticos, Configurações e Trajetórias Didáticas, Dimensão Normativa e Idoneidade Didática. Os quatro primeiros níveis de análise servem de ferramentas para uma didática descritivo-explicativa, enquanto o quinto nível se baseia nos quatro níveis anteriores e constitui uma síntese orientada para avaliar se as atividades implementadas são idôneas ou adequadas, visando à identificação de possíveis melhorias do processo de ensino e aprendizagem (Godino, Batanero & Font, 2008). Os autores ponderam, ainda, que estas cinco noções teóricas podem ser aplicadas para a análise de um processo de estudo de uma aula, ao planejamento ou ao desenvolvimento de uma unidade didática ou, a nível global, para o desenvolvimento de um curso ou de uma proposta curricular.

Neste artigo, são destacados elementos teóricos da Idoneidade Didática e as ferramentas de análise que a compõe, duas das quais serão utilizadas para a análise de um conjunto de atividades envolvendo Função Afim. Godino (2012), destaca que a Idoneidade Didática pode ser utilizada como um critério geral de adequação e pertinência das ações dos educadores, do conhecimento posto em jogo e dos recursos utilizados no processo de estudo matemático, servindo de guia para a análise e reflexão sistemática que fornece critérios para a melhoria progressiva do processo de ensino e aprendizagem.

Godino, Batanero e Font (2008), apontam que a Idoneidade Didática de um processo de instrução matemática se define como a articulação coerente e sistêmica de seis dimensões relacionadas entre si, as quais passam a ser caracterizadas.

- Epistêmica - se refere ao grau de representatividade dos significados institucionais implementados ou pretendidos, com relação a um significado de referência.

² Os trabalhos desenvolvidos em torno do EOS estão disponíveis em: <http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/>

- Cognitiva - expressa o grau de proximidade dos significados implementados frente aos significados pessoais iniciais dos estudantes.
- Interacional – grau em que as interações entre professor e alunos, aluno e aluno permitem identificar e resolver conflitos de significados produzidos durante o processo de ensino e aprendizagem.
- Mediacional - expressa o grau de disponibilidade e adequação dos recursos materiais necessários para o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem.
- Emocional - refere-se ao grau de implicação (envolvimento, interesse, motivação, etc) do aluno no processo de estudo.
- Ecológica - grau em que o processo de estudo se ajusta ao projeto educacional, a escola, a sociedade e ao ambiente em que se desenvolve (Godino, Batanero & Font, 2008).

O esquema apresentado na Figura 1 destaca as dimensões descritas. O hexágono regular externo representa as idoneidades correspondentes a um processo de estudo pretendido ou programado, no qual se supõe um grau máximo das adequações parciais, e um hexágono irregular inscrito correspondente às idoneidades efetivamente atingidas em processo de estudo implementado, sendo os níveis de análises avaliados como alto, médio ou baixo.

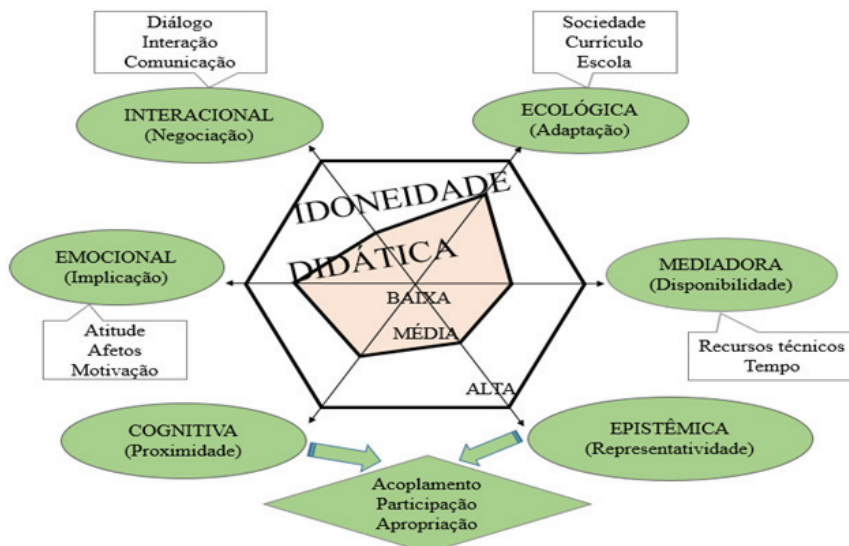


Figura 1. Representação da Idoneidade Didática e suas dimensões. (Traduzido de Godino, Batanero & Font, 2008).

Como já destacado, neste artigo serão apresentadas análises realizadas no trabalho com a Função Afim, considerando as chamadas Ferramentas de Análise Epistêmica (FAE) e Cognitiva (FAC)³, as quais passam a ser apresentadas e discutidas na sequência. O quadro da Figura 2 apresenta os componentes e indicadores que constituem a Ferramenta de Análise Epistêmica.

Componentes	Indicadores
Situações-problema	a) apresenta-se uma mostra representativa e articulada de situações de contextualização, exercícios e aplicações; b) propõem-se situações de generalização de problemas (problematização).
Linguagem	a) uso de diferentes modos de expressão matemática (verbal, gráfica, simbólica), tradução e conversão entre as mesmas; b) nível de linguagem adequado aos estudantes; c) propor situações de expressão matemática e interpretação.
Regras (definições, proposições, procedimentos)	a) as definições e procedimentos são claros e corretos e estão adaptados ao nível educativo a que se dirigem; b) apresentam-se enunciados e procedimentos fundamentais do tema para o nível educativo dado; c) propõem-se situações onde os estudantes tenham que generalizar ou negociar definições, proposições ou procedimentos.
Argumentos	a) as explicações, comprovações e demonstrações são adequadas ao nível educativo a que se dirigem; b) promovem-se situações onde os estudantes tenham que argumentar.
Relações	a) os objetos matemáticos (problemas, definições, proposições) se relacionam e conectam entre si.

