ISSN: 2178-7727
DOI: 10.17648/acta.scientiae.v21iss2id5019

Situación de Aprendizaje para la Serie Trigonométrica de Fourier desde la Teoría Socioepistemológica

Rosa María Farfán Márquez[1]
Fabián W. Romero Fonseca[1]

[1] Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav-IPN), Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Departamento de Matemática Educativa, Ciudad de México, Ciudad de México, México

Recebido para publicação em 26 jan. 2019. Aceito, após revisão, em 17 mar. 2019.

RESUMEN

El objetivo de este artículo es mostrar una propuesta didáctica que propicie la significación de la Serie Trigonométrica de Fourier a través de una situación de aprendizaje, cuyo fundamento se basa en la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, en investigaciones donde se ha problematizado este saber. La Serie Trigonométrica de Fourier es un tema complejo para su aprendizaje en el nivel superior, donde por lo general se mecaniza el proceso sin comprender del todo su funcionamiento y características. Se quiere comprobar que con actividades que apoyen la relación entre lo algebraico y lo geométrico, haciendo uso de GeoGebra – software de geometría dinámica – como variable de control, se puede significar a la serie y su convergencia mediante un contexto físico-geométrico.

Palabras clave: Serie Trigonométrica de Fourier, Convergencia, Socioepistemología, Situación de Aprendizaje.

Learning Situation for the Trigonometric Fourier Series from a Socio-epistemological Stand Point

ABSTRACT

The aim of this article is to show a didactic proposal that favors the signification of the Trigonometric Fourier Series through a learning situation, based on the Socio-epistemological Theory of Mathematics Education, on research where this knowledge has been problematized. The Fourier Trigonometric Series is a complex topic for learning at the higher level, where the process is usually mechanized without fully understanding its operation and characteristics. We want to verify that with activities that support the relationship between algebra and geometry, making use of GeoGebra – dynamic geometry software – as a control variable, the series and its convergence can be signified using a physical-geometric context.

Keywords: Trigonometric Fourier Series, Convergence, Socio-epistemology, Learning Situation.

Autor correspondente: Rosa María Farfán Márquez. E-mail: rfarfan@cinvestav.mx

INTRODUCCIÓN

Uno de los propósitos fundamentales de la Matemática Educativa es la mejora de los procesos de aprendizaje. Sin embargo, existe la continua preocupación por llevar los resultados de investigación a las aulas. Ante esta inquietud el diseño de situaciones de aprendizaje, fundamentadas en la investigación, ha sido una herramienta idónea para contribuir en los procesos de escolarización.

Por otra parte, los saberes matemáticos no son entes "estáticos", estos han evolucionado junto al ser humano, afectados por los entornos socio-culturales desde su surgimiento hasta su llegada a los sistemas de enseñanza. Esto provoca que las consideraciones de orden epistemológico jueguen un rol sumamente importante para el diseño de situaciones de intervención didáctica, pues al comprender las condiciones de su surgimiento podremos realizar mejores articulaciones entre los saberes para el aula (Farfán & Romero, 2016).

En el caso de la serie Trigonométrica de Fourier (STF), además de ser un tema fundamental en cursos avanzados de ingeniería (Muro, Camarena & Flores, 2007), históricamente fue punto de quiebre para el desarrollo del Análisis Matemático y parte importante para la evolución del concepto de función. Debido a esto, numerosas investigaciones se han preocupado por diversos aspectos relacionadas con la serie:[1] El problema de la cuerda vibrante como antecedente de la STF (Farfán, 2012; Ulín, 1984), la determinación del estado estacionario como fenomenología intrínseca a la serie (Farfán, 2003, 2012; Marmolejo, 2006); y las nociones físicas y matemáticas relacionados con la STF como lo son la actividad de modelación (Morales, 2013; Morales & Farfán, 2004), la noción de calor (Morales, 2010), la visualización matemática de la STF (Rodríguez, 2010; Rodríguez & Popoca, 2010), la hipótesis de periodicidad (Vásquez, 2006) y la convergencia de la STF (Moreno, 1999).

Aunado a ello, Montiel (2011) coloca a la STF como el estadio más avanzado de las funciones trigonométricas, en el desarrollo del pensamiento trigonométrico, donde las funciones seno y coseno deben estar construidas como objeto en los estudiantes, es decir, que deben ser susceptibles de manipulación.

Es así como este escrito se preocupa por presentar con detalle una situación de aprendizaje para la STF, cuya preocupación inicial fue significar las nociones matemáticas alrededor de la serie. El fundamento de dicho diseño se basa en los resultados de tres décadas de investigación socioepistemológica. Si bien es cierto, se espera contribuir a la problemática educativa respecto del aprendizaje de la STF, sabemos que con un diseño no se resolverán todos los problemas que esta conlleva, pero si ofrece un aporte importante en este sentido.

[1] Un análisis del estado del arte respecto de las series de Fourier lo puede encontrar en (Romero & Farfán, 2016).

ALGUNOS ELEMENTOS DE LA SOCIOEPISTEMOLOGÍA

La Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME) considera al conocimiento matemático como un emergente de las dinámicas sociales, donde "el punto de partida para la construcción de saberes es la actividad normada por emergentes de naturaleza social que denominamos *prácticas sociales*" (Cantoral, 2013, p.48). Es decir, el conocimiento matemático se genera socialmente a través de prácticas situadas, donde la noción de práctica social es la reguladora de toda actividad humana, esto es, la práctica social no es lo que las personas hacen, es lo que los hace hacer lo que hacen, aun cuando no sean conscientes de sus propias acciones (Cantoral & Farfán, 2004).

Por otra parte, el conocimiento matemático fue socializado en entornos no escolares, por lo que su introducción en los sistemas de enseñanza provoca que el conocimiento cambie su estructura y su funcionalidad (Cantoral, Moreno-Durazo & Caballero-Pérez, 2018); cuando el conocimiento llega a la escuela se producen diferentes discursos que cambian la organización y funcionamiento del conocimiento matemático, la TSME los ha llamado con el término discurso Matemático Escolar (dME) (Cantoral, 2013).

> Dada la naturaleza del dME como ente inmóvil, carente de significados y utilitario que propicia la exclusión de la construcción social del conocimiento se pretende proveer una epistemología – la socioepistemología – que posibilite el rediseño del dME a partir de la problematización del saber matemático con miras a favorecer el aprendizaje de este saber. (Farfán & Romero, 2016, p.118)

Es importante hacer un estudio sistémico del dME para conocer el rol que juega en el sistema de enseñanza, así se podrá proponer su rediseño considerando que es el que aprende quien debe construir su propio conocimiento haciendo funcionar al saber, es decir, el saber es un medio para la toma de decisiones en la resolución del problema planteado en una *situación de aprendizaje*. Pero ¿cómo asegurar que se genera el ambiente propicio para esto?

Según Cantoral (2013) no siempre se están en situación de aprender. El conflicto cognitivo es una manera de propiciarlo, proponiendo una situación problema que enfrente al sujeto a un escenario en el que deba poner en juego los saberes que se requieren a partir de un desequilibrio cognitivo (Piaget, 2009). Sin embargo, esta postura es compartida por diferentes enfoques teóricos en nuestra disciplina, entonces ¿qué es lo que caracteriza a una situación de aprendizaje socioepistemológica? Según Reyes-Gasperini (2016), la situación de aprendizaje debe favorecer una evolución pragmática del conocimiento matemático (saber matemático escolar), poniendo en juego el saber matemático mediante el contexto de significancia (Figura 1).

