ISSN: 2178-7727
DOI: 10.17648/acta.scientiae.5418

Aprendizagem Profissional de Professores dos Anos Iniciais: Explorando os Diferentes Significados do Sinal de Igualdade

Lilian Cristina de Souza Barboza[a,b]
Alessandro Jacques Ribeiro[a]
Vinícius Pazuch[a]

[a] Universidade Federal do ABC (UFABC), Santo André, SP, Brasil
[b] Universidad de Huelva, Huelva, España

Recebido para publicação em 19 set. 2020. Aceito após revisão em 11 jul. 2020
Editor designado: Claudia Lisete Oliveira Groenwald

RESUMO

Contexto: A utilização de tarefas de aprendizagem profissional em processos de formação continuada tem se tornado um profícuo caminho para a mobilização e a construção de conhecimentos para ensinar matemática. **Objetivo:** O artigo tem por objetivo identificar como tarefas de aprendizagem profissional, fundamentadas na prática letiva, contribuem para a mobilização e a ampliação do pensamento algébrico de professores dos anos iniciais, no que se refere aos diferentes significados do sinal de igualdade. **Design:** Esta pesquisa[1] insere-se em uma metodologia de cunho qualitativo e em uma perspectiva teórica interpretativa. **Ambiente e participantes:** A pesquisa se deu em um processo formativo composto por 14 encontros realizados em uma escola pública municipal de São Paulo, com a participação de 6 professoras dos anos iniciais. **Coleta e análise dos dados:** Os dados foram recolhidos por meio de documentos e observação com gravação em áudio e vídeo e as análises foram realizadas por uma abordagem dedutiva. **Resultados:** As reflexões e as discussões que ocorreram no decorrer do percurso dos encontros permitiram identificar indícios de significação e construção do pensamento algébrico das professoras. **Conclusões:** O estudo permitiu identificar ressignificação por parte das professoras do sinal de igualdade, passando de operacional para equivalência e relacional.

Palavras-chave: Formação Continuada; Pensamento Algébrico; Conhecimento do Professor; Sinal de Igualdade; Aprendizagem Profissional.

[1] A pesquisa é parte do projeto "Conhecimento matemático para o ensino de álgebra: uma abordagem baseada em perfis conceituais", aprovado no CEP da UFABC sob número CAAE 55590116.8.0000.5594.

Autor Correspondente: Lilian Cristina de Souza Barboza. Email: lilicrissb@gmail.com

Primary Teacher's Professional Learning: Exploring Different Meanings of the Equal Signal

ABSTRACT

Context: The use of professional learning tasks in practicing teacher education programmer has become a useful way to mobilize and construct knowledge to teach mathematics. **Objective:** The paper has the aim to identify as professional learning tasks based on classroom practice contribute to the mobilization and expansion of the algebraic thinking of teachers of the early years, regarding to the different meanings of the equal sign. **Design:** This research is part of a qualitative methodology and a theoretical interpretive perspective. **Settings and Participants:** The research had been realized in a formative process composed of 14 meetings held in a municipal public school in São Paulo, with the participation of 6 teachers from the early years. **Data collection and Analysis:** Data were collected by documents and observation with video and audio recording, and analyses were done under a deductive approach. **Results:** Reflections and discussions that occurred during the meetings allowed us to identify traces of signification and construction of the teachers' algebraic thinking. **Conclusion:** The study made it possible to identify resignification by the teachers of the sign of equality, going from operational to equivalence and relational.

Keywords: Practicing Teacher Education; Algebraic Thinking; Teacher Knowledge; Equal Sign; Professional Learning.

INTRODUÇÃO

A formação continuada de professores que ensinam matemática e que continuam a aprender no exercício de suas práticas é um vasto campo de pesquisa (Opfer & Pedder, 2011; Ponte et al., 2008; Serrazina, 2013; Webster-Wright, 2009), e o presente estudo insere-se nesta problemática. As possibilidades de construção de conhecimentos específicos matemáticos e do conhecimento pedagógico são uma temática que precisa ser explorada no ensino de matemática (Ball, Thames & Phelps, 2008). Um dos caminhos proeminentes é, justamente, por meio de situações da sala de aula que possam contribuir para um contexto reflexivo (Silver et al., 2007; Smith, 2001).

Repensar a formação continuada de professores que ensinam matemática continua sendo um tópico essencial e de suma importância (Fiorentini & Crecci, 2017), pois se constitui como um vasto campo a ser analisado e carece de novas contribuições. Em especial, considerar a formação continuada com propósito de provocar mudanças em suas práticas e possibilitar (novas) aprendizagens profissionais (Ball & Cohen, 1999) a professores dos anos iniciais, por meio do uso de tarefas de aprendizagem profissional (TAP), parece ser um potencial meio para provocar mudanças nas práticas dos professores.

Em complemento, desenvolver o pensamento algébrico (PA) nos estudantes desde os anos iniciais é de fundamental importância para abrir portas ao campo da álgebra dos anos subsequentes (Blanton & Kaput, 2008; Kieran et al., 2016); e, especificamente nesta pesquisa, toma-se como foco uma abordagem que explora os diferentes significados do sinal de igualdade (Kieran, 1981; Ponte, Branco & Matos, 2009; Trivilin & Ribeiro, 2015). A literatura internacional já evidencia, há alguns anos, a importância do desenvolvimento do PA desde os anos iniciais de escolarização (Canavarro, 2007; Kieran et al., 2016; Molina, 2011). Outras pesquisas internacionais, na mesma vertente de desenvolvimento do PA, ainda revelam que há conhecimentos que os professores precisam mobilizar e (re)estruturar para que possam desenvolver o PA em suas salas de aula (Britt & Irwin, 2011; Kieran et al., 2016; Ponte & Branco, 2013).

Atualmente no Brasil, no que se refere ao PA, encontramos o eixo "Álgebra" disposto na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2017) desde os anos iniciais, o que também ocorre no Currículo da Cidade de São Paulo (PMSP, 2017). Os documentos referidos iniciam por propor o trabalho com padrões e sequências nos 1.º e 2.º anos e, posteriormente, a partir do 3.º ano, com as propriedades do conceito de igualdade e com os diferentes significados do sinal de igualdade.

Portanto, tomando-se a literatura nacional e internacional, assim como as indicações curriculares, identificam-se elementos preponderantes na questão deflagradora deste estudo: em que medida tarefas de aprendizagem profissional, fundamentadas na prática, promovem a mobilização e a construção do conhecimento profissional do professor para o desenvolvimento do PA em estudantes dos anos iniciais? Com base nesta problemática, o objetivo explorado neste artigo é identificar como tarefas de aprendizagem profissional, fundamentadas na prática letiva, contribuem para a mobilização e a ampliação do pensamento algébrico de professores dos anos iniciais, no que se refere aos diferentes significados do sinal de igualdade.

Na busca de responder ao objetivo proposto, o presente artigo está dividido em sete seções. Procura-se, nas três primeiras seções abordar os diferentes eixos temáticos que compõem a revisão de literatura, no intuito de contemplar a problemática identificada e os principais elementos teóricos do estudo. Na seção seguinte, apresentam-se o contexto da pesquisa e os aspectos metodológicos que a estruturam. As três seções finais são dedicadas a apresentar episódios e desenvolver análises dos dados e, por fim, apresentar as conclusões e as considerações finais.

FORMAÇÃO CONTINUADA E O CONHECIMENTO PROFISSIONAL DO PROFESSOR

Para iniciar a discussão, reportamo-nos a Fiorentini e Crecci (2017), que destacam a importância da formação continuada e da pesquisa como um campo aberto no contexto brasileiro. Com isso, os autores destacam as lacunas na literatura, pela ausência de um referencial teórico e metodológico que auxilie os pesquisadores a analisarem "como os conhecimentos e os saberes profissionais[2] dos professores são problematizados, tecidos na prática escolar" (Fiorentini & Crecci, 2017, p. 181).

[2] Embora haja uma discussão na literatura sobre conhecimentos e saberes, neste artigo utilizamos, por afinidade conceitual, conhecimento profissional no sentido de Shulman (1986).

Em consonância com a defesa da formação continuada de professores que ensinam matemática nos anos iniciais, destaca-se a importância de se entender como uma formação continuada pautada em reflexões pode evidenciar a importância da construção de conhecimento específico para o ensino de conceitos matemáticos (Ponte et al., 2008). Além disso, parece importante considerar ainda a necessidade de se construir um ambiente que seja favorável às discussões e à análise de tarefas (Ball & Cohen, 1999; Silver et al., 2007; Smith, 2001), ao se pensar no contexto de formação continuada de nosso estudo, baseamo-nos no modelo de Serrazina (2013).

Apoiar de forma mais ampla o desenvolvimento do conhecimento profissional coletivo, bem como elucidar formas adequadas para se capturar e comunicar esse tipo conhecimento de uma forma útil, é destacado como algo essencial para se promover a aprendizagem profissional (Ball, Ben-Peretz & Cohen, 2014). Complementando tal perspectiva, incluem-se as discussões coletivas, as quais são indicadas como uma das bases da aprendizagem dos professores, pois permitem trocas com outros profissionais da área, de forma que possam compreender, comparar, (re)formular suas próprias (in) certezas, ampliando, assim, suas próprias oportunidades de aprender (Ball & Cohen, 1999; Ribeiro & Ponte, 2019).

A ideia de que só se pode ensinar aquilo que se sabe e que o teste definitivo para confirmar a compreensão de um assunto é a sua capacidade para ensinar, transformando o próprio conhecimento em possibilidade de ensino e aprendizagem (Shulman, 1986, 1987), converge com as oportunidades de (re)formular (in)certezas e ampliar as possibilidades de aprender, abordadas anteriormente por outros autores. Toma-se, então, com uma das bases teóricas de nossa pesquisa, o trabalho de Ball, Thames e Phelps (2008), desenvolvido a partir dos estudos de Shulman (1986) sobre a noção de *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT).