Figura 2. Ferramenta de Análise Epistêmica. (Godino, 2011).

Godino (2011) considera que um ponto central e essencial para se conseguir uma alta idoneidade epistêmica é a seleção e adaptação de situações problemas, bem como, a utilização de diferentes representações, meios de expressão, definições, proposições, procedimentos, assim como as justificativas das mesmas permitindo uma análise coerente e profunda do processo de ensino e aprendizagem a ser desenvolvido ou em desenvolvimento. Deste modo, a FAE permite um olhar para como estão sendo estruturadas as práticas matemáticas que possibilitam aos estudantes terem acesso aos significados institucionais implementados ou pretendidos.

Já a Ferramenta de Análise Cognitiva (FAC), de acordo com Godino (2011), possibilita identificar se os significados pretendidos pelo docente estão na zona de desenvolvimento potencial dos estudantes e ou fazem frente aos significados pessoais

³ Componentes e indicadores das Idoneidades Epistêmica e Cognitiva tomadas de Godino (2011) e denominadas por Andrade (2014) de “Ferramentas de Análise”.

iniciais dos mesmos. Os componentes e indicadores dessa ferramenta são apresentados no quadro da Figura 3.

Componentes	Indicadores
Raciocínio Lógico	a) propõem-se situações que possibilitam observar, analisar, raciocinar, justificar ou provar ideias; b) promovem-se situações onde os alunos tenham que coordenar as relações previamente criadas entre os objetos (problema, definições, informações).
Leitura/ Interpretação	a) apresentam-se situações de expressão matemática e interpretação onde os estudantes possam pensar, analisar e refletir sobre as informações; b) propõem-se situações de leitura e interpretação adequadas ao nível dos estudantes; c) apresentam-se situações que possibilitem analisar ou referir-se a um mesmo objeto matemático, considerando diferentes representações.
Análise/Síntese	a) propõem-se situações de particularização e de generalização de problemas; b) promovem-se situações onde os estudantes tenham que relacionar objetos matemáticos (problema, definições, informações) de forma específica ou ampla.

Figura 3. Ferramenta de Análise Cognitiva. (Godino, 2011).

Godino (2011) pondera que para ampliar e aprofundar os indicadores referentes a idoneidade cognitiva foi levado em consideração as entidades primárias do modelo epistêmico, a apropriação e compreensão dessas entidades, as diferenças individuais entre os sujeitos envolvidos no processo e se os conteúdos pretendidos/implementados estão adequados ao nível dos estudantes.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

Como já destacado, apresenta-se, aqui, parte de um estudo que teve por objetivo investigar a organização e desenvolvimento de um projeto educativo para a Matemática, no Ensino Médio, na perspectiva do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática. O estudo envolveu a organização, aplicação e avaliação de um projeto educativo com foco no estudo de Funções (conceitos iniciais sobre Função, Funções Afim, Quadrática, Modular, Exponencial, Logarítmica e Trigonométrica), aplicado junto a um grupo de 26 estudantes de um primeiro ano do Ensino Médio de uma escola da rede privada do Município de Farroupilha, Rio Grande do Sul, Brasil, ao longo do ano de 2018. Todo o trabalho foi desenvolvido como os estudantes organizados em duplas (13 duplas) ou em pequenos grupos.

A investigação foi realizada em uma perspectiva qualitativa e tomou como referência, alinhado aos constructos do Enfoque Ontossemiótico, a Investigação Baseada no Design (IBD), a qual busca compreender as intervenções educacionais empregados para promover

certas aprendizagens e os processos subjacentes (Godino et al, 2014). Para tanto, foram tomadas as quatro fases da IBD as quais, segundo os autores dizem respeito à:

- Estudo preliminar das dimensões epistêmicas-ecológica, cognitiva-afetiva e instrucional;
- Design da trajetória didática, seleção dos problemas, justificativa e análise a priori dos mesmos, com indicações dos comportamentos esperados dos estudantes e a planificação das intervenções do professor;
- Implementação da trajetória didática, observação das interações entre os sujeitos, os recursos e avaliação da aprendizagem;
- Avaliação retrospectiva que coloca em jogo o previsto e o observado, refletindo-se, também, sobre as normas e sobre a Idoneidade Didática;

No âmbito da metodologia adotada foram utilizadas as ferramentas de análise tomadas do EOS já descritas (Ferramenta de Análise Epistêmica e Ferramenta de Análise Cognitiva) tanto para o desenvolvimento, como para a análise e avaliação das atividades realizadas no projeto educativo. No que segue apresenta-se uma análise epistêmica e cognitiva envolvendo o estudo da Função Afim.

O artigo publica resultados da pesquisa aprovado pelo Comitê de Ética de acordo com o parecer consubstanciado do CEP, nº 1.871.876 e identificação CAAE, nº 61871316.0.0000.5349.

FUNÇÃO AFIM: UMA ANÁLISE EPISTÊMICA E COGNITIVA

Apresenta-se, aqui, a análise produzida a partir de um conjunto de atividades referente ao estudo da Função Afim, no âmbito do projeto de estudo sobre Funções. O projeto como um todo, como foi destacado, está estruturado a partir de diferentes estratégias e recursos, as quais buscavam um estudo dinâmico, colaborativo, mas também individualizado, onde se objetivava que cada estudante pudesse seguir seu ritmo de aprendizagem, interagir e dialogar com o professor e com seus pares.

Do conjunto de atividades serão destacadas duas situações que se entende representativas do trabalho desenvolvido, sendo que, inicialmente, será apresentada a análise epistêmica das situações e, em seguida, a cognitiva.