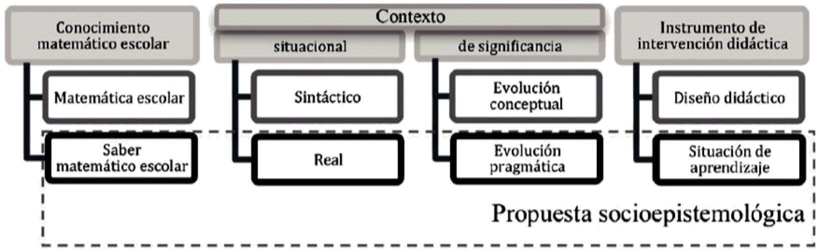


Figura 1. Situación de aprendizaje (Reyes-Gasperini, 2016, p.61).

Se hace una diferencia entre el contexto situacional y el contexto de significancia. El primero se refiere a la manera de contextualizar la tarea, que puede ser a través de un entorno o medio conocido, pero la estructura matemática no se ve afectada al prescindir de él o alterarlo (contexto sintáctico), otra forma de contextualizar es con un escenario intrínseco a la tarea que suscita una situación que requiere del saber matemático para dar respuesta, dotando al conocimiento matemático de significado a través de su uso (contexto real). Por su parte, el contexto de significancia es la manera de contextualizar la construcción del conocimiento matemático, que puede ser mediante la algoritmia o consecuencia de un cambio de representación – evolución conceptual –, entre otros; o fruto de las prácticas y la significación mediante el uso – evolución pragmática (Reyes-Gasperini, 2016).

Esta evolución pragmática antecede y acompaña a la evolución conceptual del conocimiento matemático (matemática escolar). Por tanto, la situación de aprendizaje se convierte en una herramienta didáctica para la construcción social del conocimiento matemático, en tanto promueve la significación de los objetos matemáticos mediante el uso.

LA INGENIERÍA DIDÁCTICA

La Ingeniería Didáctica (ID) funciona como una guía para el diseño de situaciones para la aplicación en el aula, así como una metodología de investigación que guía las experimentaciones en clase (Farfán, 2012; Artigue, 2014, 2015). La ID surge con la ambición de mejorar la comprensión y el funcionamiento de los sistemas didácticos, poniendo especial atención en las limitaciones y variables que actúan sobre el sistema, para esto se pone especial atención a realizaciones didácticas controladas, las cuales cuentan con un rol destacado en la metodología de la ID para validar los diseños de situación creados (Artigue, 2014).

La ID cuenta con cuatro fases, las cuales corresponden a su esquema experimental de trabajo: análisis preliminar; diseño de situación y análisis a priori; puesta en escena, observación y toma de datos; análisis a posteriori y validación interna. Este escrito pone especial atención al segundo momento: el diseño de la situación y análisis a priori.

El análisis preliminar

Las investigaciones enmarcadas en la TSME analizan el papel de la práctica social en la constitución del saber de manera sistémica, se consideran cuatro componentes fundamentales acerca del conocimiento: su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural (pues el conocimiento es una construcción social y cultural), los planos de lo cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza (Cantoral & Farfán, 2003).[2]

La integración entre estas cuatro componentes es lo que en TSME se denomina una *problematización del saber matemático*, el cual radica en "hacer del saber un problema a través de sus cuatro dimensiones, un objeto de análisis, localizando y analizando su uso y razón de ser, o sea, estudiar la naturaleza del saber" (Reyes-Gasperini, 2016, p.52); es gracias a la problematización del saber que la metodología de la ID se robustece.

Para esta investigación, en dicho análisis se da cuenta de los resultados obtenidos por un grupo de investigaciones acerca de las nociones alrededor de la STF, su contexto histórico-cultural de origen, los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza y los procesos cognitivos asociados a tareas en las que se pone en funcionamiento este conocimiento, un análisis detallado lo puede encontrar en (Romero, 2016; Farfán & Romero, 2017).

El diseño de la situación y análisis a priori

A partir del análisis preliminar se diseñan situaciones de aprendizaje, para esto la Ingeniería Didáctica supone la selección de diversos aspectos, actuando sobre distintas variables del sistema, que son pertinentes al problema planteado. Los tipos de variables son:

- Macro-didácticas o globales: conciernen a la organización global de la ingeniería. Tiene que ver con decisiones como recurrir a herramientas informáticas, conocimientos previos, predominio de algún marco de referencia por sobre otro (numérico, gráfico, algebraico, analítico), sistema educativo, políticas institucionales, currículum, entre otras.
- Micro-didácticas o locales: concernientes a la organización de la situación de aprendizaje, es decir, supone la descripción del proceso que se ha de seguir (problemas específicos, tamaño de los grupos de trabajo, tiempos de discusión, entre otros). Además, dentro de la situación se deben realizar los tránsitos en los diferentes contextos: numérico, algebraico y geométrico, para así detectar las condiciones que permitan un funcionamiento más óptimo.

Es importante resaltar que, aunque la selección de las variables globales se suele presentar separada de las locales, no son independientes entre sí, ya que las concepciones

[2] Es importante recalcar que la ID, desde sus orígenes en la escuela francesa de didáctica de las matemáticas, considera solamente tres dimensiones del saber: epistemológica, cognitiva y didáctica. Es en la TSME donde se agrega la dimensión sociocultural, lo que provoca grandes cambios en el estudio de las otras dimensiones.

generales deben permitir el devenir de las locales, las cuales están directamente ligadas al diseño de la situación de aprendizaje.

Por tanto, el análisis a priori comprende una descripción de las selecciones locales relacionándolas con las globales y las características de la situación de aprendizaje, posteriormente se analiza lo que podría estar en juego durante el desarrollo de las tareas: posibilidades de acción, de selección, de decisión, de control y de validación de las que dispone el estudiante; por lo que se busca predecir que los comportamientos esperados, si intervienen, sean resultado de la puesta en práctica del conocimiento contemplado para el aprendizaje y que la tarea intentaba desarrollar.

Luego se hace la experimentación, observación y toma de datos, y con base en esto el análisis a posteriori, con el objetivo de validar el diseño de intervención. Sin embargo, como se mencionó antes, en este artículo sólo se reporta lo concerniente al diseño de la situación y el análisis a priori.

LA SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

Con base en el análisis preliminar, el cual se encuentra en (Romero, 2016; Farfán y Romero, 2017), se establecen las variables macro-didácticas que guiarán el comportamiento general de la situación de aprendizaje, estas son:

- Carácter funcional: La STF se debe presentar como una herramienta de *predicción* al *modelar* e *interpretar* ciertos fenómenos cercanos al sujeto (individual o colectivo), reconociendo a la *Prædiciere*[3] como la práctica social que norma su construcción.
- Racionalidad contextual diversa: Se considera la evolución de lo trigonométrico, de la función a la serie, lo cual permitirá la emergencia de argumentaciones en el contexto de quien aprende, ya que se debe resignificar a la función trigonométrica para que surja la serie trigonométrica a partir del estudio de la convergencia.
- Validación de saberes: Detrás de la STF existe diversidad de argumentaciones (físicas, geométricas, analíticas y algebraicas), por lo que se debe considerar esta diversidad a la hora de construir este conocimiento.
- Pluralidad de prácticas de referencia para la resignificación: La construcción de la STF requiere del *modelaje* e *interpretación* de un fenómeno estacionario de variación periódica y acotada, para el cual la STF se convierta en una herramienta de *predicción*. A partir de esto se debe identificar su interacción con diversos contextos.