O modelo teórico MKT parte do pressuposto da necessidade e da importância de compreender quais são os conhecimentos que os professores precisam para atuar na prática letiva e para entender, também, de que forma é possível mobilizá-los em sala de aula. Logo, Ball, Thames e Phelps (2008) propõem uma base de conhecimentos matemáticos a fim de alicerçar a realização das tarefas docentes. O MKT se constitui a partir do Conhecimento Específico do Conteúdo (CK)[3] e refere-se ao conteúdo matemático a ser ensinado, subdividido em: Conhecimento Comum do Conteúdo (CCK), aqueles conhecimentos usados para fins além do ensino e que são, usualmente, encontrados e utilizados por pessoas das mais diversas profissões; Conhecimento Especializado do Conteúdo (SCK), um tipo de conhecimento voltado ao professor e ao seu ofício de ensinar matemática; Conhecimento do Conteúdo no Horizonte (HCK), que é aquele tipo de conhecimento matemático que possibilita ao professor compreender a disposição dos conceitos matemáticos ao longo do currículo, bem como saber como conectá-los e revisitá-los sempre que possível e necessário.

[3] Apesar de se utilizar a nomenclatura dos domínios do MKT em português, optou-se por manter as siglas em inglês, pois estas já estão bastante difundidas na literatura internacional sobre o tema.

Em complemento aos domínios já explorados, traz-se o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (PCK), constituído a partir de um amálgama entre o conteúdo específico e o conteúdo pedagógico geral, os quais estão unidos de tal modo que acabam por se "transformar" em um tipo de conhecimento que possibilita e favorece o ensino de matemática, por exemplo. O PCK também é subdividido no trabalho de Ball, Thames e Phelps (2008) em três domínios: Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes (KCS), que possibilita ao professor antecipar equívocos que podem ser cometidos pelos estudantes, por exemplo; Conhecimento do Conteúdo e do Ensino (KCT), conhecimento que propicia ao professor estabelecer relações sobre o ensino e sobre a matemática, permitindo, assim, que ele saiba, por exemplo, escolher os melhores exemplos e a forma de sequenciá-los para superar um erro ou uma dificuldade dos estudantes; Conhecimento do Conteúdo e do Currículo (KCC), designado como aquele conhecimento sobre a forma como os conteúdos estão distribuídos ao longo currículo que será estudado/ensinado.

Sabe-se que o conhecimento do professor é um aspecto fundamental de sua formação, uma vez que este se inter-relaciona com o nível de confiança do professor, quer relativamente à matemática e ao seu ensino, quer referente àquilo que ele considera que os seus alunos são capazes de aprender em Matemática (Serrazina, 2013). Logo, identifica-se aí uma relação positiva entre a confiança dos professores e a melhoria do seu conhecimento matemático (Serrazina, 2013).

O PENSAMENTO ALGÉBRICO E OS DIFERENTES SIGNIFICADOS DO SINAL DE IGUALDADE

No que diz respeito ao ensino do pensamento algébrico, iniciamos com a discussão sobre a importância de se compreender que a matemática é uma ciência que trabalha com padrões (Ponte, Branco & Matos, 2009) e está presente no dia a dia de inúmeras profissões e na vida cotidiana. Com isso, pode-se então inferir que aprender Matemática perpassa os domínios escolares e impacta diretamente nas relações futuras dos estudantes (Skovsmose, 2005). O fato de a Matemática privilegiar a regularidade remete à observação e à definição de padrões e generalização, encontrando assim alguns dos principais contributos que caracterizam o ensino do PA, em especial nos anos iniciais (Britt & Irwin, 2011; Kieran et al. 2016). Partindo do pressuposto de que não se tem uma definição única sobre o que se entende por PA (Ribeiro & Cury, 2015), toma-se por base, neste artigo, a compreensão de PA como "um hábito da mente que permeia toda a matemática e que envolve a capacidade dos alunos de construir, justificar, e expressar conjecturas sobre as relações e estruturas matemáticas" (Blanton & Kaput, 2008, p. 142).

O ensino da Álgebra desde os anos iniciais tem por objetivo promover uma forma de pensamento, ou seja, um hábito de buscar regularidades e articular, testar, fornecer regras ou conjecturas para uma infinita classe de números (Canavarro, 2007; Kieran et al., 2016). As evidências de que as crianças dos anos iniciais são capazes de resolver tarefas pensando algebricamente levaram a mudanças nos currículos escolares internacionais, ampliando a concepção de Álgebra, por exemplo, nos Estados Unidos e em Portugal (Molina, 2011). Por seu lado, Kieran et al. (2016) salientam ainda que não basta aos professores entenderem bem apenas a matemática, eles precisam adquirir a experiência em olhar para o pensamento do aluno, devem (re)orientar suas práticas e crenças para desenvolver e escutar as ideias matemáticas que ele traz.

No Brasil, Trivilin e Ribeiro (2015) ressaltam a necessidade de oferecer formação continuada aos professores que ensinam Matemática nos anos iniciais, uma vez que seus conhecimentos profissionais apresentam lacunas no que se refere ao PA. Os resultados apontados por Trivilin e Ribeiro (2015) evidenciam a importância de compreender os diferentes significados do sinal de igualdade, ampliando, para além do que é normalmente abordado nas escolas, o significado operacional. Tais indicações vão ao encontro das recomendações presentes na BNCC (Brasil, 2017), dando assim ainda mais atualidade e relevância à pesquisa cujos resultados são aqui analisados.

Tomando-se a compreensão dos diferentes significados do sinal de igualdade como uma das temáticas a ser desenvolvida no campo do PA, considera-se aqui, a partir do estudo de Ponte, Branco e Mattos (2009), a importância que o conceito de igualdade desempenha na Matemática, uma vez que ele tem um relevante papel para se compreender o conceito de equivalência. Esses autores ressaltam que "a igualdade ou equivalência matemática é sempre relativa apenas a uma certa propriedade" (p. 19). É importante lembrar que, na Matemática, a relação de igualdade é uma relação de equivalência com três propriedades: a simétrica ($6+2=8$ ou $8=5+3$ ou $6+2=5+3$), a reflexiva ($3=3$) e a transitiva ($2+3+4=4+3+2=5+4=9$) (Ponte, Branco & Matos, 2009).

No trabalho de Kieran (1981) são apontados três diferentes significados para o sinal de igualdade: o primeiro, significado operacional; o segundo, significado de equivalência; e o terceiro, significado relacional. O significado operacional, o mais trabalhado nos anos iniciais e, muitas vezes, o único, confere ao aluno a ideia de que, após este símbolo "=", deve-se sempre colocar o resultado de uma operação e, geralmente, só é aceita como verdadeira uma única quantidade (por exemplo, $4+13=17$). Nessas circunstâncias, os estudantes ficam limitados a compreender o sinal de igualdade como "um sinal de fazer algo" (Behr, Erlwanger & Nichols, 1980); uma ação indicada que significa: dá ou faz (Stacey & Macgregor, 1997); "um operador que transforma, por exemplo, $3 + 4$ em 7" (Trivilin & Ribeiro, 2015). Já o segundo significado do sinal de igualdade, o de equivalência, permite estabelecer muitas formas de representar o 12, por meio de igualdades numéricas, como $12=6+6$; $8+4=12$; $12=10+2$, assim como indica possibilidades de se trabalhar expressões como $7+3=2+8$, indicando uma relação de equilíbrio, de equivalência entre os termos "antes" e "depois" do sinal.

Trabalhar este significado nos anos iniciais é muito importante para possibilitar a compreensão de conceitos algébricos dos anos subsequentes, como o conceito de equação, o qual é largamente trabalhado nos anos finais do ensino fundamental (Ribeiro & Cury, 2015). Por fim, o último significado do sinal de igualdade é o relacional, pelo qual se estabelecem relações entre expressões, bem como se aponta para a compreensão e o uso das propriedades das operações (adição e multiplicação). Nesse caso, o sinal de igualdade é fundamental para que se compreenda, por exemplo, a expressão 10+12+15=10+10+ 17.

TAREFAS DE APRENDIZAGEM PROFISSIONAL

Ao se colocar em discussão a aprendizagem profissional do professor e as Tarefas de Aprendizagem Profissional (TAP), tomamos o estudo de Ball e Cohen (1999) como ponto de partida. Os autores propõem que a aprendizagem profissional seja vista a partir de uma estrutura curricular na qual a mesma seja considerada no âmbito do desenvolvimento de uma pedagogia específica para a formação de professores. Neste caso, a formação se concentra em novas capacidades para o estudo da prática, alicerçando-se em questionamentos centrados na prática (como o uso de registros, tarefas e atividades, vídeos de aulas, planejamento, eventos, etc.). Tal abordagem parece oportunizar uma abertura de perspectivas comparativas sobre a prática (oportunidade de aprender com a prática do outro) e, por fim, contribuir com questionamentos pessoais e coletivos (oportunidade de (re)significar/ transformar as crenças e práticas). Ball e Cohen (1999) apresentam ainda seu modelo pedagógico de aprendizagem profissional para a formação de professores, o qual é estruturado em três pilares e seus componentes-chave: as TAP, a natureza das discussões propiciadas a partir dos desdobramentos das referidas TAP e o importante papel dos formadores que propiciariam tais tarefas e discussões.

Neste contexto, buscamos em nossa pesquisa identificar como reagem os professores quando vivenciam (boas) oportunidades para aprender, tendo por pressupostos: (i) o assunto que ensinam (significados e conexões na vida cotidiana e não apenas procedimentos e informações); (ii) o conhecimento dos estudantes (como pensam, como aprendem, por que cometem equívocos, como ouvi-los atentamente e como ajudá-los a avançar); (iii) a necessidade de desenvolver a capacidade de superar os desvios sociais e étnicos, com sensibilidade para proceder ao ajuste e à adaptação necessários para atingir cada estudante e buscar estratégias para que todos eles aprendam (Ball & Cohen, 1999).