As atividades propostas para o estudo da Função Afim objetivaram:

- identificar a Função Afim em diferentes situações intramatemáticas e extramatemáticas;
- analisar e resolver situações-problema envolvendo a Função Afim;
- utilizar diferentes linguagens (língua natural, algébrica, tabular e gráfica) para representações e soluções das situações problemas;
- interpretar e determinar o domínio e conjunto imagem de acordo com o contexto;

- identificar e analisar o crescimento e decréscimo de uma função a partir de situações contextualizadas;
- interpretar o sinal da Função na situação-problema abordada;
- analisar e interpretar as variações de uma função (deslocamentos na horizontal e vertical);
- utilizar a linguagem simbólica pertinente, determinando o domínio e conjunto imagem independente do contexto.

A primeira atividade (Figura 4), no que se refere aos componentes e indicadores epistêmicos, está relacionada a um reservatório de água com um vazamento. É apresentada na língua natural e possibilita o uso da linguagem algébrica, gráfica e tabular, bem como retoma, aprofunda e desenvolve conceitos e definições em torno da lei de formação, zero da função, domínio, conjunto imagem. Busca-se, assim, que relações sejam estabelecidas e sejam apresentados argumentos em torno da justificativa para conclusões e observações encontradas com relação ao zero da função, domínio e conjunto imagem. Destaca-se, também, que a utilização das diferentes formas de representação leva a diferentes sentidos de conversão entre registros e diferentes tratamentos.

Um reservatório de uma determinada cidade contém 240 m^3 de água. No início de um mês, um duto se rompeu, e está vazando água a uma taxa de 4 m^3 por dia. Com base nessas informações, determine ou construa o que se pede:

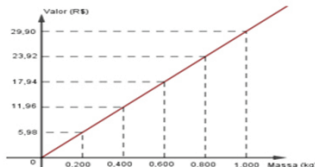
- a expressão algébrica de $Q(t)$ (quantidade de água no reservatório em metros cúbicos) em função de t (em dias decorridos desde o início do mês);
- o zero da função e seu significado no contexto do problema;
- uma tabela de valores que represente os dados do vazamento;
- o gráfico de $Q(t)$;
- o domínio da função, justificando sua resposta;
- o conjunto imagem, justifique sua resposta.

Figura 4. Atividade vazamento em reservatório. (Adaptado de Adami et al., 2015).

Outra atividade proposta (Figura 5) está relacionada a uma balança digital de um restaurante, a qual é utilizada para medir a massa de alimentos que cada cliente consome em uma determinada refeição.

O mostrador digital de uma balança de um restaurante de uma determinada cidade mostra que o preço do quilograma da refeição custa R\$ 29,90. Um cliente ao colocar seu prato sobre a balança, mediu a massa no prato de $0,400 \text{ kg}$ e o valor a ser pago é de R\$ 11,96. Com essas informações podemos construir um quadro com outros valores para a massa (m) a fim de obter os valores a serem pagos ($v(m)$) e depois representar essa situação por meio de um gráfico, conforme figuras a seguir.

Massa (kg)	Valor a ser pago (R\$)
0,200	$29,90 \cdot 0,200 = 5,98$
0,400	$29,90 \cdot 0,200 = 11,96$
0,600	$29,90 \cdot 0,200 = 17,94$
0,800	$29,90 \cdot 0,200 = 23,92$
⋮	⋮
m	$29,90 \cdot m = 29,9 m$



- Com os valores apresentado na tabela e no gráfico estabeleça a lei de formação da função para a situação apresentada.
- Estabeleça o domínio e o conjunto imagem. Explique o significado dos mesmos no contexto do problema.

Figura 5. Atividades envolvendo balança digital. (Adaptado de Chavante & Prestes, 2016).

Nesta situação problema são utilizadas a língua natural, representações tabular e gráfica, buscando propiciar aos estudantes utilizarem diferentes linguagens para analisar e resolver uma situação apresentada. Os significados institucionais pretendidos referem-se à relação de dependência entre as grandezas envolvidas e o estabelecimento da lei de formação, bem como o estabelecimento do conjunto domínio e imagem no contexto da situação problema.

As situações apresentadas são apenas exemplos do conjunto de situações utilizadas para o estudo da Função Afim, as quais envolveram, também, estudos relacionados a juros simples, movimento retilíneo uniforme, progressão aritmética, valor de uma corrida de taxi, preço pago pelo consumo de energia e água, valor cobrado por serviços, entre outros. O projeto de estudo como um todo buscou atender e desenvolver os significados de referência estabelecidos pela instituição de ensino onde a investigação foi implementada.

Apresentam-se no quadro da Figura 6, os componentes e indicadores epistêmicos evidenciados no conjunto de atividades envolvendo a Função Afim, com o indicativo do grau de idoneidade. Tal análise foi realizada a partir das práticas desenvolvidas com a aplicação da proposta, ou seja, embora a proposta tenha sido concebida considerando os pressupostos da Idoneidade Epistêmica, sua aplicação e desenvolvimento junto aos estudantes é que permitiu estabelecer o grau de idoneidade da mesma nos diferentes componentes.

COMPONENTE SITUAÇÕES-PROBLEMA		
Indicadores	Indicadores evidenciados	Idoneidade
<p>a) apresenta-se uma mostra representativa e articulada de situações de contextualização, exercícios e aplicações;</p> <p>b) propõem-se situações de generalização de problemas (problematização).</p>	<p>- As atividades propostas referem-se a um conjunto de situações-problema pertinentes ao estudo da Função Afim, apresentadas, predominante, em formato de problemas voltadas para situações da realidade, do cotidiano ou de outras áreas do conhecimento, nas quais os estudantes necessitavam relacionar os conceitos, definições, leis, procedimentos e propriedades já estudadas ou em estudo.</p> <p>- No que se refere à generalização, são propostas situações que possibilitam aos estudantes conjecturarem, justificarem, deduzirem, estabelecerem relações e leis de formação, identificando características e propriedades da Função Afim.</p>	Alta
COMPONENTE LINGUAGEM		
Indicadores	Indicadores evidenciados	Idoneidade
<p>a) uso de diferentes modos de expressão matemática (verbal, gráfica, simbólica), tradução e conversão entre as mesmas;</p> <p>b) nível de linguagem adequado aos estudantes;</p> <p>c) propõem situações de expressão matemática e interpretação.</p>	<p>- A linguagem utilizada está adequada ao nível dos estudantes, sendo apresentada na forma da língua natural e representações algébrica, simbólica, tabular e gráfica.</p> <p>- Foi possível identificar a presença das diferentes formas de representação e a conversão entre as mesmas, ficando claro quando as mesmas se referiam ao mesmo objeto em estudo.</p>	Alta