Ahora bien, la población de destino para la cual fue diseñada la situación son estudiantes de la Licenciatura en Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional

[3] Un análisis detallado del Prædiciere como práctica social lo encuentra en (Cantoral, 2013).

en México. Dado que el ambiente fenomenológico en el que surgió la serie de Fourier – la propagación del calor – es cognitivamente más complejo que la serie misma (Farfán, 2012), no es un ambiente adecuado como contexto de significación para la serie. Se debe buscar un contexto de significación cercano a la población de destino, para lo cual se propone el modelaje de un fenómeno de tipo físico-geométrico: la superposición de movimientos circulares.

Este diseño, hasta la fecha, ha sido piloteado en repetidas ocasiones, la primera con un grupo de estudiantes del programa de Maestría en Matemática Educativa del Cinvestav-IPN con el fin de revisar redacción, claridad de las ideas, tiempo de ejecución, entre otros factores; la segunda vez se implementó en un taller con profesores de nivel medio superior y superior, buscando revisar si las correcciones hechas a partir del primer pilotaje fueron acertadas. Un pilotaje más reciente fue realizado con tres estudiantes egresadas de la Licenciatura en Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional en México, para tener un punto de referencia de la población de destino. Si bien, el objetivo de un pilotaje no es analizar las producciones de los participantes – para esto es la fase de análisis a posteriori de la ID – en las secciones siguientes se realizan algunas referencias a los mismos, para validar de alguna manera la pertinencia de la propuesta.

La situación se organiza a partir de los dos momentos de construcción social de la STF propuestos por Romero (2016): 1. comprender que una serie trigonométrica puede converger a una función (Tareas de la 1 a la 5) y 2. dada una función que se puede representar en serie trigonométrica, determinar los coeficientes de la serie (Tarea 6). A continuación, se presentan las Tarea 1, 2, 4 y 6, donde se detalla la intensión de cada inciso.[4]

Introducción: El Movimiento de los Planetas

Se busca con esta parte que el estudiante se familiarice con el modelo del movimiento planetario propuesto por los astrónomos alejandrinos.[5] Este consistía en una circunferencia centrada en la Tierra y sobre su perímetro se mueve un punto, este punto es el centro de otra circunferencia, y sobre el perímetro de esta se mueve otro punto, el cual es centro de otra circunferencia y así sucesivamente, todos los puntos se mueven con velocidad angular uniforme y en sentido antihorario. A este modelo del movimiento se le conoce con el nombre de superposición de movimientos circulares o epiciclos (Figura 2).[6]

[4] La situación completa la puede encontrar en el libro de GeoGebra: https://ggbm.at/byc8hxdv.

[5] Cabe resaltar que para la época el Sol y la Luna eran considerados planetas, por lo que durante todas las tareas cuando se ha referencia a los planetas se está considerando también al Sol y la Luna.

[6] Para tener referencia de este modelo y ampliar la introducción se puede revisar (Calles, Yépez & Peralta, 2003).

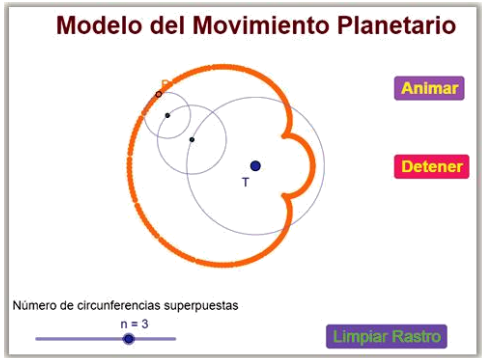


Figura 2. Applet de introducción a la situación de aprendizaje (https://ggbm.at/yGBB3pVF).

Aquí, y para todo el diseño, los applets de GeoGebra utilizados funcionan como variable de control para promover una comprensión más profunda del fenómeno. Esto es necesario a partir del análisis preliminar (Farfán & Romero, 2017), ya que la primera experiencia sensible no es suficiente para modelar los fenómenos de estado estacionario, lo que requiere de una comprensión más profunda de los mismos (Farfán, 2012).

A continuación, se presentan algunas Tareas de las que componen la situación de aprendizaje, para analizar el tipo de preguntas que se proponen, así como la ruta a seguir, partir de una profunda comprensión cualitativa del fenómeno hacia su matematización, donde se debe vigilar la coherencia entre el fenómeno físico y la matemática involucrada, tal como lo hizo Fourier ante el problema de la propagación del calor.

Tarea #1: Explicando el Movimiento de los Planetas

El objetivo de esta tarea es *caracterizar el comportamiento del sistema de forma cualitativa, lo que permitirá una comprensión más profunda del fenómeno y no sólo aquello que detectan los sentidos a simple vista*. Esta Tarea se divide en dos partes, la primera (Figura 3) procura comprender por qué el modelo de los alejandrinos permite explicar aquello que el modelo griego no permitía. Se busca propiciar una comprensión profunda del sistema, así como Fourier conocía el comportamiento del fenómeno de propagación del calor a través de la empírea antes de proponer su modelo matemático del fenómeno (Farfán & Romero, 2017).

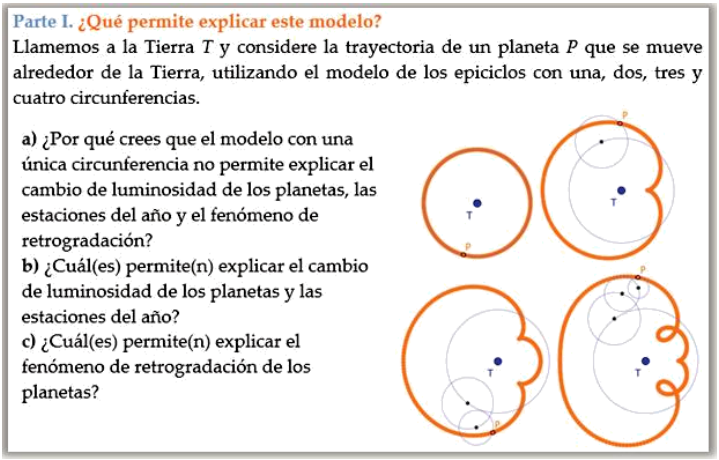


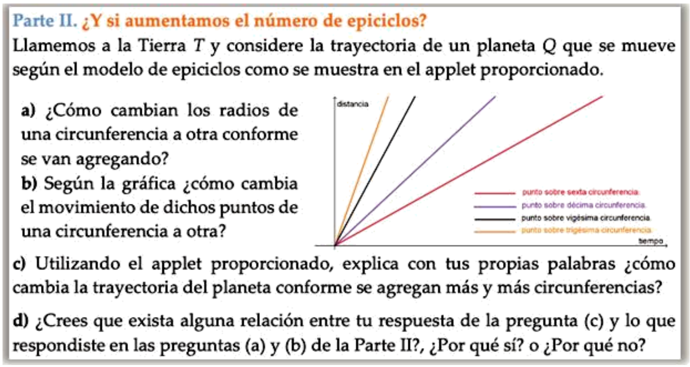
Figura 3. Tarea #1 – Parte I, incisos *a*, *b* y *c* de la situación de aprendizaje.[7]

Se espera que el estudiante relacione el cambio de luminosidad y las estaciones del año con la distancia que hay entre *T* y *P*, por tanto, el modelo de una circunferencia no permite explicar estos fenómenos ya que esta distancia nunca cambia. Respecto del fenómeno de retrogradación, su explicación estará en los bucles que se generan en el modelo con 4 circunferencias.

A partir del pilotaje realizado y varias puestas en escena no controladas notamos que estas preguntas confrontan al estudiante, pues se veían obligados no solo a decir lo que sucede, sino a explicar las causas de esos comportamientos, lo que provocó una demanda cognitiva, más allá de lo que la percepción les permitía observar en las imágenes de manera inicial.