Por outro lado, os estudos de Silver et al. (2007) apresentam uma análise que ilustra algumas maneiras pelas quais os professores podem aprender matemática coletivamente. Os autores propõem um projeto com um formato de oportunidades de aprendizagem profissional, as quais eram constituídas por uma sequência de quatro etapas, a saber: 1.ª) *Opening Activity Problem Solving*, uma atividade de abertura na qual os professores são convidados a resolver um problema matemático não trivial; 2.ª) *Individual Reading and Analysis of the Case*, momento em que são propostas a leitura individual e a análise de uma narrativa de aula; 3.ª) *Collaborative Case Analysis and Discussion*, em que há discussão coletiva do caso narrado, momento em que os professores levantam as questões do caso e as correlacionam com seu próprio ensino; 4.ª) *Collaborative Lesson Planning and Debriefing*, culminando com o planejamento colaborativo de uma aula, seu posterior desenvolvimento e análise, em conjunto. Essas discussões permitem dizer que as possibilidades de aprendizagem profissional se estabelecem em contextos coletivos de formação.

Por fim, destaca-se ainda a relevância de que as TAP considerem "amostras autênticas de prática" (Smith, 2001), ou seja, o uso de materiais extraídos de aulas reais, em sala, como vídeos, áudios, observação, protocolos de estudantes, entre outros, materiais esses que podem fornecer oportunidades de aprendizagem profissional, ao abrirem espaço para crítica, questionamentos e investigações.

CONTEXTO DA INVESTIGAÇÃO E PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Este estudo foi desenvolvido no contexto de um processo de formação continuada de professores, em uma escola pública municipal em São Paulo. Os encontros foram estruturados em 14 sessões de trabalho presenciais durante os meses de agosto a outubro de 2018, com a participação da primeira autora, como pesquisadora e formadora (PF), e de outras seis professoras dos anos iniciais. Nesse contexto os dados foram recolhidos.

Em seus primeiros encontros, o processo formativo abordou, por meio de um questionário, oportunidades para se levantar e identificar os conhecimentos matemáticos prévios que as professoras tinham acerca dos diferentes significados do sinal de igualdade. Além disso, também se buscou discutir elementos teóricos e metodológicos para a fundamentação e o aprofundamento dos conhecimentos das professoras. Enquanto isso, nos encontros subsequentes, trabalhou-se com TAP, no intuito de mobilizar e construir conhecimentos matemáticos para o ensino dos diferentes significados do sinal de igualdade nos anos iniciais. Considerando-se o foco deste artigo, apresenta-se na Tabela 1 uma síntese dos encontros 6, 7 e 8, momentos nos quais foram desenvolvidas as TAP analisadas e discutidas neste artigo.

Tabela 1
Panorama de Parte dos Encontros da Pesquisa.

ENCONTROS	OBJETIVOS
6.º encontro 03/09/2018	Desenvolver a TAP 1, objetivando identificar se as professoras reconhecem os significados de equivalência e o significado relacional do sinal de igualdade. Levantar o conhecimento das professoras sobre os estudantes e suas estratégias de resolução e possíveis dificuldades/equívocos.
7.º encontro 05/09/2018	Desenvolver a TAP 1 para possibilitar a análise da resolução fictícia de estudantes e de diferentes estratégias para resolver a tarefa proposta, evidenciando conhecimentos matemáticos sobre os diferentes significados do sinal de igualdade.
8.º encontro 10/09/2018	Desenvolver a TAP 2, objetivando a discussão sobre antecipações e dificuldades dos estudantes, ao realizarem uma tarefa, e os desafios de olhar o protocolo dos estudantes e explicar seus procedimentos e possíveis intervenções.

Nos encontros em que as professoras trabalharam com as TAP, elas foram divididas em dois grupos[4], em uma dinâmica composta por dois momentos: (i) no primeiro, cada grupo lia, refletia, discutia, registrava suas conjecturas e a resolução de tarefas matemáticas não triviais e, concomitantemente a isso, havia intervenções pontuais da (PF, que circulava entre os dois grupos; (ii) no segundo momento, abria-se a plenária, para que cada questão/item das TAP e suas resoluções e discussões feitas nos pequenos grupos fossem compartilhadas entre todas as participantes.

Do ponto de vista metodológico, esta pesquisa insere-se em uma abordagem qualitativo-interpretativa (D'Ambrósio, 2004; Esteban, 2010), tendo os dados sido recolhidos por meio de três instrumentos e procedimentos, a saber: (i) o questionário, objetivando identificar conhecimentos prévios das professoras acerca da temática; (ii) as TAP, com diferentes enfoques, para possibilitar uma variedade de discussões e abordagens relativas ao conhecimento específico, ao conhecimento dos estudantes e dos processos de ensino e conhecimento do currículo; e (iii) as gravações em áudio e vídeo, realizadas ao longo dos encontros, que foram posteriormente transcritas.

As TAP, principal instrumento pelo qual os dados foram recolhidos, tinham ainda em sua estrutura o propósito de levantar e possibilitar a compreensão sobre: (I) quais conhecimentos acerca da matemática as professoras mobilizam para o ensino dos diferentes significados do sinal de igualdade; (II) quais práticas letivas poderiam oportunizar a interação e a construção de conhecimentos de seus estudantes; (III) quais tipos de tarefas matemáticas e abordagens de ensino as professoras entendiam como potencializadoras para o ensino do sinal de igualdade.

Para a construção das unidades de análise tomaram-se: (i) o questionário inicial; (ii) os dados produzidos por meio das transcrições dos encontros 6, 7 e 8; (iii) as produções escritas produzidas pelos dois grupos de professoras, ao desenvolverem as TAP 1 e TAP 2. Em seguida, agruparam-se essas informações, criando assim um inventário, o qual foi organizado por encontro, por participante/grupo e por instrumento/procedimento de recolha. Tal procedimento foi adotado de modo que, ao se agrupar as informações obtidas por diferentes fontes, seria possível compará-las e analisá-las de modo articulado.

A partir da constituição do inventário e de uma primeira rodada de análise, organizaram-se dois episódios para uma análise pontual e aprofundada: um episódio foca a mobilização de conhecimentos especializados para o ensino dos diferentes significados do sinal de igualdade e, o outro, tem seu foco nos conhecimentos das professoras acerca dos estudantes e do ensino. Destaca-se que: (i) no primeiro episódio apresentar-se-á um total de 14 excertos, sendo 6 diálogos e 8 figuras, enquanto, no segundo serão discutidos 9 excertos, 4 diálogos e 5 figuras.

Como forma de codificar as informações utilizadas nas análises, adotou-se o seguinte procedimento: após a descrição da informação, vem o nome real das participantes, seguido pela letra inicial do instrumento (Q, para o questionário; T1 ou T2 para TAP 1 ou TAP 2,

[4] O grupo G1 era composto por Celeste (C), Luciana (L) e Kátia (K), enquanto o grupo G2 era composto por Adionísia (A), Márcia (M) e Valdete (V). Vale destacar que, atendendo a pedido das próprias professoras, utilizaram-se seus nomes verdadeiros.

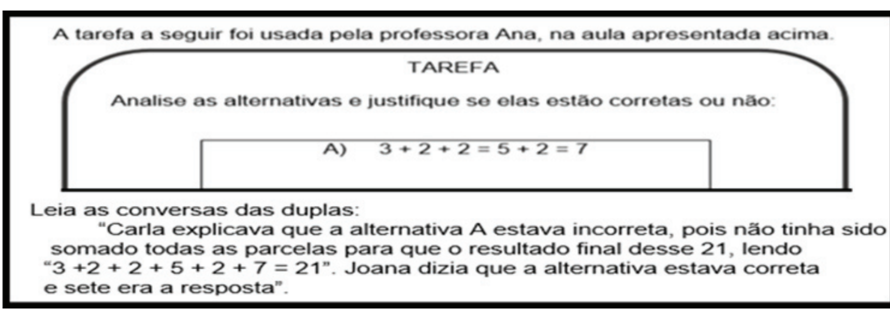
respectivamente; D, para as transcrições nos pequenos grupos; e P, para as transcrições das plenárias), e, por fim, o número e a data do encontro em que o dado foi obtido). Por exemplo, para identificar uma informação fornecida por Adionísia, no 6.º encontro, em 08/08/2018, durante as discussões em grupo, utilizou-se: (Adionísia, D6, 08/08/2018).

DE OPERADOR A EQUIVALENTE: AMPLIANDO O CONHECIMENTO DAS PROFESSORAS ACERCA DOS SIGNIFICADOS DO SINAL DE IGUALDADE

Este primeiro episódio tem o propósito de apresentar e discutir as análises referentes aos conhecimentos matemáticos das professoras para o ensino dos diferentes significados do sinal de igualdade a estudantes dos anos iniciais.

A partir da seleção das questões (11) *"Em sua opinião, Carla ou Joana está correta? Como você justificaria matematicamente a sua escolha?"* e (12) *"O que revelam as respostas das alunas sobre o sinal de igualdade?"*, que formavam o Questionário Inicial (Figura 1), é possível depreender, tomando-se as análises feitas pelas professoras a partir de uma tarefa matemática para estudantes, que elas reconheciam, até então, apenas o significado operacional do sinal de igualdade.

Figura 1
Trecho do Questionário.


A tarefa a seguir foi usada pela professora Ana, na aula apresentada acima.

