Um Estudo sobre Conflitos no Processo de Aprendizagem de Limite de Funções de Várias Variáveis[1]

Daniela Barbieri Vidotti
Lilian Akemi Kato

RESUMO

Nesta pesquisa, apoiamo-nos nos aportes teóricos de Tall e Vinner (1981) sobre conceito imagem e conceito definição para investigar dificuldades no processo de aprendizagem de limite de funções de várias variáveis no ensino superior. Para tanto, utilizamos um teste diagnóstico constituído por questões abertas envolvendo a definição e propriedades do limite em que identificamos algumas das possíveis causas para os erros manifestados pelos estudantes. O questionário foi respondido por 85 acadêmicos do curso de Licenciatura em Matemática de três universidades paranaenses. As análises empreendidas evidenciaram que grande parte dos erros cometidos pelos estudantes foram causados por fatores de conflitos potenciais, inerentes ao conteúdo de limite, em função, possivelmente, da forma como o conteúdo é exposto nos livros didáticos ou apresentado pelo professor em sala de aula. Também foi possível identificarmos que os conceitos imagem de função e de função limitada, importantes nesse conteúdo, estão em desacordo com o conceito formal o que potencializa alguns erros relacionados ao limite.

Palavras-chave: Imagens mentais. Limite de funções de várias variáveis. Erros.

A Study on Conflicts in the Learning Process of Limit of Functions of Several Variables

ABSTRACT

In the following research, we rely on the theoretical contributions of Tall and Vinner (1981) on concept image and concept definition to investigate learning difficulties in the studying process of limit functions of several variables at college education level. For this, we use a

---

[1] Uma versão preliminar desse trabalho, porém com outros referencias teóricos, foi apresentada e publicada no V Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática realizado de 27 a 29 de junho de 2018 em Belém, Pará.

Daniela Barbieri Vidotti é Mestra em Matemática pela Universidade Estadual de Maringá (UEM). Atualmente é Doutoranda no Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática da Universidade Estadual de Maringá (UEM) e Professora Assistente do Centro de Ciências Humanas e da Educação da Universidade Estadual do Paraná – Campus de Paranavaí/PR (Unespar). Endereço: Av. Gabriel Experidião, SN, 87703-000, Paranavaí/PR, Brasil. E-mail: dnbarbieri@hotmail.com

Lilian Akemi Kato é doutora em Matemática Aplicada pela Universidade Estadual de Campinas (Unicamp). Atualmente é Professora Associada do Departamento de Matemática e do Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá (UEM). Endereço: Av. Colombo, 5790, Jd. Universitário, 87020-900, Maringá/PR, Brasil.
E-mail: lilianakemikato@gmail.com

Recebido para publicação em 31 jul. 2018. Aceito, após revisão, em 25 set. 2018.
DOI: https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.v20iss5id4566.

diagnostic test consisting of open questions related to the definition and properties of the limit, in which we identified some of the probable causes for the mistake made by the students. The test was answered by 85 undergraduate students of Teaching Degree in Mathematics from three different universities in the state of Paraná. The analyzes showed that most of the errors made by the students were caused by potential conflict factors immanent in the limit content due to the likely way the content is exposed throughout the textbooks or presented by the teacher in the classroom. It was also possible to identify the concepts image of function and limited function, very important in this content are at odds with the formal concept, which enhances some errors related to limit content.

Keywords: Mental images. Limit of functions of several variables. Errors.

INTRODUÇÃO

A análise dos erros cometidos pelos alunos em questões de matemática tem se orientado por correntes teóricas predominantes em psicologia e educação em diferentes épocas e locais em que foram desenvolvidas. Radatz (1979) aponta Estados Unidos, Alemanha e União Soviética como países precursores desse campo de estudo, produzindo numerosas pesquisas sobre o tema a partir do início do século XX e originando investigações de caráter distinto, devido a diferenças em termos de pesquisas psicológicas e educacionais, bem como nas políticas educacionais e organização das estruturas curriculares existentes na época.