La segunda parte de esta tarea busca, con apoyo de un applet (https://ggbm.at/d3CN5DT8), vislumbrar la noción de estabilidad del sistema, para esto se permite la posibilidad en el applet de aumentar hasta treinta el número de circunferencias y así analizar los cambios que se dan en el comportamiento del sistema.

[7] El cambio de luminosidad se refiere al cambio de brillo de los planetas, en la época de los alejandrinos se creía que esto se debía al cambio de la distancia entre la Tierra y el planeta. Esta misma explicación se daba para las estaciones del año, recuerde que en esa época el Sol era considerado un planeta. El fenómeno de retrogradación se refiere a una breve interrupción en el movimiento de algunos planetas durante breves intervalos, donde el movimiento se da en sentido contrario al movimiento habitual.



Parte II. ¿Y si aumentamos el número de epiciclos?

Llamemos a la Tierra *T* y considere la trayectoria de un planeta *Q* que se mueve según el modelo de epiciclos como se muestra en el applet proporcionado.

a) ¿Cómo cambian los radios de una circunferencia a otra conforme se van agregando?

b) Según la gráfica ¿cómo cambia el movimiento de dichos puntos de una circunferencia a otra?

c) Utilizando el applet proporcionado, explica con tus propias palabras ¿cómo cambia la trayectoria del planeta conforme se agregan más y más circunferencias?

d) ¿Crees que exista alguna relación entre tu respuesta de la pregunta (c) y lo que respondiste en las preguntas (a) y (b) de la Parte II?, ¿Por qué sí? o ¿Por qué no?

Figura 4. Tarea #1 – Parte II, incisos del *a* al *d* de la situación de aprendizaje.

El inciso *a* (Figura 4) busca concluir que los radios de las circunferencias tienden a cero en forma cualitativa, para esto los estudiantes podría usar frases como "disminuyen", "se hacen más pequeños", entre otras. En el inciso *b* (Figura 4), la gráfica proporcionada muestra la distancia recorrida en función el tiempo para cada punto sobre las circunferencias sexta, décima, vigésima y trigésima; a través del estudio del cambio se pretende que los estudiantes infieran que la velocidad de los puntos sobre cada circunferencia sigue aumentando sin cota, para esto podría utilizar frases como "va más rápido", "en el mismo tiempo recorre cada vez más distancia", entre otras.

Según la prueba piloto, es posible que para la pregunta *b* los estudiantes consideren que la gráfica se refiere a la trayectoria del planeta al agregar circunferencias, cuando en realidad se refiere al movimiento de cada punto sobre cada circunferencia, se debe hacer esta aclaración.

Para el inciso *c* (Figura 4) la intención es que el estudiante identifique el carácter estable del sistema en forma cualitativa, esto a través de frases como "cuando hay muchas circunferencias casi no cambia la forma de la trayectoria conforme se agregan más", "tiende a parecerse a una…". Para esto se espera analice el cambio en la forma de la trayectoria conforme se agregan cada vez más circunferencias.

En el pilotaje y las puestas en escena los participantes lograron identificar el carácter estable del fenómeno. Sin embargo, expresaban que "algo extraño pasaba con la parte izquierda de la trayectoria", esto es importante, pues no toda la trayectoria es estable y esto dará significado, en las tareas posteriores a las nociones de convergencia y divergencia de series.

El inciso *d* (Figura 4) busca confrontar el cómo cambia la trayectoria del planeta (estabilidad) con lo que provoca el cambio. Sin embargo, determinar cómo cambia y qué produce el cambio es una tarea cognitivamente muy compleja para los fenómenos de determinación del estado estacionario (Farfán, 2012; Romero, 2016). Se espera que, con ayuda del docente y a partir de las ideas planteadas por los estudiantes, se acerquen a la idea de que al tender los radios de las circunferencias a cero y la velocidad de movimiento del punto al infinito esto provoca que se logre la estabilidad; es decir, agregar una circunferencia muy pequeña y un punto sobre esta que se mueve muy rápido no provoca cambios significativos en el sistema en general.

Tarea #2: Modelando el Movimiento de los Planetas

Esta tarea tiene como objetivo *significar la convergencia de series trigonométricas mediante la estabilidad de la trayectoria del planeta, caracterizándola mediante el límite de la sucesión de sumas parciales*. Se tiene como expectativa, que al igual que en el trabajo de Fourier sobre propagación del calor, el carácter estable del fenómeno provoque la necesidad de hablar de la convergencia de series trigonométricas (Farfán, 2012). En la Figura 5, se observa la situación planteada.

Tarea #2. Modelando el movimiento de los planetas.

Llamemos a la Tierra T y consideremos un cierto planeta P cuya órbita corresponde a una superposición de movimientos circulares en torno de T, el modelo se comporta de la manera siguiente:

- Los radios de las circunferencias primera, segunda, tercera, … son respectivamente $\frac{4}{\pi}$, $\frac{4}{3\pi}$, $\frac{4}{5\pi}$, …
- La velocidad angular, en radianes por mes, de los puntos sobre las circunferencias primera, segunda, tercera, . . . son respectivamente 1, 3, 5, …
- Cuando el tiempo es $t = 0$, el ángulo en posición estándar del punto con respecto al centro de la circunferencia es nulo.

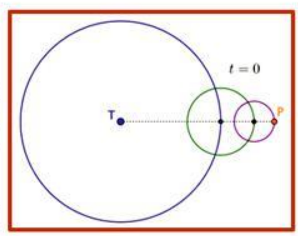


Figura 5. Situación planteada en la Tarea #2 de la situación de aprendizaje.

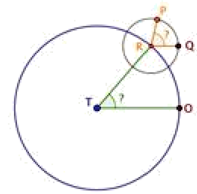
Esta tarea está dividida en dos partes, la primera busca que el estudiante comprenda cómo se comporta el sistema, y la relación que guarda con los datos suministrados por la situación planteada. Para empezar, en el inciso *a* (Figura 6) se pretende reconocer el comportamiento del movimiento de los puntos sobre cada circunferencia.

Parte I. Comprendiendo el modelo.

Con base en la situación planteada, realice lo que se le solicita a continuación:

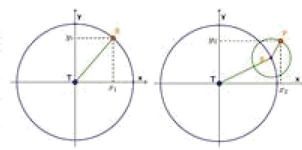
a) Considere el modelo con dos circunferencias, como en la imagen adjunta. Complete la siguiente tabla para determinar la medida (en radianes) de los ángulos $\angle OTR$ y $\angle QRP$, después de t meses.

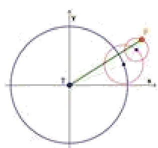
Meses	Medida de $\angle OTR$ (en radianes)	Medida de $\angle QRP$ (en radianes)
0		
1		
2		
3		
⋮	⋮	⋮
t		



b) Con el mismo modelo utilizando dos circunferencias. Realice dos dibujos a escala para los valores de $t = \frac{\pi}{12}$ y $t = \frac{5\pi}{8}$, explicando los pasos de tus construcciones. Utilice su construcción para determinar la distancia de P a T en esos instantes.

c) Continuando con el modelo utilizando dos circunferencias y agregando un sistema de coordenadas cuyo origen sea T. Determine las coordenadas (x_1, y_1) de R y las coordenadas (x_2, y_2) de P, para cualquier valor de t. Determine además la distancia de P a T, para cualquier t.





d) Considere ahora el modelo utilizando tres circunferencias. Determine una fórmula que permita calcular la distancia del planeta P a la Tierra, para cualquier valor de tiempo t.