COMPONENTE REGRAS		
Indicadores	Indicadores evidenciados	Idoneidade
<p>a) as definições e procedimentos são claros e corretos e estão adaptados ao nível educativo a que se dirigem;</p> <p>b) apresentam-se enunciados e procedimentos fundamentais do tema para o nível educativo dado;</p> <p>c) proposta de situações onde os estudantes tenham que generalizar ou negociar definições, proposições ou procedimentos.</p>	<p>- Foram desenvolvidas a definição de Função Afim, estabelecido domínio, contradomínio, conjunto imagem, zero da função, sinal da função, a intersecção com os eixos, crescimento e decréscimo.</p> <p>- Nas atividades as definições, proposições e procedimentos são trabalhados de forma clara e de acordo com o nível educativo dos estudantes. O estudo das propriedades e dos procedimentos foram desenvolvidas por meio de situações em que os estudantes tivessem que observar, analisar, conjecturar, concluir e avaliar a partir de manipulações ou construções, buscando regularidades, particularidades e generalizações.</p>	Alta
COMPONENTE ARGUMENTOS		
Indicadores	Indicadores evidenciados	Idoneidade
<p>a) as explicações, comprovações e demonstrações são adequadas ao nível educativo a que se dirigem;</p> <p>b) promovem-se situações onde os estudantes tenham que argumentar.</p>	<p>- De modo geral as atividades propunham momentos nos quais os estudantes necessitavam argumentar a partir de uma situação problema dada, seja por meio da discussão de uma propriedade, de uma definição ou de uma lei de formação, ou, ainda, a partir de um conjunto de ações realizadas por ele para representar, construir e analisar o objeto em estudo. Porém, considera-se que deveria ter sido apresentado um conjunto maior de atividades de construção no Geogebra, bem como atividades inéditas as quais possibilitassem aos estudantes desenvolverem autonomia com relação aos procedimentos e as estratégias de solução, bem como as justificativas adequadas para cada situação apresentada.</p>	Média
COMPONENTE RELAÇÕES		
Indicadores	Indicadores evidenciados	Idoneidade
<p>a) os objetos matemáticos (problemas, definições, proposições) se relacionam e se conectam entre si.</p>	<p>- Considera-se que foi possível estabelecer relações entre as propriedades dos objetos matemáticos em estudo, principalmente, as relações entre a lei de formação, a representação tabular e gráfica das situações. Porém, não ficou evidente a relação dos mesmos com o domínio e com o conjunto imagem no contexto de algumas situações em estudo. Ressalta-se, ainda, que não foram devidamente exploradas as relações entre o domínio e a imagem com os valores do intercepto x e y.</p>	Média

Figura 6. Análise Epistêmica: Função Afim.

A partir dos aspectos destacados é possível observar que os componentes e indicadores epistêmicos estão fortemente presentes nas atividades propostas, sendo que a análise buscou identificar em que medida se conseguiu implementar os mesmos no trabalho desenvolvido junto aos estudantes. Embora todo projeto de estudo tenha sido

concebido buscando a idoneidade máxima em cada uma das idoneidades parciais a dinâmica do trabalho nem sempre permitiu que fossem desenvolvidas de modo adequado atividades que relacionassem todos os indicadores epistêmicos.

Com relação as Situações-problema (exemplos destacados nas Figuras 4 e 5), considerou-se sua representatividade alta, pelo fato de que os conceitos em torno da Função Afim terem sido desenvolvidos por meio de situações de contextualização e aplicação relacionadas a situações do cotidiano, do mundo do trabalho e de outras áreas do conhecimento, o que levou, também, a considerar o componente Regras com alta representatividade, pois era necessário para a resolução de cada situação problema lançar mão de diferentes conceitos, definições e procedimentos de resolução. Já o componente Argumentos foi considerado com idoneidade média, uma vez que nem todas as atividades exigiam dos estudantes uma solução que necessitasse uma justificativa ou comprovação. Nesse contexto encontram-se atividades de caráter mais procedimental, que, embora exijam conhecimentos sobre o tema, levam as justificativas a ficarem implícitas.

Com relação a Linguagens, considerou-se a idoneidade alta, tendo em vista que foram utilizadas diferentes formas de representações no conjunto de atividades, como nos exemplos apresentados nas Figuras 4 e 5, tanto em língua natural e representações algébrica, simbólica, gráfica e tabular. Estas diferentes formas de representação foram exploradas considerando as conversões e as mudanças no seu sentido entre as mesmas, sempre que possível, conforme já destacado.

Já, o componente Relações foi considerado com representatividade média, pois evidenciaram-se relações entre a lei de formação, a análise de gráficos e de tabelas por meio de exercícios e situações problema. Porém, para alcançar um grau alto de idoneidade, considera-se que teria sido necessário o estabelecimento das relações entre os objetos matemáticos em um número maior de situações-problema.

Visando lançar um olhar para a aprendizagem dos estudantes, bem como para os conflitos e as dificuldades encontradas e apresentadas durante o estudo da Função Afim, foi realizada uma análise cognitiva por meio dos componentes e indicadores da Ferramenta de Análise Cognitiva (raciocínio lógico, leitura/interpretação e análise/síntese). Entendeu-se, pertinente, também, realizar uma análise em torno dos significados institucionais e os significados declarados pelos estudantes. Assim, foram utilizados os componentes da Ferramenta de Análise Epistêmica (situações-problema, linguagens, regras, argumentos e relações) juntamente com as da Cognitiva, sendo estabelecido para os componentes das duas Ferramentas significados de referência pretendidos com o material de estudo. Segundo Lemos (2017), busca-se, desta forma, evidências do que os estudantes foram capazes de fazer/compreender/significar, a partir de um conjunto de atividades e situações problema propostos.