TAREFA

Analise as alternativas e justifique se elas estão corretas ou não:

A) 3 + 2 + 2 = 5 + 2 = 7

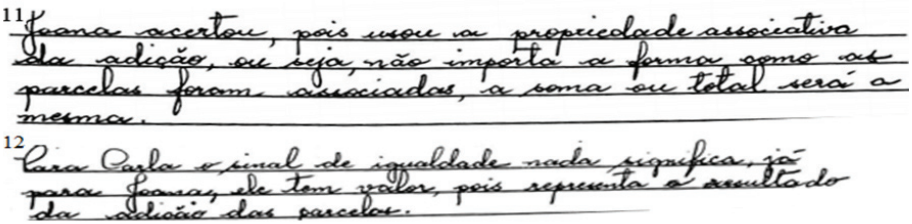
Leia as conversas das duplas:

"Carla explicava que a alternativa A estava incorreta, pois não tinha sido somado todas as parcelas para que o resultado final desse 21, lendo "3 +2 + 2 + 5 + 2 + 7 = 21". Joana dizia que a alternativa estava correta e sete era a resposta".

Observa-se que a professora Celeste (C), ao responder à questão (11), relaciona o sinal de igualdade à propriedade associativa da adição, a partir da resposta de estudante Joana. Ao analisar a resposta de Carla (questão 12), a mesma professora afirma que, para essa estudante, o sinal de igualdade nada significa – ainda que ela associe o sinal de igualdade ao seu significado de operador –, como se pode notar em sua própria resposta. Por outro lado, é interessante notar que a professora (C) reconhece o significado operacional do sinal de igualdade na resposta de Joana, ainda que não seja esse o significado atribuído pela estudante. No entanto, ao refletir sobre a resposta de Carla, Celeste não percebe, justamente, que é o significado operacional que foi apontado pela estudante Carla, embora de forma incorreta (Figura 2):

Figura 2

Protocolo do Questionário (Dados da pesquisa – Celeste, Q2, 08/08/2018).



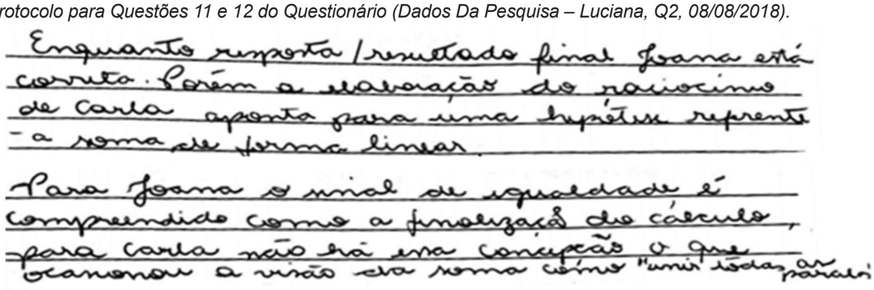
11 Joana acertou, pois usou a propriedade associativa da adição, ou seja, não importa a forma como as parcelas foram associadas, a soma ou total será a mesma.

12 Para Carla o sinal de igualdade nada significa, já para Joana, ele tem valor, pois representa o resultado da adição das parcelas.

Por outro lado, a professora Luciana (L), ao analisar as mesmas questões (11) e (12) (Figura 3), aparenta compreender a resposta de Carla, inclusive atribuindo compreensão ao que foi feito pela estudante. Isso pode ser percebido pela forma como Luciana justifica o equívoco que Carla comete. No entanto, ao analisar a resposta de Joana, Luciana afirma que a estudante *"compreende o sinal como a finalização do cálculo"*, demonstrando, assim, uma visão ainda operacional do sinal de igualdade (Ponte, Branco & Matos, 2009; Trivilin & Ribeiro, 2015).

Figura 3

Protocolo para Questões 11 e 12 do Questionário (Dados Da Pesquisa – Luciana, Q2, 08/08/2018).

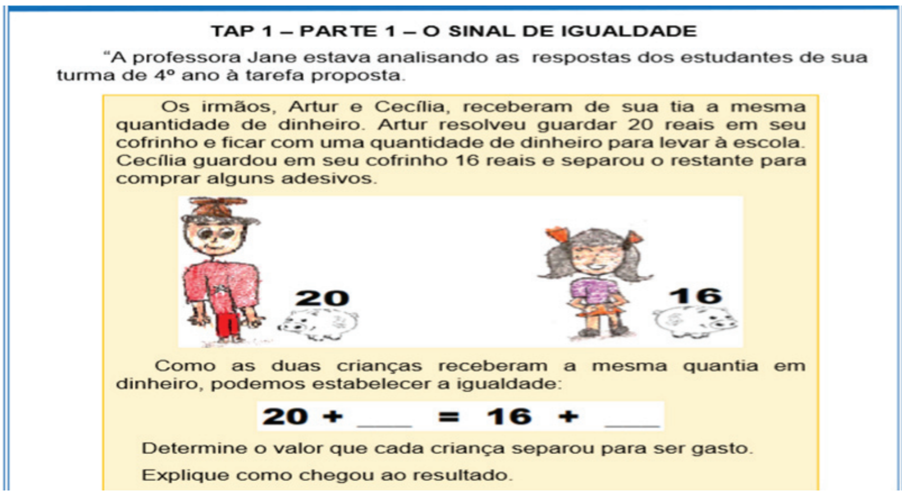


Enquanto resposta/resultado final Joana está correta. Porém a elaboração do raciocínio de Carla aponta para uma hipótese representa a soma de forma linear.

Para Joana o sinal de igualdade é compreendido como a finalização do cálculo, para Carla não há essa concepção o que ocasionou a visão da soma como "unir todas as parcelas"

Pode-se observar ainda que, no início do trabalho em grupos, suscitado pela TAP 1 (Figura 4), o significado de operador do sinal de igualdade permanece resistente, o que é reforçado nas discussões entre as duas professoras do G1. No entanto, ao longo do desenvolvimento da TAP 1, em especial com as intervenções da PF, isso vai se alterando e novos significados do sinal de igualdade começam a surgir.

Figura 4
TAP 1: a tarefa matemática.



TAP 1 – PARTE 1 – O SINAL DE IGUALDADE

"A professora Jane estava analisando as respostas dos estudantes de sua turma de 4º ano à tarefa proposta.

Os irmãos, Artur e Cecília, receberam de sua tia a mesma quantidade de dinheiro. Artur resolveu guardar 20 reais em seu cofrinho e ficar com uma quantidade de dinheiro para levar à escola. Cecília guardou em seu cofrinho 16 reais e separou o restante para comprar alguns adesivos.

20 16

Como as duas crianças receberam a mesma quantia em dinheiro, podemos estabelecer a igualdade:

20 + ____ = 16 + ____

Determine o valor que cada criança separou para ser gasto.

Explique como chegou ao resultado.

Apesar de as professoras encontrarem respostas matemáticas corretas ao que se perguntava na TAP, é interessante notar que elas resolviam a tarefa (Figura 4), operando separadamente com "o que vem antes" e "depois" do sinal de igualdade. Ao observar tal situação, a PF, com o intuito de colocar as professoras para refletirem sobre o que faziam, lança alguns questionamentos:

> PF – *Meninas, eu já vi que responderam tudo e colocaram várias possibilidades de resolução, posso então perguntar uma coisa? Vocês colocaram 10 e 14; 4 e 8; 2 e 6... que relação existe entre cada dupla de números?*
>
> C – *Que só trabalhamos com os pares?*
>
> PF – *Mas só pode colocar número par? E se eu colocar 15?*
>
> C – *Poderia também. [...]*
>
> K – *20+15 dá 35.*
>
> C – *Então teria que ser do outro lado algo para dar 35 também. 16+__*
>
> K – *19.*
>
> PF – *E por que vocês calcularam o total de cada lado? Será que não teria alguma relação, entre o que eu coloco de um lado e do outro? [...] E qual relação existe*

entre o que eu coloco deste lado [apontando para a quantidade a ser somada com o 20] *e o que eu coloco deste lado* [apontando para a quantidade a ser somada com o 16]*? Que relação a gente pode estabelecer?*

(Celeste, Kátia, Luciana, Pesquisadora/Formadora, D6, 03/09/2018).

Apesar dos questionamentos feitos pela PF, as professoras permanecem calculando o resultado, separadamente, em cada "lado" da igualdade, mantendo-se assim o significado operacional do sinal de igualdade (Ponte, Branco & Matos, 2009). Na sequência, o debate continua:

K – *Mas não está trabalhando a soma mesmo?*

PF – *Não, quero algo além da soma. Olha, vocês fizeram o tempo inteiro isso* [apontando para 20+10=16+14=30] *vocês quiseram equilibrar e calcular. Tudo que vocês calculavam de um lado do sinal, vocês tentavam achar o equilíbrio calculando do outro.*

C – *Sim, somamos para achar o equilíbrio do outro lado.*

PF – *Sim, mas existe uma forma de determinarmos o valor a ser colocado do outro lado, sem precisar somar separadamente cada lado? Teria alguma regularidade que a gente poderia ver, entre o número a ser colocado de um lado e sua relação com o que vai ser colocado do outro? Reparem, vocês colocaram aqui 10* [apontando para a primeira parte da igualdade 20 + __] *e aqui* [apontando para a quantidade a ser somada com o 16]*?*

K – *14.*

PF – *Aqui, colocaram 4* [apontando para a primeira parte da igualdade 20 + __] *e aqui* [apontando para a quantidade a ser somada com o 16]*?*

C – *8.*

PF – *E então?*

C – *Ah, está sempre somando 4!*

PF – *E por quê?*

K – *Nossa, não tinha percebido isso.*

C – *Agora é que eu fui ver. Boa pergunta e por quê?*

L – *Ah, é porque entre estes dois tem esta diferença de 4* [apontando para o 20 e o 16].

PF – *E se aqui tem 4 a menos... no outro lado...*

L – *No outro vai ter 4 a mais.*

C – *Então, se eu colocasse um ímpar aqui* [dirigindo-se à PF]*, por exemplo 20+5, que é 25. Seria aqui 16+9* [respondendo rapidamente].