Figura 6. Tarea #2 – Parte I, incisos del *a* al *d* de la situación de aprendizaje.

Para esta pregunta es probable que la idea de velocidad angular genere dificultades, esto se evidenció en el pilotaje y las diferentes puestas en escena; debido a que la concepción de radian en sí misma provoca dificultades según se ha reportado en distintas investigaciones (Akkoc, 2008; Moore, 2009). El inciso *b* (Figura 6) pretende verificar la comprensión del comportamiento del sistema, utilizando un modelo estático del mismo (para un tiempo determinado). La intención es que antes de buscar un procedimiento algebraico para determinar la distancia de *P* a *T* se realice el dibujo escala y se determine dicha distancia sobre el mismo dibujo.

Los incisos *c* y *d* (Figura 6) buscan construir las primeras tres sumas parciales de dos series trigonométricas, pero con un significado asociado al fenómeno – las coordenadas del planeta – que permite determinar la distancia del planeta a la Tierra. Se espera que los estudiantes recurran a dibujar triángulos rectángulos sobre las figuras proporcionadas para identificar las razones trigonométricas involucradas, aunque para hacer la generalización a cualquier valor del tiempo se requiera que la función trigonométrica esté construida previamente (Montiel, 2011).

Para la segunda parte de esta tarea se proporciona un applet (https://ggbm.at/jdBYwe8E), con el fin de visualizar la estabilidad del sistema. A partir de manipular el número de circunferencias se podrá analizar el comportamiento del sistema, al estudiar cómo cambia la trayectoria del planeta.

Parte II. ¿Y si aumentamos el número de epiciclos?

A partir de lo observado en el applet proporcionado responde:

a) ¿Cómo cambia la trayectoria del planeta conforme se agregan más y más circunferencias?

b) ¿Cómo cambia la distancia del planeta P a la Tierra conforme se agregan más y más circunferencias para $t = \frac{\pi}{12}$, $t = \frac{3\pi}{4}$, $t = \pi$ y $t = 2\pi$? ¿Qué podría decir en general para cada instante de tiempo t?

c) Considere ahora el modelo utilizando n circunferencias. Determine una fórmula que le permita calcular la distancia del planeta P a la Tierra, para cualquier valor de tiempo t.

d) A partir de sus respuestas a las preguntas (a) y (b) ¿cómo es el comportamiento de la fórmula obtenida en la pregunta (c)? Explique.

Figura 7. Tarea #2 – Parte II, incisos del *a* al *d* de la situación de aprendizaje.

En el inciso *a* (Figura 7) se tiene como expectativa que el estudiante identifique que la trayectoria del planeta se estabiliza conforme se agregan más circunferencias. Se espera que la respuesta surja por sí sola con base en el trabajo realizado en la Tarea #1.

El inciso *b* (Figura 7) pretende propiciar un análisis numérico de la variación de una suma parcial a otra, se busca que el estudiante se percate que la trayectoria del planeta no es estable para todos los valores del tiempo, para luego pasar a matematizar el fenómeno en el inciso *c* (Figura 7), como una generalización de los resultados obtenidos en la Tarea #2 – Parte I, para llegar a que la distancia del planeta *P* a la Tierra es igual a $\sqrt{x_n^2 + y_n^2}$, donde:

$$\begin{cases} x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{4}{(2k-1)\pi} \cos[(2k-1)t] \\ y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{4}{(2k-1)\pi} \operatorname{sen}[(2k-1)t] \end{cases}$$

El incido *d* (Figura 7) conduce hacia la interpretación de la matemática involucrada en el fenómeno físico, relacionar la estabilidad de la trayectoria el planeta con el límite de las sumas parciales involucradas en la fórmula calculada en el inciso *c*. Esto es de suma importancia, pues en el trabajo de Fourier siempre había un ir y venir entre el fenómeno físico y la matemática involucrada, para validar la segunda en la primera (Farfán, 2012; Farfán & Romero, 2017).

Las preguntas siguientes de esta tarea requieren de otro applet de GeoGebra (https:// ggbm.at/jf9gmZ4A), en el que se muestra en la parte izquierda el modelo del movimiento del planeta *P* alrededor de la Tierra *T*; a la derecha se presenta el cambio de las coordenadas del planeta P conforme transcurre el tiempo.

Parte II. ¿Y si aumentamos el número de epiciclos?

A partir de lo observado en el applet proporcionado responde:

e) ¿Cómo es el comportamiento de las sumas parciales de las abscisas? ¿Y el de las ordenadas? Explica con tus propias palabras. ¿Qué relación existe entre estas respuestas y las de las preguntas (a) y (b)?

f) Note que las fórmulas obtenidas corresponden a sumas parciales de series trigonométricas. Con base en el mismo applet y tu respuesta a la pregunta anterior ¿podrías asegurar si la serie de las ordenadas converge o diverge? En caso de que converja ¿podrías identificar su valor de convergencia? Explica tus respuestas.

g) Si se cambia el rango de valores de t, para todos aquellos en los que $t \geq 0$. ¿Cuál es el valor de convergencia de la serie de las ordenadas del planeta P?

h) ¿Tiene sentido en nuestro modelo considerar valores de t negativos? ¿Cuál sería el valor de convergencia de la serie de las ordenadas del Planeta P en caso de considerar a $t \in \mathbb{R}$?

Figura 8. Tarea #2 – Parte II, incisos del *e* al *h* de la situación de aprendizaje.

Se espera con los incisos *e* y *f* (Figura 8) la interpretación de la matemática involucrada en el fenómeno físico, relacionar la estabilidad de la trayectoria del planeta con la convergencia de las series involucradas en la fórmula calculada para la distancia de planeta *P* a la Tierra. Se espera que se percaten de que la suma parcial de las abscisas no siempre es divergente y que la suma parcial de las ordenadas es siempre convergente.

En particular para el inciso *f*, se tiene como hipótesis que los estudiantes respondan que la serie de las ordenadas diverge, cuando en realidad es convergente. Esto lo sabemos gracias a la prueba piloto y las diferentes puestas en escena, ya que el argumento principal utilizado fue que "la gráfica se está acercando a dos valores 1 y -1", lo que da evidencia de la concepción de límite funcional como obstáculo para comprender la convergencia de series. Es importante aquí promover la confrontación de los argumentos de los participantes y que a través del diálogo compartido se construya una respuesta más sólida a partir de cuestionar la naturaleza de los términos de la serie. Para llegar, por ejemplo, a qué en el intervalo $(0,2\pi)$ la serie de las ordenadas de *P* converge a la función $f(t) = \begin{cases} 1 & si \quad 0 < t < \pi \\ -1 & si \quad \pi < t < 2\pi. \end{cases}$

Si bien sabemos que en $t = \pi$, la serie converge a cero – de hecho, en todas las discontinuidades considerando a $t \in \mathbb{R}$ – aquellos estudiantes que vislumbren la convergencia podrían pensar que cerca de $t = \pi$ – las discontinuidades – la serie de las ordenadas de *P* es divergente, pues ya está reportado que los estudiantes consideran convergente solo aquello que converge uniformemente y lo demás es divergente (Albert, 1996); además que estarían observando el fenómeno de Gibbs – muchas oscilaciones alrededor de la discontinuidad – que será objeto de análisis en la Tarea #4.