Na Figura 7 apresenta-se cada componente utilizado na análise cognitiva, identificando os significados estabelecidos e evidenciados no conjunto de atividades, juntamente com o indicativo do grau de idoneidade que se julgou adequado.

COMPONENTE SITUAÇÕES-PROBLEMA		
Significados pretendidos	Significados declarados	Idoneidade
<p>a) Identificar nas situações-problema propostas nos diferentes contextos intramatemáticos e extramatemáticos a Função Afim.</p> <p>b) Resolver situações propostas utilizando os conceitos, definições e procedimentos relativos a Função Afim.</p>	<p>- Os estudantes não apresentaram dificuldades relativas a identificação de uma Função Afim, bem como de suas características nas diferentes situações problema propostas.</p> <p>- A grande maioria dos estudantes conseguiu resolver corretamente as situações propostas por meio da utilização de procedimentos, definições e conceitos adequados.</p>	Alta
COMPONENTE LINGUAGEM		
Significados pretendidos	Significados declarados	Idoneidade
<p>a) Identificar e reconhecer o uso de diferentes modos de expressão matemática (verbal, gráfica, simbólica), tradução e conversão entre as mesmas.</p> <p>b) Reconhecer e utilizar a linguagem matemática adequada a cada situação.</p>	<p>- Os estudantes identificaram e utilizaram as diferentes formas de representação ou expressão matemática e a conversão entre as mesmas de forma adequada, porém apresentaram dificuldade em utilizar e compreender a forma simbólica.</p> <p>- Utilizaram diferentes formas de representar o domínio e o conjunto imagem da Função Afim, mesmo que em alguns casos os mesmos não tenham sido estabelecidos de forma correta no contexto da situação problema.</p> <p>- Utilizaram a linguagem adequada a cada situação proposta.</p>	Alta
COMPONENTE REGRAS (DEFINIÇÕES, PROPOSIÇÕES, PROCEDIMENTOS)		
Significados pretendidos	Significados declarados	Idoneidade
<p>a) Reconhecer o que caracteriza uma Função Afim.</p> <p>b) Identificar situações envolvendo o crescimento e o decréscimo de uma Função Afim.</p> <p>c) Representar graficamente uma Função Afim e a partir de sua representação gráfica estabelecer a representação algébrica.</p> <p>d) Identificar o domínio e a imagem em situações envolvendo uma Função Afim;</p> <p>e) Calcular a raiz da função.</p> <p>f) Determinar a lei de formação de uma Função Afim, dada por uma situação-problema.</p>	<p>- Considera-se que os estudantes reconheciam os elementos de uma função.</p> <p>- Não ocorreram equívocos na classificação referente ao crescimento ou decréscimo da função.</p> <p>- Não houveram dificuldades na representação gráfica, porém dificuldades na compreensão do conjunto domínio e imagem de situações problema.</p> <p>- Utilizaram adequadamente os procedimentos matemáticos para o cálculo da raiz de uma função, bem como dos coeficientes da mesma, para determinar a lei de formação.</p>	Média

COMPONENTE ARGUMENTOS		
Significados pretendidos	Significados declarados	Idoneidade
<p>a) Identificar e justificar os conjuntos domínio e imagem na situação-problema.</p> <p>b) Identificar e justificar o crescimento e decréscimo de uma função tanto pela representação algébrica, tabular ou gráfica, levando em consideração o contexto da situação problema.</p>	<p>- Os estudantes identificaram e representavam matematicamente o conjunto domínio e imagem, porém não conseguiram justificar, por vezes, o que tais conjuntos ou intervalos representavam em cada situação.</p> <p>- Não apresentaram dificuldades em identificar o crescimento ou decréscimo a partir de uma representação gráfica, porém em alguns casos não utilizaram uma justificativa adequada para o crescimento ou decréscimo em um contexto ou em um intervalo solicitado.</p> <p>- Em sua grande maioria, as atividades em que era solicitado uma justificativa foram deixadas em branco.</p>	<p>Baixa</p>
COMPONENTE RELAÇÕES		
Significados pretendidos	Significados declarados	Idoneidade
<p>a) Compreender as relações entre as diferentes representações de uma Função Afim.</p>	<p>-Considera-se que os estudantes estabeleceram de forma parcial as relações entre as diferentes formas de representação de um mesmo objeto nas situações apresentadas, o que leva a considerar que ainda não tinham se apropriado de forma adequada das ideias ou conceitos da Função Afim.</p>	<p>Média</p>
COMPONENTE RACIOCÍNIO LÓGICO		
Significados pretendidos	Significados declarados	Idoneidade
<p>a) Observar e analisar a representação gráfica da Função Afim no plano cartesiano, buscando justificar o seu crescimento ou decréscimo.</p> <p>b) Analisar o conjunto domínio e imagem.</p> <p>c) Estabelecer estratégias para determinar a lei de formação de uma Função Afim.</p>	<p>- A partir da observação e análise do gráfico da função, os estudantes justificaram o crescimento ou decréscimo da mesma e representaram o domínio e o conjunto imagem das distintas situações.</p> <p>- Utilizaram os pontos encontrados para determinação dos coeficientes da função, buscando mostrar a respectiva lei de formação da mesma.</p>	<p>Alta</p>
COMPONENTE LEITURA/INTERPRETAÇÃO		
Significados pretendidos	Significados declarados	Idoneidade
<p>a) Ler e interpretar adequadamente as informações e situações propostas.</p> <p>b) Identificar, compreender e aplicar os conceitos e definições.</p>	<p>- Foram realizadas leituras adequadas do que era solicitado em cada situação problema abordada.</p> <p>- Percebeu-se que os estudantes conseguiram compreender e aplicar de forma adequada os conceitos e definições pertinentes.</p>	<p>Alta</p>

COMPONENTE ANÁLISE/SÍNTESE		
Significados pretendidos	Significados declarados	Idoneidade
a) Realizar síntese para expressar os conceitos construídos ou revisitados.	- Os estudantes apresentaram muitas dificuldades para realizar as sínteses solicitadas. Foi possível perceber que não tinham o hábito de fazer um apanhado geral das situações e conceitos trabalhados, o que fez com que o foco do trabalho se voltasse para essa construção.	Baixa

Figura 7. Síntese da análise Cognitiva.