A necessidade de diagnosticar problemas no processo de ensino e aprendizagem, que vão além de variáveis como o professor, o currículo, o ambiente, hábitos de estudos, bem como problemas de ordem puramente matemática, levou pesquisadores a buscarem esclarecimentos sobre os processos cognitivos envolvidos no raciocínio matemático, cujas bases teóricas apoiam-se em estudos destinados a compreender como o cérebro humano funciona.

Nesse sentido, Tall e Vinner (1981) desenvolveram as noções de *conceito imagem* e *conceito definição*[2] que são elementos teóricos destinados a: analisar os processos cognitivos envolvidos na formação dos conceitos matemáticos; esclarecer de que forma surgem os conflitos cognitivos na mente do indivíduo e identificar os fatores que podem causar prejuízos à aprendizagem de uma teoria matemática formal.

Neste trabalho, pretendemos identificar os conceitos definição e os conceitos imagem evocados pelos estudantes do curso de Licenciatura em Matemática em um teste diagnóstico sobre limite de funções de várias variáveis, a fim de investigar possíveis causas para os erros cometidos em seu desenvolvimento. Uma parte desse estudo foi desenvolvida em nossa pesquisa de doutorado[3], em andamento, que objetiva analisar dificuldades de aprendizagem de alunos de Cálculo Diferencial Integral em Várias

[2] Tradução dos termos concept image e concept definition de acordo com Domingos (2003) e Almeida (2013). Entretanto, encontram-se na literatura outras traduções para estes termos, tais como "imagem conceitual" e "definição conceitual" (Abreu, 2011), ou "imagem de conceito" e "definição de conceito" (Bisognin & Bisognin, 2017).

[3] Pesquisa aprovada pela Comissão de Ética em Pesquisa (CEP) da Universidade Estadual de Maringá (UEM), pelo parecer número 2.229.973 e com Certificado de Apresentação para Apreciação Ética (CAAE) número 66081217.4.0000.0104.

Variáveis e investigar o potencial da Modelagem Matemática para explorar os erros dos estudantes a fim de superá-los.

As dificuldades apresentadas pelos estudantes dos cursos da área de Ciências Exatas têm sido debatidas por pesquisadores da Educação Matemática, devido aos altos índices de evasão nesses cursos (Cury, 2003; Cury & Cassol, 2004; Cavasotto, 2010; Fonseca, 2016). As disciplinas de Cálculo Diferencial Integral são consideradas críticas nos primeiros semestres desses cursos, e corroborando com Alves (2011), constatamos esforços isolados, em termos de pesquisa, direcionados ao ensino de Cálculo Diferencial Integral em Várias Variáveis. Em especial, na Licenciatura em Matemática, tais preocupações remetem, sobretudo, à qualidade da formação docente.

Na literatura encontramos diversas pesquisas que abordam dificuldades de estudantes e professores em relação à compreensão do conceito de limite de funções de uma variável real (Tall & Vinner, 1981; Artigue, 1991; Domingos, 2003; Cavasotto, 2010; Abreu, 2011; Bisognin & Bisognin, 2017, Soares & Cury, 2017), relatando problemas relacionados à noção intuitiva, à definição formal, à aplicação de regras operatórias, ao cálculo de limites, às conexões entres as representações verbais, algébricas e gráficas, entre outros.

Essas pesquisas ainda apontam sobre as possíveis consequências dessas dificuldades, quando não superadas, no processo de aprendizagem de outros conceitos matemáticos mais abstratos que necessitam dessa base conceitual. Nesse sentido, este estudo, ao focarmos sobre os erros em questões envolvendo limite de funções de várias variáveis, aponta não somente dificuldades dos estudantes na compreensão desse conceito, decorrentes de falhas em aprendizagens anteriores, como no de limite de função de uma variável, como outras que emergem do próprio contexto do assunto.

SOBRE O APORTE TEÓRICO: CONCEITO IMAGEM, CONCEITO DEFINIÇÃO E CONFLITOS

As noções de conceito imagem e conceito definição foram apresentadas por Tall e Vinner (1981) para descrever os aspectos cognitivos envolvidos na aquisição de conhecimentos matemáticos. Segundo os autores, a maneira complexa pela qual o pensamento funciona não segue a lógica da matemática. De forma geral, isso se deve ao fato de que há diferenças entre a forma em que os conceitos matemáticos são formalmente definidos (pelos matemáticos) e os processos cognitivos pelos quais eles são concebidos.