Los incisos *g* y *h* (Figura 8) pretenden provocar que la periodicidad sea un resultado de la serie y no una condición de la función que se está representando. Pues la serie, como objeto matemático, posee ciertas características que no tienen sentido en el fenómeno que se está modelando. En este caso dicha característica es la condición de periodicidad, la cual se da en toda la recta real, pero el fenómeno no tiene sentido al hablar de valores negativos del tiempo. Para concluir con esta tarea, se espera que los estudiantes no sepan escribir en forma analítica una función periódica en el inciso *h*, ya que no es usual hacerlo en la escuela, posiblemente escriban la función para un intervalo y escriban con palabras que se repite de manera periódica.

Tarea #4: El Fenómeno de Gibbs

Esta tarea tiene por objetivo *diferenciar el tipo de convergencia entre los puntos cercanos a las discontinuidades y los que no, para así construir una mejor comprensión de la convergencia de la serie, a través del estudio del comportamiento de las sumas parciales*. Cómo se comentó antes, los estudiantes consideran que las oscilaciones mostradas cerca de las discontinuidades de salto se dan porque en esos puntos la serie es divergente (Fenómenos de Gibbs).

Entonces, retomamos las series construidas en las tareas anteriores para analizar el comportamiento de las sumas parciales en los puntos cercanos a las discontinuidades, dividiendo la tarea en dos partes, una para la serie de la Tarea #2 y otra para la de la Tarea #3.

Parte I. Volvamos a la serie de la Tarea #2.

a) Considere el applet utilizado en la Tarea #2, en el que se representan las sumas parciales de las ordenadas del planeta *P*, responda ¿cómo se comporta la sucesión de sumas parciales en valores muy cercanos a $t = 0$, $t = \pi$ y $t = 2\pi$? ¿Cómo se observa este comportamiento en la trayectoria de *P*?

b) Utilice el applet proporcionado y elija un valor de $t \in (0, \pi)$ "lejano" de los extremos del intervalo ¿a partir de cuál suma parcial la aproximación dada por la suma difiere del valor de la función límite en menos de 0.1?

c) Utilice el applet proporcionado y elija dos valores de $t \in (0, \pi)$ "cercanos" a cada uno de los extremos del intervalo ¿a partir de cuál suma parcial la aproximación dada por la suma difiere del valor de la función límite en menos de 0.1?

d) ¿Cuál es la diferencia en el comportamiento de las sumas parciales para los puntos "cercanos" a las discontinuidades y los "lejanos" de las discontinuidades?

e) ¿Es convergente la serie para valores cercanos a $t = 0$? ¿y cercanos a $t = \pi$? Explica tus respuestas.

f) ¿Qué valor toman las sumas parciales exactamente en $t = 0$ y $t = \pi$? ¿Qué puedes decir respecto de la convergencia en estos valores? Explica tus respuestas.

g) Con base en lo trabajado en esta parte, podría replantear la función límite de la serie de las ordenadas del planeta *P*.

Figura 9. Tarea #4 – Parte I, incisos del *a* al *g* de la situación de aprendizaje.

Para el inciso *a* (Figura 9) se utiliza el applet proporcionado en Tarea #2 (https://ggbm.at/jf9gmZ4A), se espera que el estudiante responda que la suma diverge o que no está completamente seguro de la convergencia. Para las preguntas *b* y *c* se utiliza otro applet de GeoGebra (https://ggbm.at/tpvjSaFt) se espera con estas preguntas que el estudiante se percate de que, para lograr la aproximación deseada, los puntos "cercanos" a las discontinuidades requiere de sumas parciales de orden mucho mayor al orden de la suma que requieren los puntos "lejanos" de las discontinuidades.

Este análisis busca que el estudiante haga una diferencia entre convergencia "rápida" y "lenta" en los incisos *d* y *e* (Figura 9), para que en el inciso *f* (Figura 9) se convenza de que la serie es convergente incluso en las discontinuidades de salto. De esta manera podrá replantear su función límite, en el inciso *g* (Figura 9), a la función con $t \in [0,2\pi]$:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & si \quad 0 < t < \pi \\ 0 & si \quad t = 0 \ \vee \ t = \pi \\ -1 & si \quad \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

La segunda parte de esta tarea corresponde al análisis de la serie trabajada en la Tarea #3. Las preguntas y la intencionalidad son las mismas, el único cambio es que el análisis se realiza únicamente para $t = 0$ y valores cercanos.

Tarea #6: El cálculo de los coeficientes

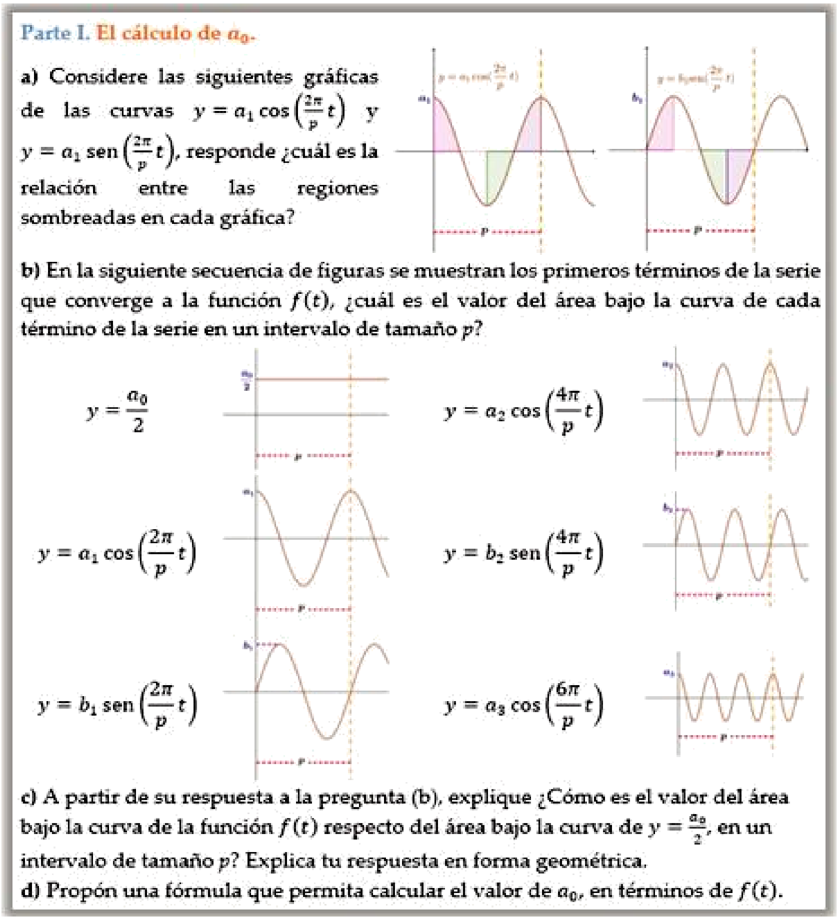
Esta tarea tiene como objetivo *significar el cálculo de los coeficientes de Fourier utilizando argumentaciones gráficas y geométricas, tal y como lo hizo Fourier*. Es importante, como inicio de esta tarea, hacer al alumno consciente de que se trabajará el problema inverso, dada la función a la cual converge una serie, como saber cuáles son los coeficientes de dicha serie. La situación planteada se presenta en la Figura 10.

Tarea #6. El cálculo de los coeficientes.
Considera ahora la situación inversa, es decir, se conoce la función $f(t)$ a la cual converge la serie cuyas sumas parciales se forman con la ordenada del planeta P en un sistema de coordenadas. Es decir, se cumple que:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) + b_k \, sen\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$$

Figura 10. Situación planteada en la Tarea #2 de la situación de aprendizaje.