PF – *Exato!*

(Celeste, Kátia, Luciana, Pesquisadora/Formadora, D6, 03/09/2018).

As professoras passam, então, a perceber a regularidade para qualquer quantidade a se somar nas parcelas em ambos os "lados" do sinal de igualdade (que, no caso inicial da TAP 1, era 4 a mais na parcela após o sinal de igualdade). Com isso, ampliaram seu olhar para o sinal de igualdade, movendo-se apenas do significado operacional (*"20+15 dá 35. Então teria que ser do outro lado algo para dar 35 também"*), e passando a perceber também o significado equivalente do sinal de igualdade (*"Então vamos ver aqui 20+7=16+11. Agora ficou rapidinho. É, sempre tem a diferença de 4"*) (Kieran, 1981). Percebe-se uma construção no conhecimento matemático das professoras (Ball, Thames & Phelps, 2008) e uma ampliação dos significados do sinal de igualdade (Kieran, 1981; Ponte, Branco & Matos, 2009). Parece-nos ainda possível conjecturar que as professoras estavam em crescente (re)estruturação de seu Conhecimento Especializado do Conteúdo (Ball, Thames & Phelps, 2008).

Depois de compreenderem a regularidade existente na relação da quantidade que colocavam em ambos os membros da igualdade e de descobrirem um padrão na relação entre as respostas que deram, importantes componentes do PA nos anos iniciais (Britt & Irwin, 2011; Ponte & Branco, 2013), surge uma questão nova e relevante. As professoras passam a querer saber se poderiam generalizar o padrão encontrado para quaisquer outras tarefas: *"E sempre vai ser 4? Em qualquer proposta?"*. A busca por uma generalização pode ser observada a seguir:

> C – *E sempre vai ser 4? Em qualquer proposta?*
>
> PF – *Neste caso* [tarefa da professora Jane] *sim. Mas e se a gente mudasse o número? E se o menino tivesse guardado 15 e a irmã 10, seria igual?*
>
> *[...]* C – *15 e 10... Aí seria de 5. É isso?*
>
> *PF – Exato.*
>
> K – *Ah. É a partir daqui!*
>
> PF – *Sim, é a relação que se estabelece, uma vez que os dois receberam a mesma quantidade de valores; então, se aqui tem 5 a mais e do outro 5 a menos, para manter a equivalência tenho que considerar isso.*
>
> K – *Nossa, olha aqui, se eu colocar 15+5, é só colocar 10+10, a diferença é de 5 mesmo.*
>
> PF – *Você para de olhar só para a soma e passa a estabelecer uma relação do que você tem de um lado, antes do sinal de igualdade, e do outro, depois do sinal. E você passa a trabalhar a ideia central de ver o sinal de igualdade com outro significado, não apenas o de operacional e sim como equivalente e, até relacional.*
>
> K – *Nossa, muito interessante. Agora a gente já olha aqui e já sabe o que dá lá. [...] Sacode a cabeça da criança pra caramba... se sacudiu a minha.*
>
> (Celeste, Kátia, Luciana, Pesquisadora/Formadora, D6, 03/09/2018).

Discutindo-se ainda a mobilização e a ampliação de significados do sinal de igualdade por parte das professoras, analisam-se os dados que emergiram ao longo do trabalho com outra parte da TAP 1 (Figura 5). Essa parte apresentava respostas (reais e fictícias) de estudantes da professora Jane, ao realizarem uma tarefa matemática proposta (Figura 4). Para a análise das respostas, as professoras estavam a explorar a matemática nelas envolvida; logo, elas mesmas continuavam a mobilizar e ampliar também um tipo de Conhecimento Especializado do Conteúdo (Ball, Thames & Phelps, 2008), a falar de outros significados do sinal de igualdade (Kieran, 1981; Ponte, Branco & Matos, 2009) e a reconhecer o PA nos anos iniciais (Britt & Irwin, 2011; Ponte & Branco, 2013).

Figura 5

TAP 1: Resoluções Reais e Fictícias de Estudantes.

> **Carlos, Joaquim e Cristina**
>
> "Artur levou para a escola 10 reais e Cecília separou 14 para comprar seus adesivos.
>
> Nós pensamos assim, se eles receberam a mesma quantidade, então a Cecília gastou 4 reais a mais que o irmão e achamos que ele levou 10 reais, porque na escola só pode levar no máximo 10 reais. Então temos 20 + 10 = 30 e 16 + 14 = 30".

> **Thiago, Fernanda e Carolina**
>
> "Artur levou para escola 36 reais e Cecília gastou os mesmos 36 reais em adesivos, porque eles tinham a mesma quantidade. Chegamos a esta resposta, juntando os valores que aparecem na conta: 20 + 16".

> **Thaís, Matheus e Murilo**
>
> "Artur levou para escola 5 reais e sua irmã gastou 9 reais em adesivos. Nós pensamos que, se os dois receberam o mesmo valor e ele guardou 4 reais a mais no seu porquinho, então Cecília tinha 5 reais mais 4 reais para gastar nos adesivos. Chegamos a esta resposta fazendo 20 + 5 = 16 + 9, porque Artur guardou 4 reais a mais do que sua irmã".

As professoras Adionísia (A), Marcia (M) e Valdete (V), do grupo 2 (G2), faziam suas análises e conjecturas:

> M – *Mas então nesse caso aqui eles não perceberam...*
>
> A – *A igualdade.*
>
> M – *Sim, não perceberam a equivalência. Ele ignorou o sinal de igual como equivalência.*
>
> M – *Então vamos voltar aqui* [releem a resposta de Carlos, Joaquim e Cristina].
>
> A – *[...] Eles entenderam. Não só perceberam a igualdade, como fazem a equivalência [...] E ele também percebe que a Cecília tem uma diferença de 4 reais.*
>
> M – *Diferente deste então?*
>
> A – *Muito diferente, porque ele percebe a igualdade. E este vai lá e soma tudo.*

M – *Olha, está certo. Eles entendem o raciocínio e ainda descobrem a diferença de 4 reais.*

(Adionísia e Márcia, D7, 05/09/2018).

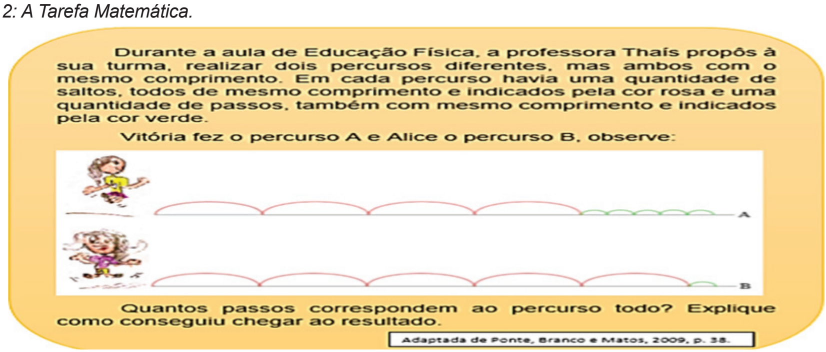
A partir das discussões das professoras (A), (M) e (V), percebe-se que elas estão utilizando o significado equivalente do sinal de igualdade, o que pode ser notado a partir das análises que fazem das respostas dos estudantes. Ainda que não tenhamos apresentado anteriormente os resultados das professoras deste grupo G2 (suas respostas no questionário inicial), elas também não apresentavam, naquele momento, indícios (explícitos) de conhecer e reconhecer outros significados do sinal de igualdade, para além do significado de operador.

Tomando-se todo o percurso de discussões entre as professoras (Ponte & Quaresma, 2016), as quais foram promovidas pela forma como a TAP 1 foi concebida e desenvolvida (Ball & Cohen, 1999; Silver et al., 2007), assim como pela atuação da PF (Smith, 2001), é possível afirmar que as professoras passaram a mobilizar e (re)significar seus conhecimentos matemáticos (Ball, Thames & Phelps, 2008) para o ensino dos diferentes significados do sinal de igualdade (Kieran, 1981; Ponte, Branco & Matos, 2009) – em especial, por ampliar suas compreensões dos significados do sinal de igualdade, de operador para equivalente.

Discutem-se a seguir alguns dados recolhidos a partir do trabalho que as professoras desenvolveram com a TAP 2 (Figura 6).

Figura 6

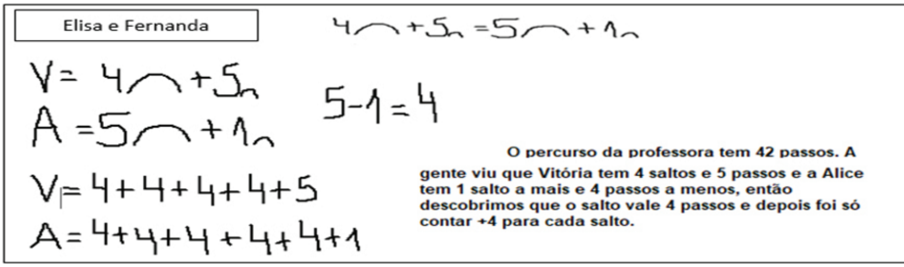
TAP 2: A Tarefa Matemática.



A resolução e as explicações apresentadas pelas professoras do G1 (C), (K) e (L) (Figura 8), elaboradas a partir da análise das respostas (fictícias e reais) de estudantes (Figura 7), demonstram a apropriação e a utilização do significado de equivalência para desenvolver o que foi solicitado na TAP 2.

Figura 7

TAP 2: Uma das Resoluções dos Estudantes.