Nesse sentido, muitos conceitos são aprendidos por meio de diversas experiências, em contextos apropriados, sem que sejam formalmente definidos e cada indivíduo possui uma estrutura cognitiva produzindo imagens mentais pessoais desses conceitos. Segundo Tall e Vinner (1981) o termo conceito imagem é usado

> [...] para descrever a estrutura cognitiva total que está associada ao conceito, que inclui todas as imagens mentais, propriedades e processos associados. Ela é construída ao longo dos anos através de experiências de todos os tipos, mudando

> à medida que o indivíduo atende novos estímulos e amadurece. (Tall & Vinner, 1981, p.152, tradução nossa)

Assim, cada indivíduo pode criar diferentes ideias acerca de um conceito matemático, que podem ser coerentes ou não com a definição formal produzida pelos matemáticos. Para exemplificar, Tall e Vinner (1981) citam o conceito de subtração, que geralmente é conhecido como um processo envolvendo números inteiros positivos. Nos primeiros contatos com este conceito, as crianças podem notar que a subtração de um número sempre *reduz* o número inicial. Essa observação é parte do conceito imagem dessa criança e pode causar problemas mais tarde quando essa operação for aplicada a números negativos.

Além disso, segundo Tall e Vinner (1981), diferentes partes do conceito imagem podem ser evocadas dependendo dos estímulos recebidos, nesse caso, o termo específico utilizado é *conceito imagem evocado*. Os aspectos conflitantes podem ser percebidos quando forem evocados simultaneamente pelo indivíduo, do contrário eles podem coexistir sem causar confusão.

Nesse contexto, pode ser formado o conceito definição, isto é, "[...] a forma de palavras que o aluno usa para sua própria explicação sobre o seu conceito imagem (evocado)" (Tall & Vinner, 1981, p.153, tradução nossa). Por ser construído ou reconstruído pelo aluno, o conceito definição pode variar de tempos em tempos. Sendo assim, um conceito definição pessoal pode diferir de um conceito definição formal, ou seja, aquele conceito definição que é aceito pela comunidade matemática.

Outro exemplo dado pelos autores é o conceito definição de função matemática. Esse conceito pode ser considerado "uma relação entre dois conjuntos A e B em que cada elemento de A está relacionado precisamente com um elemento de B". Entretanto, os estudantes podem ou não se lembrar do conceito definição e o conceito imagem pode incluir outros aspectos, como a ideia de que a função é dada por uma fórmula ou uma regra, ou como um gráfico ou uma tabela de valores.

Segundo os autores, no caso da função, isso pode acontecer, por exemplo, quando o professor apresenta, de forma bem rápida, o conceito definição formal e trabalha o tempo todo com exemplos de funções na sua expressão algébrica. Nesse caso, o conceito definição pode ficar inativo na estrutura cognitiva do sujeito que pode ter um conceito imagem restrito, envolvendo apenas fórmulas. Mais tarde, quando esse sujeito precisar lidar com funções definidas em outros contextos, ele pode sentir-se incapaz. Nessa situação, o sujeito possui um conceito imagem inapropriado do conceito de função.

Desse modo, entendemos que o conceito definição pode ser uma expressão decorada do livro ou construída pelo sujeito e, em alguns casos, também pode ser inexistente. Assim, em situações de ensino é desejável que o conceito imagem seja bem construído, incluindo vários tipos de experiências, de modo que a definição formal possa ser compreendida pelo estudante.