Esta tarea está dividida en tres partes, cada una destinada a significar el cálculo de cada uno de los coeficientes de Fourier a_0, a_k y b_k, a partir de la articulación de los registros geométrico-analíticos y algebraicos, para validar el segundo en el primero.



Parte I. El cálculo de a_0.

a) Considere las siguientes gráficas de las curvas $y = a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$ y $y = a_1 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$, responde ¿cuál es la relación entre las regiones sombreadas en cada gráfica?

b) En la siguiente secuencia de figuras se muestran los primeros términos de la serie que converge a la función $f(t)$, ¿cuál es el valor del área bajo la curva de cada término de la serie en un intervalo de tamaño p?

$y = \frac{a_0}{2}$

$y = a_2 \cos\left(\frac{4\pi}{p}t\right)$

$y = a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$

$y = b_2 \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{p}t\right)$

$y = b_1 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$

$y = a_3 \cos\left(\frac{6\pi}{p}t\right)$

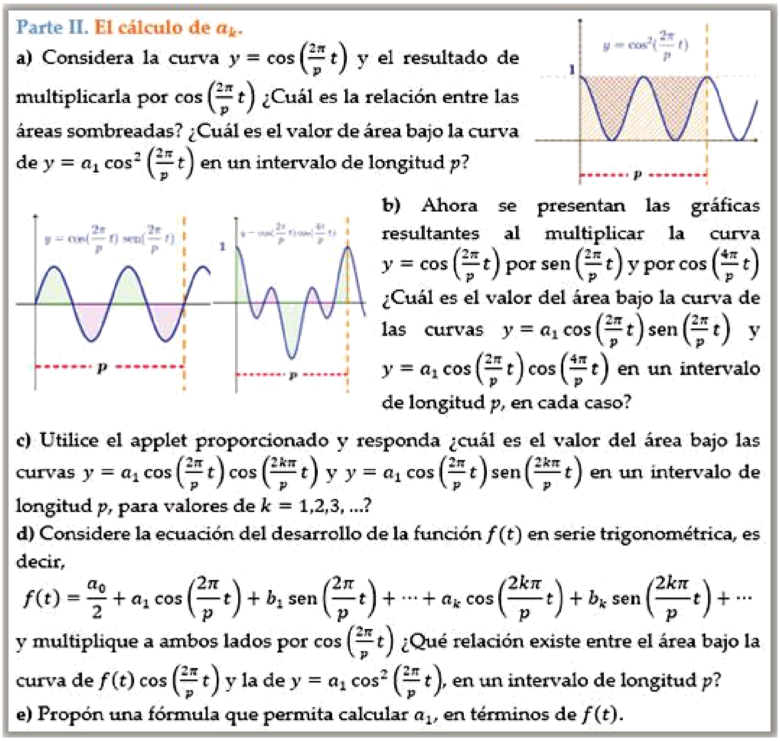
c) A partir de su respuesta a la pregunta (b), explique ¿Cómo es el valor del área bajo la curva de la función $f(t)$ respecto del área bajo la curva de $y = \frac{a_0}{2}$, en un intervalo de tamaño p? Explica tu respuesta en forma geométrica.

d) Propón una fórmula que permita calcular el valor de a_0, en términos de $f(t)$.

Figura 11. Tarea #6 – Parte I, incisos del *a* y *b* de la situación de aprendizaje.

Los incisos *a* y *b* (Figura 11) buscan que el estudiante se percate de que el área bajo la curva de los términos de la serie son todos iguales a cero, salvo el del término constante $\frac{a_0}{2}$, que tiene área $\frac{a_0 p}{2}$ en un intervalo de tamaño *p*. Por su parte, los *c* y *d* (Figura 11) pretenden que el estudiante utilice argumentos geométricos y sus conocimientos sobre integral definida para decir que el área bajo la curva de la función $f(t)$ es igual a la suma de las áreas bajo la curva de los términos de la serie. De esta manera el estudiante puede construir la fórmula para el cálculo con un significado asociado a la noción de área bajo la curva.

Con respecto al cálculo del coeficiente a_k, el cual corresponde a la segunda parte de esta tarea, se busca significar el cálculo de los coeficientes empezando por el coeficiente a_1.



Parte II. El cálculo de a_k.

a) Considera la curva $y = \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$ y el resultado de multiplicarla por $\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$ ¿Cuál es la relación entre las áreas sombreadas? ¿Cuál es el valor de área bajo la curva de $y = a_1\cos^2\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$ en un intervalo de longitud p?

b) Ahora se presentan las gráficas resultantes al multiplicar la curva $y = \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$ por $\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$ y por $\cos\left(\frac{4\pi}{p}t\right)$ ¿Cuál es el valor del área bajo la curva de las curvas $y = a_1\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$ y $y = a_1\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)\cos\left(\frac{4\pi}{p}t\right)$ en un intervalo de longitud p, en cada caso?

c) Utilice el applet proporcionado y responda ¿cuál es el valor del área bajo las curvas $y = a_1\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ y $y = a_1\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)$ en un intervalo de longitud p, para valores de $k = 1,2,3,\ldots$?

d) Considere la ecuación del desarrollo de la función $f(t)$ en serie trigonométrica, es decir,

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right) + b_1\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{p}t\right) + \cdots + a_k\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) + b_k\operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right) + \cdots$$

y multiplique a ambos lados por $\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$ ¿Qué relación existe entre el área bajo la curva de $f(t)\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$ y la de $y = a_1\cos^2\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$, en un intervalo de longitud p?

e) Propón una fórmula que permita calcular a_1, en términos de $f(t)$.

Figura 12. Tarea #6 – Parte II, incisos del *a* al *e* de la situación de aprendizaje.

En estas preguntas (Figura 12) se espera que el estudiante signifique geométricamente la ortogonalidad de las funciones trigonométricas y que utilice este hecho para calcular el valor de a_1 pues, será capaz de identificar con ayuda de un applet que la multiplicación de $\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$ por cualquier otro término de la serie – excepto el término $a_1\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$ – tendrá área bajo la curva igual a cero (https://ggbm.at/nmkFwh2F), y a partir de ellos que el valor de $\frac{a_1 p}{2}$ corresponde al área bajo la curva que resulta de multiplicar la función $f(t)$ por $\cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$. Lo que permite determinar el valor de a_1 en términos de $f(t)$, la función conocida.

Luego se busca generalizar este razonamiento para a_k utilizando un applet similar al utilizado para calcular a_1 (https://ggbm.at/bMz7yfhW). Las preguntas de esta parte tienen la misma intención que las propuestas para el cálculo de a_1, la idea es que utilicen argumentos similares para concluir que el valor de a_k está dado por la fórmula $\frac{2}{p}\int_0^p f(t)\cos\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)dt$, cuyo significado esté asociado al área bajo la curva. Para finalizar, la tercera parte de esta tarea busca significar y construir la fórmula para el cálculo de b_k, buscando que el estudiante utilice estrategias similares a las utilizadas para calcular a_k, y de esta manera concluir que $b_k = \frac{2}{p}\int_0^p f(t)\,\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{p}t\right)dt$.

Es muy probable que los estudiantes quieran realizar explicaciones utilizando integrales definidas. Sin embargo, es importante que durante la puesta en común se dialogue sobre los diferentes argumentos posibles con la intención de confrontar la cualidad (el área) con las fórmulas (las integrales). De esta forma se promoverá la interacción entre los registros geométrico-analíticos y algebraicos, necesarios para significar el cálculo de los coeficientes de Fourier (Romero, 2016; Farfán & Romero, 217).