Como apresentado, nas atividades envolvendo situações problema, os estudantes participantes da pesquisa não apresentaram dificuldades com relação a identificação de características de uma Função Afim nas diferentes situações problemas e demais atividades com o uso do Geogebra ou com lápis e papel. De modo geral utilizaram definições e procedimentos adequados às situações conforme pode ser observado na solução apresentada pela dupla B, em destaque na Figura 8.

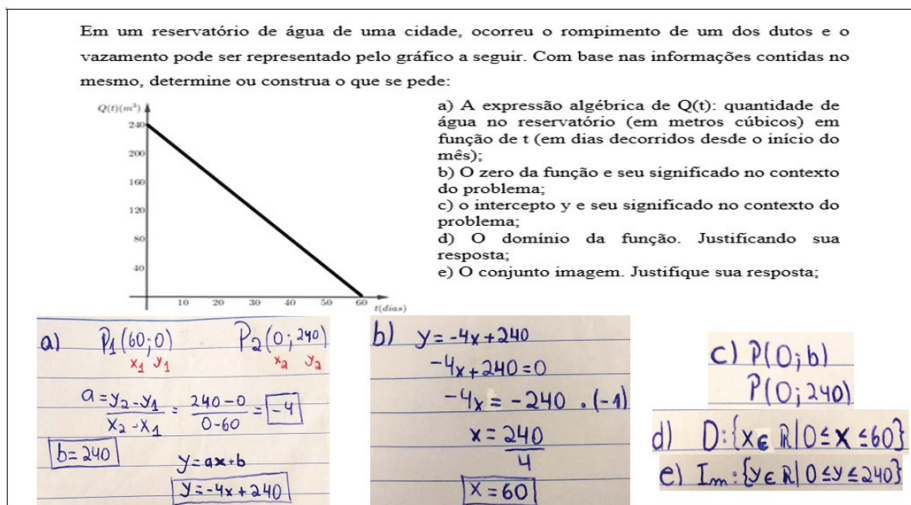


Figura 8. Solução da dupla B. (Atividades adaptada de Adami et al., 2015).

Para estabelecer a lei de formação os estudantes utilizaram dois pontos pertencentes ao gráfico da função limitado pelos eixos coordenados, determinaram os valores para os coeficientes angular e linear, substituindo os mesmos na expressão algébrica “ $f(x) = ax + b$ ” (Figura 8, item a).

Conjectura-se, assim, que essa dupla, embora não tenha utilizado as grandezas apresentadas no enunciado da questão, fizeram uma leitura satisfatória da situação proposta, utilizando conceitos, definições ou procedimentos de resolução adequados relacionados à Função Afim. Situações similares foram apresentadas por outras duplas de estudantes nessa situação, e em outras, o que permitiu identificar a idoneidade no

componente Situações-problema como alta. A mesma solução exposta apresentou elementos que permitiram considerar que o componente Linguagens atingiu um grau alto de idoneidade, visto que os estudantes utilizaram diferentes linguagens e representações matemáticas nas situações em estudo e realizaram conversões entre as mesmas.

Por outro lado, o componente Regras alcançou um grau médio de idoneidade, visto que os estudantes apresentaram dificuldades na compreensão e representação do conjunto domínio e imagem, conforme pode ser observado na resolução apresentada pelos estudantes da dupla F, os quais utilizaram, para solução da mesma questão, outros dois pontos no gráfico (Figura 9), os quais não estavam definidos ou visualmente destacados no gráfico. Com os pontos selecionados realizaram uma construção, a qual representava de forma errônea a situação inicial, pois não considerava os intervalos $[0, 10]$ no eixo x e $(200, 240]$ no y . Utilizando as fórmulas “ $a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ” e “ $y = ax + b$ ”, determinaram a lei de formação, que resultou correta.

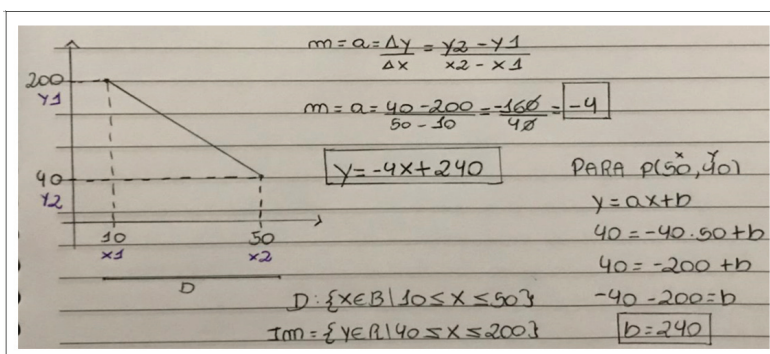


Figura 9. Resolução da dupla F.

Mesmo que tenham chegado a expressão que representa a situação em estudo, não foi possível considerar a resolução correta. Como os pontos utilizados pertenciam ao domínio da função, chegaram à lei de formação correta, porém a representação errônea realizada conduziu a um erro na compreensão e representação do conjunto domínio e imagem da situação abordada, o que também pode ser observado na Figura 9.

Esse tipo de solução foi utilizado para análise e discussões com o grupo de estudantes, retomando os conceitos envolvidos, abrindo espaço para os estudantes refletirem, apresentarem argumentos, tendo a oportunidade de atribuir novos significados aos conjuntos domínio e imagem envolvidos na questão.