Elisa e Fernanda

$4\frown + 5_{\frown} = 5\frown + 1_{\frown}$

$V = 4\frown + 5_{\frown}$

$A = 5\frown + 1_{\frown}$

$5 - 1 = 4$

$V = 4+4+4+4+5$

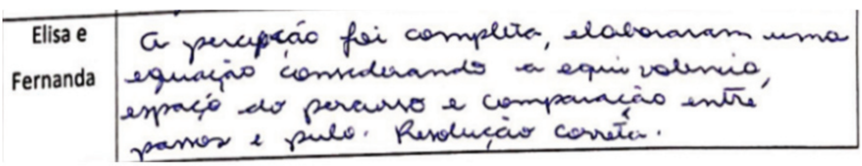
$A = 4+4+4+4+4+1$

O percurso da professora tem 42 passos. A gente viu que Vitória tem 4 saltos e 5 passos e a Alice tem 1 salto a mais e 4 passos a menos, então descobrimos que o salto vale 4 passos e depois foi só contar +4 para cada salto.

Após analisarem as respostas e as resoluções (reais e fictícias) dos estudantes, as professoras deveriam responder, de acordo com sua experiência profissional, se julgavam (in)correta a resposta e a resolução das estudantes. Assim, o protocolo de resposta gerado por (C), (K) e (L), professoras do grupo G1, foi:

Figura 8

Protocolo apresentado na análise da Figura 7 (Dados da pesquisa – Celeste, Kátia e Luciana, TAP 2, 10/09/2018).



Elisa e Fernanda	a percepção foi completa, elaboraram uma equação considerando a equivalência, espaço do percurso e comparação entre passos e pulo. Resolução correta.

Por meio de suas respostas, as professoras do G1 revelam que tinham se apropriado do significado de equivalência do sinal de igualdade. Para além disso, as professoras do (C), (K) e (L) olharam para as respostas dos estudantes (como é o caso apresentado nas Figuras 7 e 8) e as analisaram detalhadamente, apontaram justificativas matemáticas mais detalhadas (por exemplo, fazendo referência ao termo "equação") e, diferentemente do que haviam feito logo no início do processo de formação, por exemplo, ao responderem o questionário, não apenas avaliaram a resolução como correta ou equivocada. As professoras estavam ampliando sua aprendizagem profissional (Ball & Cohen, 1999).

Além dos trabalhos nos pequenos grupos, durante a plenária também se perceberam evidências de que as professoras (A) e (M) passaram a perceber o sinal de igualdade com significado de equivalência:

> PF – *Então é isso, preciso de fato somar os dois lados? Qual o significado deste sinal de igualdade? [...] Nesta tarefa vocês acreditam que qual dos significados do sinal de igualdade está mais evidente? Seria aquele operacional?*

M e A – *Não!*

PF – *Qual?*

M e A – *O da equivalência.*

A – *Este do operacional nem um pouco. É o de equivalência mesmo, de um lado com o outro.*

(Adionísia e Márcia, P6, 03/09/2018).

Outra evidência pode ser observada na sequência da discussão durante a plenária, pois as professoras (A), (M) e (V) atentam-se ao fato de os estudantes terem dificuldade de reconhecer o sinal de igualdade para além do significado de operador, pois é este o significado mais trabalhado na escola (Ponte, Branco & Matos, 2009; Trivilin & Ribeiro, 2015).

M – *Nós colocamos que eles ignoram o sinal de igual como equivalência.*

PF – *E isso é uma verdade? [...]*

A – *Sim!*

PF – *Porque eles estão muito habituados a ver o quê?*

M – *Uma conta só e a resposta depois do sinal de igual. Ele não está no meio. Depois dele vem o resultado final.*

V – *É mesmo.*

(Adionísia, Márcia e Valdete, P7, 05/09/2018).

Conclui-se, embora de forma parcial, diante das evidências e das análises apresentadas até o momento, que houve, por parte das professoras colaboradoras nesta pesquisa, mobilização e ampliação dos significados do sinal de igualdade, em especial, no sentido de deixar de reconhecê-lo apenas por seu significado operacional e passando a entender e utilizar também o seu significado de equivalência. As professoras também reconheceram os possíveis equívocos dos estudantes, dimensionando a sua natureza, características do KCS (Ball, Thames & Phelps, 2008).

Nota-se que as professoras tiveram a oportunidade de (re)significar seus conhecimentos matemáticos para o ensino (Ball, Thames & Phelps, 2008), a partir de análises e das discussões em torno de situações reais e fictícias advindas da prática letiva (Ball & Cohen, 1999; Smith, 2001; Silver et al., 2007), assim como pelas intervenções pontuais da PF. Elas evidenciaram ainda que as tarefas matemáticas proporcionadas comumente na escola podem ser um meio de reforçar apenas o significado operacional do sinal de igualdade (Ponte, Branco & Matos, 2009; Trivilin & Ribeiro, 2015).

ANTECIPAR AS RESPOSTAS DOS ESTUDANTES E SUAS POSSIBILIDADES DE RESOLUÇÃO: DAS DISCUSSÕES À PRÁTICA LETIVA

Agora, com este segundo episódio, o foco de análise e de discussão passa a contemplar potenciais dificuldades que os estudantes dos anos iniciais podem apresentar com tarefas matemáticas – como as exploradas na seção anterior –, assim como possíveis intervenções que elas, as professoras, podem realizar com vistas a ajudar seus estudantes a superar dificuldades, como as que eles normalmente podem apresentar.

Retomando o desenvolvimento da TAP 1, ao serem convidadas a responder à questão *"Quais dificuldades os estudantes do 4.º e 5.º anos podem apresentar ao realizarem esta tarefa?"* (referindo-se aqui à tarefa matemática apresentada na Figura 4), chamamos a atenção ao que as professoras (A), (M) e (V) trazem de reflexões, ao iniciarem sua discussão:

> M – *Difícil, né!?*
>
> A – *Mas não se sabe quanto ela ganhou?*
>
> A – *Ah, então a gente é que pode estabelecer.*
>
> V – *Mas a questão é a dificuldade da criança.*
>
> A – *Então é isso, a gente é que vai estabelecer o valor, então outra criança pode estabelecer outra coisa. Não vai ter um resultado único.*
>
> M – *Então não vai ter um resultado único! Assim, "quais as dificuldades que as crianças podem apresentar" é descobrir isso. Porque a criança acha que vai ter uma resposta única pra todo mundo e não vai ter. Eu não percebi, por que ele vai perceber?*
>
> (Adionísia, Márcia, Valdete, D6, 03/09/2018).

Nota-se que as professoras, de início, não conseguem antecipar dificuldades explicitamente relacionadas aos diferentes significados do sinal de igualdade, mas, por outro lado, elas afirmam que se tratava de uma tarefa difícil, principalmente por não possuir uma única resposta correta (uma resposta única).

Estas professoras também são convidadas a refletir sobre usar ou não a tarefa em questão (Figura 4) em uma aula de matemática e, em caso afirmativo, precisam decidir para qual ano escolar seria mais apropriada e como deveria ser desenvolvida com os estudantes.

Elas iniciam argumentando que deveria haver um "passo a passo" de ações do professor, que deveria começar com a formação das duplas de trabalho e que o professor deveria propor algumas perguntas para o engajamento dos estudantes na tarefa. As professoras estavam a mobilizar dois tipos de conhecimentos profissionais para o ensino, a saber o Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes (KCS) e o Conhecimento do Conteúdo e do Ensino (KCT) (Ball, Thames & Phelps, 2008). Há de se destacar que as professoras do G2 apontaram a importância de perguntar aos estudantes: *“Por que vocês acham que este sinal de igualdade está no meio desta sentença?”*, reflexão advinda da intervenção de Adionísia (D6, 03/09/2018). No entanto, as professoras destacaram, como se nota na discussão a seguir, a centralidade no papel do professor, enfatizando que era essencial uma leitura coletiva da tarefa com os estudantes:

> M – *Isso. Deixar ler sozinho pode não ajudar.*
>
> A – *E o que acham da pergunta: Quais as possibilidades de tornar as sentenças iguais?*
>
> V – *Acho que essa é fundamental. Você vai fazer lá na sua sala, né?* [Referindo-se a um outro momento da discussão, em que a professora (A) afirma que trabalharia a tarefa matemática (Figura 4), por iniciativa própria, em sua sala de aula]. *Depois você vai nos contar.*
>
> A – *Mas depois que eles perceberem que há muitas possibilidades, eles precisam perceber a regularidade, pois isso já é outra coisa.*
>
> M – *Então, a partir daí, eles podem perceber que são igualdades e descobrir os outros valores. É o tipo de problema que precisa de um bom direcionamento, de perguntas, de conversa. Trabalhar em dupla é fundamental para um trocar com o outro. E ainda o professor tem que passar, interferir, perguntar.*
>
> (Adionísia, Márcia, Valdete, D6, 03/09/2018).

Embora o significado de equivalência do sinal de igualdade não pareça o foco das discussões das professoras, elas já passam a considerá-lo inserido na tarefa, apresentando relação dele com possíveis dificuldades dos estudantes e com estratégias de ensino que poderiam ser mobilizadas para buscar superar tais entraves.

Quando passamos a analisar o trabalho realizado pelo grupo G1, no que se refere a dificuldades dos estudantes em relação à tarefa matemática apresentada na Figura 6, as professoras (C), (K) e (L) registram suas respostas e as apresentam, como se vê nas Figuras 9 e 10.

Figura 9

Protocolo Apresentado na TAP 2 (Dados da pesquisa – Celeste, Kátia e Luciana, TAP 2, 10/09/2018).