REFLEXIONES FINALES

La situación de aprendizaje propuesta busca contribuir al rediseño del dME alrededor de la STF, ya que con un fundamento socioepistemológico pretende realizar una construcción social de la serie basada en prácticas. Si bien es cierto que aún falta analizar las interacciones que provocaría entre los participantes en alguna puesta en escena para así confrontar los resultados teóricos empíricos y validar el diseño mediante la confrontación del análisis a posteriori con el análisis a priori; los pilotajes y la puesta en escena no controlada nos permite rescatar algunas reflexiones teóricas importantes.

Según Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini (2015) una propuesta de rediseño del dME debe poseer las siguientes características: Carácter funcional, racionalidades contextuales diversas, validación de saberes y pluralidad de prácticas de referencia. En este sentido el diseño propuesto presenta a la STF como una herramienta de predicción al analizar el modelo propuesto por los astrónomos alejandrinos para el movimiento planetario, donde se busca modelar e interpretar el sistema a partir de la superposición de movimientos circulares, reconociendo a la *Prædiciere* como práctica social que norma la construcción social de la STF (carácter funcional).

La elección de este ambiente físico-geométrico responde a la práctica de referencia de la población de destino, quienes tienen como referente principal a la matemática escolar, pues su formación no incentiva la transversalidad de las nociones matemáticas. Se busca de esta manera la evolución del pensamiento trigonométrico, donde la situación planteada provoque la necesidad de considerar la convergencia de la serie trigonométrica, característica primordial que la diferencia de la función trigonométrica, cuyas argumentaciones provienen del contexto de quien aprende (racionalidad contextual y validación de saberes).

Por otra parte, Montiel (2011) asegura que para el tratamiento de la serie trigonométrica se requiere que la función trigonométrica se despoje de todo origen geométrico, trabajando exclusivamente con sus propiedades analíticas, particularmente la periodicidad. Desde esta investigación y en particular ejemplificado en la situación de aprendizaje propuesta, se propone que despojar a la función de su carácter geométrico no es necesario, más bien, el diseño busca potenciar este carácter geométrico para dar significado a la serie trigonométrica, donde la noción de convergencia, amparado en el estudio de sumas parciales cobra vital importancia (pluralidad de prácticas de referencia para la resignificación).

REFERENCIAS

Akkoc, H. (2008). Pre-service mathematics teachers concept images of radian. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 39*(7), 857-878. DOI: 10.1080/00207390802054458.

Albert, J. A. (1996). *La convergencia de series en el nivel superior: Una aproximación sistémica.* Tesis doctoral no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México. Artigue, M. (2014). Didactic Egineering in Mathematics Education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp.159-162). London: Springer.

Artigue, M. (2015). Perspectives on Design Research: the case of Didactical Engineering. En A. Bikner-Ahsbahs, C. Knniping, y N. Presmeg (Eds.), *Approches to Qualitative Research in Mathematics Education. Examples of Methodology and Methods* (pp.467-496). London: Advances in Mathematics Education.

Calles, A., Yépez, E., & Peralta, J. (2003). El análisis de Fourier de las trayectorias planetarias y el modelo copernicano del sistema solar. *Revista Mexicana de Física, 49*(3), 283-289. Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa: estudios sobre construcción social del conocimiento.* Barcelona, España: Editorial Gedisa S.A.

Cantoral, R., & Farfán, R. M. (2003). Mathematics Education: a vision of its evolution. *Educational Studies in Methematics, 53*(3), 255-270.

Cantoral, R., & Farfán, R. M. (2004). La sensibilité à la contradiction: logarithmes de nombres négatifs et origine de la variable complexe. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 2*(3), 137-168.

Cantoral, R., Montiel, G., & Reyes-Gasperini, D. (2015). Análisis del discurso matemático escolar en los libros de texto, una mirada desde la Teoría Socioepistemológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática,* (8), 9-28.

Cantoral, R., Moreno-Durazo, A., & Caballero-Pérez, M. (2018). Socio-epistemological research on mathematical modelling: an empirical approach to teaching and learning. *ZDM, 50*, 77-89.

Farfán, R. M. (2003). Uma pesquisa em Educação Matemática: da propagação do calor à noção de convergẽncia. *Educação Matemática Pesquisa, 5*(2), 39-58.

Farfán, R. M. (2012). *Socioepistemología y Ciencia: el caso del estado estacionario y su matematización*. Barcelona, España: Editorial Gedisa S.A.

Farfán, R. M., & Romero, F. (2016). El diseño de situaciones de aprendizaje como elemento para el enriquecimiento de la profesionalización docente. *Perfiles educativos, 38*(especial), 116-139.

Farfán, R. M., & Romero, F. (2017). Construcción social del conocimiento matemático: la serie trigonométrica de Fourier desde la Socioepistemología. *Perspectivas da Educação Matemática – INMA/UFMS, 10*(23), 483-503.

Marmolejo, R. (2006). *Estudio de la noción de estado estacionario en el ámbito fenomenológico de la transferencia de calor.* Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Montiel, G. (2011). *Construcción de Conocimiento Trigonométrico: un estudio socioepistemológico*. México: Díaz de Santos.

Moore, K. (2009). An investigation into precalculus students' conceptions of angle measure. En *Twelfth Annual Special Interest Group of the Mathematical Association of America on Research in Undergraduate Mathematics Education (SIGMAA on RUME) Conference*. Raleigh, NC: North Carolina State University.

Morales, F. (2010). *Causas y efectos de la ambigüedad en el tratamiento didáctico de la noción de calor. Una caracterización del pensamiento fisicomatemático.* Tesis doctoral no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Morales, F. (2013). El modelo matemático de Fourier para el calentamiento terrestre. *Ciencia y Tenología, 13*, 293-308.

Morales, F., & Farfán, R. M. (2004). Acerca de la actividad de modelación: las temperaturas de la tierra. En L. Díaz Moreno (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 17*, 243-248. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Moreno, J. A. (1999). *Estudio de la noción de convergencia de series trigonométricas en un ambiente de simulación*. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Muro, C., Camarena, P., & Flores, R. (2007). Alcances de la Teoría de Vergnaud en la representación de un problema complejo de ingeniería. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 10*(3), 401-419.

Piaget, J. (2009). *Psicología de la inteligencia* (Juan C. Foix, trad.). Barcelona, España: Editorial Crítica. (Obra original publicada en 1947).

Reyes-Gasperini, D. (2016). *Empoderamiento Docente y Socioepistemología: un estudio sobre la transformación educativa en Matemáticas*. Barcelona, España: Editorial Gedisa S.A.

Rodríguez, M. (2010). A Functional Mathematics por the Engineer: an approximation to the trigonometrical series of Fourier. *Procedia Social and Behavioral Sciences, 8*, 57-63. DOI: 10.1016/j.sbspro.2010.12.008.

Rodríguez, M., & Popoca, M. (2010). The trigonometrical series of Fourier: a visual aproximation. *Procedia Social and Behavioral Sciences, 8*, 64-71. DOI: 10.1016/j.sbspro.2010.12.009.

Romero, F. (2016). *Construcción social de la serie trigonométrica de Fourier. Pautas para un diseño de intervención en el aula.* Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México. DOI: 10.13140/RG.2.2.14118.63048.

Romero, F., & Farfán, R. M. (2016). Estado actual de la investigación alrededor de la serie trigonométrica de Fourier. *Investigación e Innovación en Matemática Educativa, 1*(1), 275-282.

Ulín, C. (1984). *Análisis histórico-crítico de la difusión de calor: el trabajo de Fourier.* Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Vásquez, R. (2006). *Sobre el papel de la hipótesis de periodicidad en las series de Fourier.* Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.