Com relação ao componente Argumentos, entende-se que este alcançou uma baixa idoneidade, pois foram propostas situações nas quais os estudantes necessitavam argumentar a partir de uma situação-problema dada, seja por meio da discussão de uma propriedade, de uma definição ou de uma lei de formação, ou a partir de um conjunto de ações realizadas por eles para representar, construir, ou argumentar sobre o objeto em estudo. Porém, mesmo que a solução apresentada apontasse para o entendimento do que

estava sendo solicitado não conseguiam utilizar argumentos ou justificativas adequadas se expressando por escrito.

Nas respostas da dupla B de estudantes (apresentadas na Figura 8), é possível perceber que os mesmos determinaram o zero da função e o intercepto y , o que, em princípio, encaminha para um entendimento de que os mesmos se apropriaram dos conceitos envolvidos, porém não conseguiram justificar ou argumentar qual era o significado dos mesmos na situação-problema abordada. Este fato também foi percebido nas soluções apresentadas por outras duplas, sendo que em grande parte os estudantes não responderam o que era solicitado em relação a justificativas, apenas destacando os pontos onde o gráfico intercepta o eixo das abscissas e das ordenadas, ou os intervalos do domínio e conjunto imagem, sem esclarecer sobre os significados destes.

Ao serem questionados sobre os motivos pelos quais não estavam justificando suas respostas, um dos estudantes relatou que: “Não sei o que devo escrever, sei que o gráfico corta o eixo x e y . Isso já não é uma justificativa?”. Após essa discussão, quando novamente questionados sobre o significado do zero da função no contexto do problema ou sobre o que aconteceu no sexagésimo dia após o início do vazamento, os estudantes responderam que no sexagésimo dia o reservatório estaria vazio. Então a dupla E perguntou: “É isso que temos que responder?”. Essas manifestações dos estudantes levaram ao entendimento de que, em muitas situações, os estudantes têm argumento para justificar seus procedimentos, só não conseguem acioná-los e apresentá-los por escrito adequadamente.

Conjectura-se que esse modo dos estudantes procederem ao resolverem as situações propostas pode estar relacionado ao trabalho que, via de regra, é realizado nas aulas de Matemática, quando as soluções se baseiam em procedimentos, como aplicação de algoritmos e regras.

O componente Relações foi contemplado na proposta, porém considera-se que se alcançou uma idoneidade média, pois os estudantes não conseguiram relacionar de forma adequada determinados conceitos e definições envolvendo a Função Afim, principalmnte no que diz respeito ao domínio e conjunto imagem no contexto das situações problema. Porém, os mesmos estabeleceram relações pertinentes entre a lei de formação e a representação tabular e gráfica das situações apresentadas.

Entende-se que o componente cognitivo Raciocínio Lógico alcançou um grau alto de idoneidade, visto que os estudantes puderam observar, analisar, inferir, conjecturar e provar seus entendimentos e procedimentos referentes a solução das distintas situações-problema enfrentadas. Além do espaço de trabalho individual e em duplas, as discussões no grande grupo sobre questões que geraram conflitos, se constituíram em espaço onde os estudantes puderam discutir e argumentar, ressignificando muitos conceitos.

No que se refere ao componente Leitura/Interpretação, entende-se que foi alcançado um alto grau de idoneidade, visto que linguagem utilizada estava adequada ao nível dos estudantes e que as diferentes formas de representação de uma função se referiam ao mesmo objeto matemático em estudo. Desta forma, os estudantes não apresentaram dificuldades relevantes no que diz respeito as situações de expressão matemática e

de interpretação, nas quais era necessário pensar, analisar, refletir e inferir sobre as informações contidas no problema para se chegar a uma solução.

Com relação ao componente Análise/Síntese, o de grau de idoneidade foi baixo. Mesmo que as atividades encaminhassem soluções, tanto referentes a particularização como generalização, e relações entre os objetos matemáticos, de forma específica ou ampla, os estudantes apresentaram dificuldades em realizar uma síntese dos conceitos e definições abordados com relação a Função Afim, conforme pode ser observado na Figura 10.

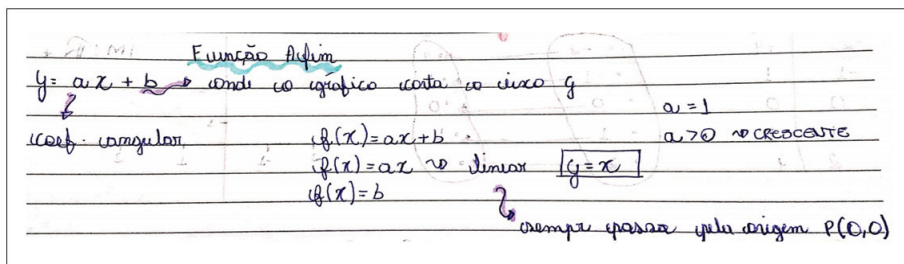


Figura 10. Síntese realizada pelo grupo C.

Esse tipo de síntese foi utilizado para análise e discussões no grande grupo, retomando os conceitos envolvidos e possíveis formas de apresentação de uma síntese. Ao término das discussões e reflexões, as duplas retomaram as atividades relacionadas a sínteses. Em novos esquemas, os estudantes elencaram os conceitos abordados de forma satisfatória, apresentando a forma genérica da Função Afim, particularizando as funções constante, linear e identidade, apresentando as condições para determinar se uma função é crescente ou decrescente, as regras matemáticas para determinar a raiz ou zero da função, os coeficientes da função, bem como o estudo do sinal e o estudo das inequações.

Novamente considera-se que os estudantes apresentaram dificuldades na realização desse tipo de tarefa devido à falta de hábito de fazer um apanhado geral do que tinha sido abordado. Ressalta-se, também, que dois grupos (G e K), após as discussões realizadas, basearam as suas sínteses tomando como referência um mapa mental apresentado no final do material adotado pela escola, adequando-o para o estudo em questão.