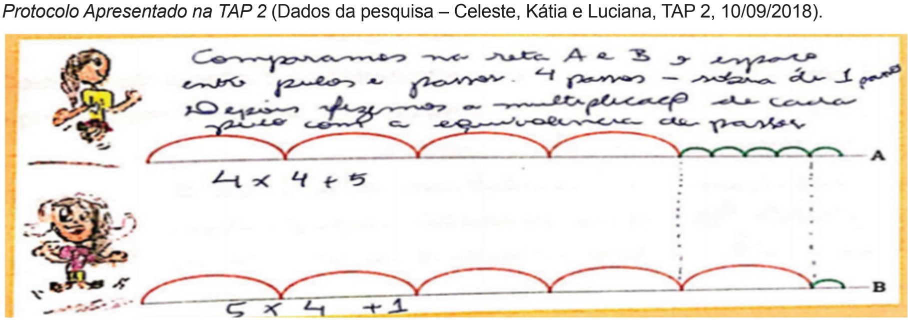
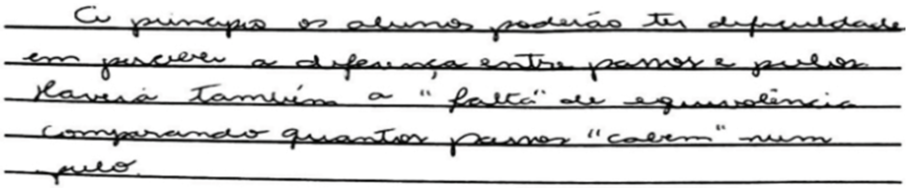


Figura 10

Protocolo Apresentado – Possíveis Dificuldades dos Estudantes TAP 2 (Dados da pesquisa – Celeste, Kátia e Luciana, TAP 2, 10/09/2018).


A princípio os alunos poderão ter dificuldade em perceber a diferença entre passos e pulos. Haverá também a "falta" de equivalência comparando quantos passos "cabem" num pulo.

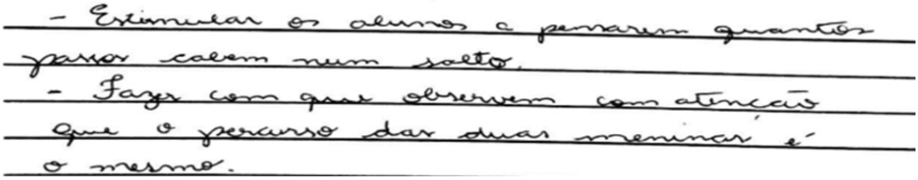
Algumas dificuldades que os estudantes poderiam enfrentar, como relacionar "pulos" e "passos", foram destacadas pelas professoras, mas há um aprofundamento em suas reflexões durante as discussões que elas desenvolvem no trabalho em pequenos grupos (Ball & Cohen, 1999). Isso pode ser observado nos trechos a seguir:

> C – *Olha, baseado nisso, já podemos elaborar umas questões para fazer "será que o espaço ocupado pelo pulo é o mesmo de um salto?" "Será que cabe a mesma quantidade de pulos e saltos no espaço?".*
>
> L – *É mesmo.*
>
> C – *As duas têm que percorrer a mesma distância, percorrer o mesmo caminho. Será que a quantidade de pulos da Alice vai dar o mesmo percurso da Vitória?*
>
> L – *Hum.*
>
> C – *Porque aqui só tem saltos e um passo. E aqui tem saltos e mais passos. Será que eles não vão se atrapalhar na quantidade de passos aqui?* [apontando para o percurso A da Figura 9].
>
> K – *Eu acredito que sim.*
>
> C – *Porque eles podem olhar um monte de passos aqui e falar "Olha, professora, tem pouco pulo aqui e aqui tem um monte de passos, então essa andou mais".*
>
> (Celeste, Kátia e Luciana, D8, 10/09/2018)

As professoras, (C), (K) e (L) sugeriram como antecipar possíveis dificuldades relacionadas à tarefa (o que é observado na transcrição anterior e naquelas que sucedem a Figura 11. Em complemento à antecipação das potenciais dificuldades dos estudantes, as professoras (C), (K) e (L) passam a pensar quais ações poderiam tomar para explorar a equivalência, por exemplo, a partir da questão que colocariam aos alunos: *"pensarem quantos passos cabem em um salto"*. E pretendem que os estudantes observem que "*o percurso das duas meninas é o mesmo"*, ou seja, os percursos são equivalentes.

Figura 11

Protocolo apresentado – ações para explorar a equivalência TAP 2 (Dados da pesquisa – Celeste, Kátia e Luciana, TAP 2, 10/09/2018).



- Estimular os alunos a pensarem quantos passos cabem num salto.
- Fazer com que observem com atenção que o percurso das duas meninas é o mesmo.

Diante das discussões das professoras (C), (K) e (L) e da última afirmação da professora (C) *"Porque eles podem olhar um monte de passos aqui e falar: Olha, professora, tem pouco pulo aqui e aqui tem um monte de passos, então essa andou mais"*, a PF se aproxima e pergunta:

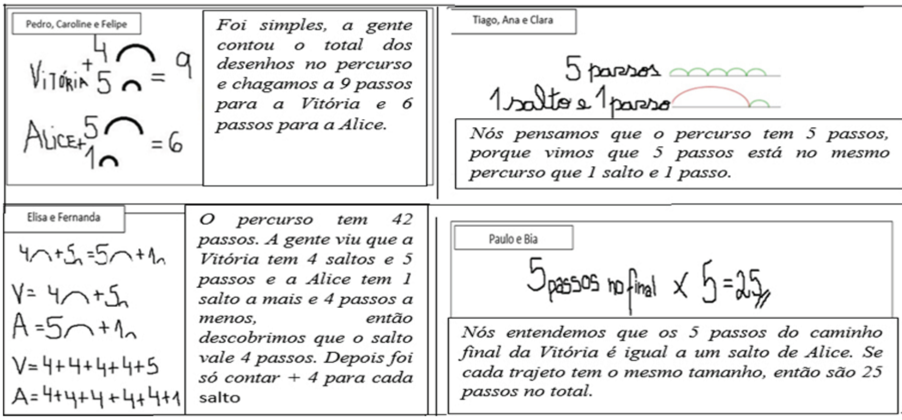
> PF – *Isso poderia ser um erro de imediato?*
>
> C – *É, eu acho.*
>
> PF – *E aí eles desconsiderariam o quê? Qual informação do problema eles iam desconsiderar?*
>
> C – *Que é a mesma quantidade.*
>
> L – *A igualdade do percurso. É a equivalência aqui.* [Apontando para a tarefa]
>
> PF – *E o que muda?*
>
> L – *Que uma terminou com mais passos apenas.*
>
> C – *E a outra com mais saltos. Só isso.*
>
> PF – *E o comprimento era o mesmo. E a gente está chamando a atenção...*
>
> C – *Da igualdade.*
>
> PF – *Sim, da equivalência que existe e que pode ser escrita de formas diferentes, dando o mesmo resultado.*
>
> (Celeste, Kátia e Luciana, D8, 10/09/2018).

Identifica-se, a partir do trabalho das professoras com essa parte da TAP 2, além de um envolvimento coletivo na busca de solução para um impasse identificado por elas como potencialmente emergente em sala de aula (Smith, 2001), uma mobilização, de forma integrada e simultânea, dos diferentes domínios do conhecimento matemático para o ensino (Ball, Thames & Phelps, 2008), em especial no que se refere ao significado de equivalência do sinal de igualdade (SCK); às dificuldades dos estudantes com este conteúdo (KCS); e à forma como fariam intervenções, de modo a contribuir com a superação de tais dificuldades (KCT).

A Figura 12 apresenta respostas dos estudantes à tarefa matemática que está em discussão e, a partir dessas respostas, as professoras são convidadas a analisá-las, de modo a possibilitar que elas passem agora a trabalhar com respostas de estudantes (e não mais antecipações de possíveis dificuldades). As professoras (C), (K) e (L), durante a análise das respostas de estudantes, reconheciam, em algumas das resoluções, os próprios erros que haviam cometido incialmente na resolução da tarefa.

Figura 12

TAP 2: Resoluções Reais e Fictícias de Estudantes (Xxx,2019).



A síntese das análises e das discussões desenvolvidas pelas professoras (C), (K) e (L), do grupo G1, aparece registrada na Figura 13.

Figura 13

Protocolo Apresentado – Análise de Resoluções TAP 2 (Dados da pesquisa – Celeste, Kátia e Luciana, TAP 2, 10/09/2018).

Pedro, Caroline e Felipe	Eles desconsideraram a equivalência entre passos e saltos, realizando a somatória sem comparação. A resolução está incorreta.
Tiago, Ana e Clara	Perceberam a equivalência entre passos e saltos, no entanto, não analisaram o percurso todo. A resolução está incompleta.
Paulo e Bia	Contaram os passos, perceberam o percurso porém não notaram a diferença de um passo ao final do percurso, o que os levou a igualarem passos e pulo. Resolução incompleta.
Elisa e Fernanda	A percepção foi completa, elaboraram uma equação considerando a equivalência, espaço do percurso e comparação entre passos e pulo. Resolução correta.

Embora, por restrições de espaço, não sejam apresentados aqui excertos das evidências do trabalho das professoras do G2, observou-se que os dois grupos consideraram a última resolução correta e, além disso, todas as professoras compreenderam que as meninas chegaram a 21 passos no total e, depois, somaram os percursos. Elas também deram ênfase ao fato de as estudantes Elisa e Fernanda compreenderem o sinal de igualdade com significado de equivalência e encontrarem a equivalência do percurso.

Com isso, sintetizam-se outros resultados parciais, os quais serão agrupados àqueles apresentados na seção anterior, de modo a, na próxima e última seção, apresentar as conclusões e as considerações finais. Nesta etapa da pesquisa, durante o desenvolvimento das TAP 1 e 2, nota-se que as professoras, pouco a pouco, passam (i) a enfatizar a importância de se antecipar as possíveis dificuldades que os estudantes podem apresentar diante das tarefas desafiadoras (como estas que foram propostas); (ii) a propor intervenções que elas podem realizar durante a fase de trabalho dos estudantes; (iii) a reconhecer que, possivelmente, os equívocos que elas cometiam poderiam ser os mesmos dos estudantes e que a forma como se trabalha o conteúdo em questão comumente na escola pode reforçar e manter tais equívocos.