Quando uma parte do conceito imagem ou conceito definição está em conflito com outra parte, os autores a chamam de *fator de conflito potencial*. E, quando essas duas partes são evocadas simultaneamente, podem causar conflitos cognitivos reais chamados *fatores de conflitos cognitivos*. Como exemplo, os autores citam o conceito de números complexos. A definição do número complexo $x + iy$ como um par ordenado de números reais (x, y) e a identificação de $x + i0 = (x, 0)$ com o número real x é um fator de conflito potencial do conceito de números complexos. Segundo os autores, isso ocorre porque contém um conflito potencial com a noção teórica de conjuntos de que o elemento x é distinto do par ordenado (x, y). Desse modo, os alunos podem considerar que x e $(x, 0)$ são elementos distintos ou iguais, no caso dos números complexos, e se evocados simultaneamente podem tornar-se fatores de conflitos cognitivos.

Os fatores de conflitos potencias são considerados mais graves pelos autores quando constituem partes do conceito imagem em desacordo com o conceito definição formal, porém, não causam conflitos com nenhuma parte do respectivo conceito imagem. Dessa forma, esses fatores não podem tornar-se fatores de conflitos cognitivos, logo, podem prejudicar seriamente a aprendizagem de uma teoria formal.

Segundo Tall e Vinner (1981), é bastante provável que os conceitos imagem de limite, bem como de outros conceitos do Cálculo, contenham fatores que entrem em conflito com o conceito definição formal. De acordo com Tall (1992) e Willians (1991) apud Bisognin e Bisognin (2017), é muito difícil um aluno ter uma compreensão completa de limite, pois, em geral, ele sente dificuldade ao trabalhar com limite de funções. Neste artigo, buscamos identificar e descrever alguns desses fatores causados por um conceito imagem inapropriado do conceito de limite de funções de várias variáveis.

PERCURSO METODOLÓGICO DA PESQUISA

A pesquisa foi realizada com 85 estudantes do curso de Licenciatura em Matemática de três universidades paranaenses: 35 da Universidade Estadual do Paraná (Unespar); 11 da Universidade Estadual de Londrina (UEL), e 39 estudantes da Universidade Estadual de Maringá (UEM). Os alunos cursavam o segundo semestre da disciplina de Cálculo Diferencial Integral II, que é de periodicidade anual nessas instituições.

Elaboramos e aplicamos um teste composto por questões sobre o conteúdo de limites de funções de várias variáveis, baseado nos livros de Stewart (2011), Guidorizzi (2012), Leithold (1994), os quais constam nos programas da referida disciplina e também na dissertação de Cavasotto (2010) que versa sobre análise de erros em Cálculo I.

Para evitar identificação dos participantes, as folhas de respostas foram nomeadas pelos códigos: M1, ..., M39 (estudantes da UEM); L1, ..., L11 (estudantes da UEL); A1, ..., A15 (estudantes da Unespar/Apucarana); C1, ..., C10 (estudantes da Unespar/Campo Mourão) e P1, ..., P10 (estudantes da Unespar/Paranavaí).

As respostas foram analisadas segundo a metodologia de análise de erros apresentada em Cury (2008). Dessa forma, inicialmente foram classificadas em “corretas”, “parcialmente corretas”, “incorretas” e “em branco”, sendo que as respostas incorretas e parcialmente incorretas foram digitadas na íntegra, formando um conjunto de soluções que passaram por procedimentos de unitarização e categorização, de onde emergiram as classes de erros.[4]

Com base nessa categorização, neste trabalho, aprofundamos nossa investigação olhando para as possíveis causas dos erros específicos do conteúdo de limite de funções em *várias variáveis*, detectados anteriormente, à luz dos elementos teóricos: conceito imagem e conceito definição apresentados em Tall e Vinner (1981). Para isso, primeiramente analisamos o desenvolvimento deste conteúdo em um dos livros didáticos disponível como referência a esses estudantes de Cálculo II a fim de subsidiarmos nossas análises. Em seguida, apresentamos as questões do teste, destacamos as classes de erros cometidos pelos estudantes e discutimos os resultados.