Esses momentos de discussões permitiram perceber que os estudantes puderam ampliar e aprofundar ideias, conceitos e procedimentos relacionados ao objeto matemático Função Afim, consolidando significados já atribuídos bem como atribuindo novos significados. Também foram ampliadas formas de representação e o desenvolvimento de argumentação justificada.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Considera-se que a análise produzida referente ao estudo da Função Afim permitiu um olhar sob a perspectiva do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução

Matemática, referente as idoneidades epistêmica e cognitiva visando contribuir para a seleção, desenvolvimento, aplicação, análise e avaliação de atividades para um projeto educativo para a Matemática no Ensino Médio.

Neste sentido, a proposta de atividades envolvendo esse tema buscou oportunizar aos estudantes retomarem, aprofundarem e desenvolverem noções, conceitos, definições e procedimentos articulados a partir do enfrentamento de situações-problema, utilização de recursos tecnológicos digitais (software GeoGebra, vídeos, objetos de aprendizagem), atividades de construção com lápis e papel, os quais possibilitaram, também, o estabelecimento de relações e a produção de argumentos. Entende-se que o uso de diferentes recursos e atividades oportunizaram aos estudantes o aprofundamento de conhecimentos, bem como a superação de dificuldades apresentadas em anos anteriores e durante o desenvolvimento do estudo da Função Afim.

Na análise produzida, evidenciou-se os componentes situações-problema, linguagens e regras, referentes a idoneidade epistêmica alcançaram um grau alto de idoneidade. Destaca-se que as atividades desenvolvidas e analisadas apresentavam situações problema ligadas a questões do cotidiano e de outras áreas do conhecimento, a utilização de diferentes formas de representação de um mesmo objeto e a presença de procedimentos adequados nas explicações, bem como na resolução das situações propostas, as quais, em muitos momentos foram abordadas sob diferentes perspectivas.

Com relação aos aspectos cognitivos evidenciados, por meio dos componentes e indicadores das Ferramentas Epistêmica e Cognitiva, foi possível estabelecer que os componentes situações-problemas, linguagens, raciocínio lógico e leitura/interpretação alcançaram um grau alto de idoneidade, sendo que, Regras e Relações foram identificadas com um grau médio de idoneidade. Porém, os componentes argumentos e análise/síntese obtiveram um grau baixo de idoneidade, muito pela falta de hábito dos estudantes em realizarem atividades com esse grau de exigência ou complexidade, bem como a dificuldade de expressar na forma verbal o que estavam calculando ou representando.

Entende-se, assim, que as ferramentas de análise do EOS utilizadas nessa análise são recursos que, ao serem utilizados na análise de um conteúdo e ao conjunto de atividades relacionadas ao mesmo, possibilitam um olhar para o conhecimento matemático e para a forma como o processo de ensino e aprendizagem pode vir a se desenvolver. Ademais, quando articuladas às demais dimensões da Idoneidade Didática (emocional, interacional, mediadora e ecológica) se constitui em poderoso aparato para a constituição de projetos educativos.

DECLARAÇÃO DE CONTRIBUIÇÕES DOS AUTORES

V.N e C.T.K conceberam a ideia apresentada. V.N realizou as atividades e coletou os dados. Ambos os autores discutiram os resultados e elaboraram conjuntamente a versão final do artigo.

DECLARAÇÃO DE DISPONIBILIDADE DE DADOS

Os dados que sustentam os resultados do presente estudo serão disponibilizados pelo autor correspondente, V.N, mediante solicitação.

REFERÊNCIAS

- Adami, A. M. et al. (2015). *Pré- Cálculo*. Porto Alegre: Bookman.
- Andrade, L. S. (2014). *Currículos de Matemática no Ensino Médio: um olhar sob a perspectiva do Enfoque Ontosemiótico do Conhecimento e a Instrução Matemática*. Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. Universidade Luterana do Brasil, Canoas.
- Brasil. (2006). Ministério da Educação (MEC). Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias/ Secretaria da Educação Básica. *Orientações Curriculares para o Ensino Médio*. Brasília: MEC/ SEF, v.2.
- Brasil. (2002). Secretaria da Educação Média e Tecnológica. PCN+ Ensino Médio: *Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasília: MEC/ SEF, 2002.
- Brasil. (2018). Ministério da Educação. Secretária de Educação Básica. Diretoria de Currículos e Educação Integral. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC, SEB, DICEI.
- Chavante, E. & Prestes, D. (2016). *Matemática*. 1ª ano: Ensino Médio. São Paulo: SM.
- Godino, J. D. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva Ontosemiótica de Investigación en Didáctica de la Matemática. *Investigación en Educación Matemática XVI*. Jaén: SEIEM, p. 49-68.
- Godino, J. D. (2011). Indicadores de idoneidade didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Anais da XIII Conferência Internacional de Educação Matemática (CIAEM – IACME)*. Recife, Brasil.
- Godino, J. D; Batanero, C & Font, V. (2008). Um enfoque onto-semiótico do conhecimento e a instrução matemática. *Acta Scientiae*, Canoas, 10(2), 7-37.
- Godino, J. D. et al. (2013). La ingeniería didáctica como investigación basada en el diseño. Versión ampliada en español de la comunicación presentada en el *CERME 8* (Turquía, 2013) con el título, “Didactic engineering as design-based research in mathematics education.
- Godino, J. D. et al. (2014). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico - semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 34 (2/3), 167-200.
- Kaiber, C. T. (2002). A prática da resolução de problemas no estudo de funções reais. *Anais do IV Simpósio de Educação Matemática*. Chivilcoy, Argentin.
- Lemos, A. V. (2017). *Estudos de recuperação no Ensino Fundamental: uma investigação no âmbito da Geometria sob a perspectiva do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática*. Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. Universidade Luterana do Brasil, Canoas.