Com isso, destacamos que, logo, não basta os professores "somente" entenderem bem a matemática, eles precisam adquirir a experiência de olhar para o pensamento do aluno, devem (re)orientar suas práticas e crenças para desenvolver e escutar as ideias matemáticas que eles trazem (Kieran et al., 2016).

CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com o intuito de responder neste artigo ao objetivo de *identificar como tarefas de aprendizagem profissional, fundamentadas na prática letiva, contribuem para a mobilização e a ampliação do pensamento algébrico de professores dos anos iniciais, no que se refere aos diferentes significados do sinal de igualdade*, desenvolveu-se uma pesquisa qualitativo-interpretativa, com dados recolhidos em um processo de formação continuada oferecido a seis professoras dos anos iniciais do município de São Paulo. Em consequência dos princípios adotados, a proposta de formação continuada foi arquitetada e desenvolvida em um espaço de trocas e aprendizagens coletivas, espaço esse que permitiu que as professoras estudassem, compartilhassem experiências, discutissem e refletissem a respeito de suas próprias práticas, tomando como tema matemático os diferentes significados do sinal de igualdade e o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Conclui-se, então, a partir das análises desenvolvidas nas seções anteriores, em especial em decorrência do trabalho com as TAP ao longo do processo formativo, que as professoras passaram a compreender os diferentes significados do sinal de igualdade, a antecipar as respostas dos estudantes, a analisar resoluções de estudantes (fictícias e reais). Há de se destacar ainda que, ao resolverem por si mesmas as tarefas matemáticas propostas aos estudantes, as próprias professoras reconheceram algumas limitações em seus próprios conhecimentos matemáticos sobre o tema, o que, segundo elas, pode dificultar e influenciar os equívocos e a compreensão dos estudantes na tarefa de reconhecer e atribuir outros significados ao sinal de igualdade, para além do significado operacional.

Entende-se que as TAP, por si sós, não se constituem como possibilidades de mobilizar e ampliar os conhecimentos matemáticos dos professores para o ensino de matemática nos anos iniciais. Não há uma visão ingênua de que tal aprimoramento e aprofundamento acerca dos conhecimentos profissionais dos professores será levado a cabo apenas com a proposta de "boas" TAP. No entanto, os dados obtidos neste estudo apontam para as potencialidades do trabalho com as TAP e para a importância de promover a reflexão do professor que trabalha com elas, complementando-se tal potencialidade com questionamentos do formador e com as discussões desencadeadas entre todos os participantes do processo formativo.

Afirma-se ainda, a partir das experiências desta pesquisa, que é preciso considerar (novos) contextos de formação continuada para professoras que ensinam matemática, como este que aqui foi apresentado, de modo que os professores possam continuar a aprender no decorrer de suas práticas letivas. Em especial, esta pesquisa possibilitou o trabalho dentro da unidade temática/eixo "Álgebra", que integra a BNCC (Brasil, 2017) e o novo Currículo da Cidade (PMSP, 2017) de São Paulo, discutindo os diferentes significados do sinal de igualdade.

Não era a proposta deste artigo explorar a prática do professor e suas relações com as aprendizagens profissionais desencadeadas a partir do processo de formação que foi desenvolvido. Isso é explorado em Barbosa, Pazuch e Ribeiro (2020) e poderá complementar as possibilidades e os avanços até aqui alcançados. Finaliza-se, apontando lacunas que precisam ser investigadas com maior foco e profundidade em outros estudos, tais como: o papel do conhecimento do formador de professores de/que ensinam matemática; se e em que medida as interações discursivas contribuem para a aprendizagem do professor, dentre outros. Tais lacunas precisam ser exploradas para além do campo da Álgebra e do Pensamento Algébrico.

DECLARAÇÃO DE CONTRIBUIÇÕES

LCSB elaborou o material, desenvolveu, coletou e analisou os dados e AJR e VP acompanharam o todo o processo e contribuíram com direcionamentos e análises. Todos os autores discutiram os resultados e contribuíram para a versão final do manuscrito.

DECLARAÇÃO DE DISPONIBILIDADE DE DADOS

Os dados desta pesquisa serão disponibilizados pelos autores mediante solicitação razoável.

REFERÊNCIAS

Ball, D. L., Ben-Peretz, M., & Cohen, R. B. (2014). Records of practice and the development of collective professional knowledge. *British Journal of Educational Studies*, *62*(3), 317-335.

Ball, D. L. & Cohen, D. K. (1999). Developing practice, developing practitioners: toward a practice-based theory of professional education. In: Sykes, G. & Darling-Hammond, L. (Org.). *Teaching as the learning profession: handbook of policy and practice.* San Francisco: Jossey Bass. 3-32.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education*, Thousand Oaks, *59*, 389-407.

Barboza, L. C. S. (2019). *Conhecimento dos professores dos anos iniciais e o sinal de igualdade: Uma investigação com tarefas de aprendizagem profissional.* (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal do ABC, Brasil.

Barboza, L. C. S., Pazuch, V., & Ribeiro, A. J. (2020, submetido). *O uso de Tarefas de Aprendizagem Profissional para a construção de conhecimentos em ações coletivas de professoras que ensinam matemática nos anos iniciais*.

Behr, M., Erlwagner, S., & Nichols, E. (1980). How children view the equal sign. *Mathematics Teaching, 92*, 13-18.

Blanton, M. & Kaput, J. (2008). Building disctrict capacity for teacher development in algebraic reasoning. In: Kaput, J., Carraher, D., & M. Blanton (Org.). *Algebra in the early grades.* Nova Iorque: Lawrence Erlbaum Associates. 133-160.

Brasil. (2017). *Base Nacional Comum Curricular: Matemática*. Brasília: MEC/SFE.

Britt, M. S. & Irwin, K. C. (13 October 2011). Algebraic thinking with and without algebraic representation: a three-year longitudinal study. *ZDM*, [s.l.], *40*(1), 39-53.

Canavarro, A. P. (2007). O pensamento algébrico na aprendizagem da matemática nos primeiros anos. *Quadrante*, *16*(2), 81-118.

D'Ambrósio, U. (2004). Prefácio. In: Borba, M. C. & Araújo, J. L. (Org.). *Pesquisa qualitativa em educação matemática.* Belo Horizonte: Autêntica. 11-23.

Esteban, M. P. S. (2010). *Pesquisa qualitativa em educação: fundamentos e tradições*. 19. ed. Tradução de Miguel Cabrera. Porto Alegre: AMGH.

Fiorentini, D. & Crecci, V. M. (janeiro/abril 2017). Metassíntese de pesquisas sobre conhecimentos/saberes na formação continuada de professores que ensinam matemática. *Zetetiké*, Campinas, *25*(1), 164-185.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 317-326.

Kieran, C. et al. (2016). *Early algebra research into its nature, its learning, its teaching*. Hamburg: Springer International Publishing.

Molina, M. (2011). Integración del pensamiento algebraico en la educación básica: un experimento de enseñanza con alumnos de 8-9 años. In: *Atas del Encontro de Investigacao em Educação Matemática* (pp. 27-51). Póvoa do Varzim.
Opfer, V. D. & Pedder, D. (2011, September). Conceptualizing teacher professional learning. *Review of Educational Research*, [s.l.], *81*(3), 376-407.
Ponte, J. P. & Branco, N. (2013, outubro/novembro). Pensamento algébrico na formação inicial de professores. *Educar em Revista*, 1(40), 39-53.
Ponte, J. P., Branco, N., & Matos A. (2009). *A álgebra no ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC.
Ponte, J. P. & Quaresma, M. (2 February 2016). Teachers' professional practice conducting mathematical discussions. Educational Studies in Mathematics, [s.l.], *93*(1), 51-66.
Ponte, J. P. et al. (2008). Perspectivas teóricas no estudo das práticas profissionais dos professores de matemática. In: *Anais do Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 267-279), Lisboa: SPIEM.
Ribeiro, A. J. & Cury, H. N. (2015). *Álgebra para a formação do professor*. Belo Horizonte: Autêntica. 128 p. cap. 1 e 4. (Coleção Tendências em Educação Matemática).
Ribeiro, A. J., & Ponte, J. P. (2019). Professional learning opportunities in a practice-based teacher education program about the concept of function. *Acta Scientiae*, 21, 49-74.
São Paulo (Cidade). (2017). *Currículo da Cidade: ensino fundamental – matemática.* São Paulo: SME/Secretaria Municipal de Educação, PMSP.
Serrazina, M. L. (2013). O programa de formação contínua em matemática para professores do 1º ciclo e a melhoria do ensino da matemática. *Da Investigação às Práticas*, Lisboa, *3*(2), 75-97.
Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, Thousand Oaks, *15*(2), 4-14.
Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: foundations of the new reform. *Harvard Educational Review,* Cambridge, (57), 1-22.
Silver, E. A. et al. (2007). Where is the mathematics? Examining teachers' mathematical learning opportunities in practice-based professional learning tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education*, Springer Netherlands, *10*(4), 261-277.
Skovsmose, O. (2005). *Travelling trough education: uncertainty, mathematics, responsability*. Rotterdam: Sense Publishers.
Smith, M. S. (2001). *Practice-based professional development for teachers of mathematics.* Virgínia: NCTM.
Stacey, K. E. & Macgregor, M. (1997). Ideas about symbolism that students bring to algebra. *The Mathematics Teacher*, 110-113.
Trivilin, L. R. & Ribeiro, A. J. (2015). Conhecimento matemático para o ensino de diferentes significados do sinal de igualdade: um estudo desenvolvido com professores dos anos iniciais do ensino fundamental. *Bolema, 29*(51), 38-59.
Webster-Wright, A. (2009, June). Reframing professional development through understanding authentic professional learning. *Review of Educational Research*, [s.l.], *79*(2), 702-739.