LIMITES DE FUNÇÕES A VÁRIAS VARIÁVEIS

Dentre as diversas obras que constam nos programas da disciplina de Cálculo II dos cursos de Licenciatura em Matemática das instituições, às quais pertencem os sujeitos desta pesquisa, escolhemos para nossa análise o livro de Stewart (2011), por ter sido apontada por Alves (2011)[5] como uma obra que indica o processo de construção das definições formais e cuja noção de limites é bem explorada por meio de registros numéricos, algébricos e gráficos em 2D e 3D.[6]

Stewart inicia a seção de limites e continuidade comparando numericamente o comportamento das funções $f(x, y) = \frac{sen(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$ e $g(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ para pontos (x, y) próximos da origem, fazendo uso de uma tabela de valores de f e de g. Com isso, verificamos que quando (x, y) se aproxima de $(0, 0)$, os valores de $f(x, y)$ tendem a se aproximar de 1, ao passo que os valores de $g(x, y)$ não se aproximam de valor algum. Posteriormente, o autor apresenta a notação e uma definição informal de limite de função, conforme podem ser visualizadas na Figura 1.

[4] O processo de categorização dos erros foi apresentado em forma de comunicação científica no V Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática realizado de 27 a 29 de junho de 2018 em Belém, Pará.
[5] A versão do livro analisado por Alves (2011) foi a de 2004; no entanto, optamos por analisar a versão mais recente, de 2011.
[6] No sentido da Teoria das Representações Semióticas de Raymond Duval (1995).

> Em geral, usamos a notação
>
> $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$
>
> para indicar que os valores de $f(x, y)$ se aproximam do número L quando o ponto (x, y) se aproxima do ponto (a, b) ao longo de qualquer caminho contido no domínio da função f. Em outras palavras, podemos tornar os valores de $f(x, y)$ tão próximos de L quanto quisermos tomando pontos (x, y) suficientemente próximos do ponto (a, b), mas não iguais a (a, b).

Figura 1. Notação e definição informal de limite de função (Stewart, 2011, p.829).

Dessa forma, incialmente, o limite de funções é abordado como um processo dinâmico, no qual (*x, y*) se aproxima de (*a, b*) fazendo com que *f*(*x, y*) fique próximo de *L*. Uma abordagem semelhante é dada, muitas vezes, para limite de função de uma variável, quando consideramos a expressão $\lim_{x\to a} f(x) = L$, e segundo Tall e Vinner (1981) essa noção intuitiva de limite, pode levar o aluno a considerar $f(x) \neq L$ como parte de seu conceito imagem. Como consequência, o pressuposto $f(x) \neq L$ torna-se um fator de conflito potencial, levando o estudante a fazer inferências equivocadas ao resolver problemas que envolvem este conceito. Conjecturamos então que o pressuposto $f(x, y) \neq L$ também pode ser um fator de conflito potencial no estudo de limite de funções de duas variáveis, visto a semelhança em que esses elementos teóricos são tratados. Essa hipótese será discutida logo adiante.

Stewart (2011) também apresenta uma definição formal de limite de função, conforme mostra a Figura 2.

> **1 DEFINIÇÃO** Seja f uma função de duas variáveis cujo domínio D contém pontos arbitrariamente próximos de (a, b). Dizemos que o **limite de $f(x, y)$ quando (x, y) tende a (a, b)** é L e escrevemos
>
> $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$
>
> se para todo número $\varepsilon > 0$ existe um número correspondente $\delta > 0$ tal que
>
> $$\text{se} \quad (x,y) \in D \quad \text{e} \quad 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \quad \text{então} \quad |f(x,y) - L| < \varepsilon$$

Figura 2. Definição formal de limite de função (Stewart, 2011, p.829).

A definição 1 dada na Figura 2 é explicada e ilustrada por um diagrama de setas (Figura 3) e por um gráfico em 3D (Figura 4). Essas ilustrações são bastante complexas e, muitas vezes, são pouco exploradas em sala de aula. O livro em questão apresenta apenas dois exemplos nos quais é feito o gráfico da função e comentado sobre a porção do gráfico que corresponde ao resultado do limite calculado e, em ambos os casos, o limite não existe. Contudo, o diagrama de setas, não aparece em nenhum exemplo. Isso dificulta a formação de imagens mentais com referências geométricas do conceito de limites de funções de duas variáveis.

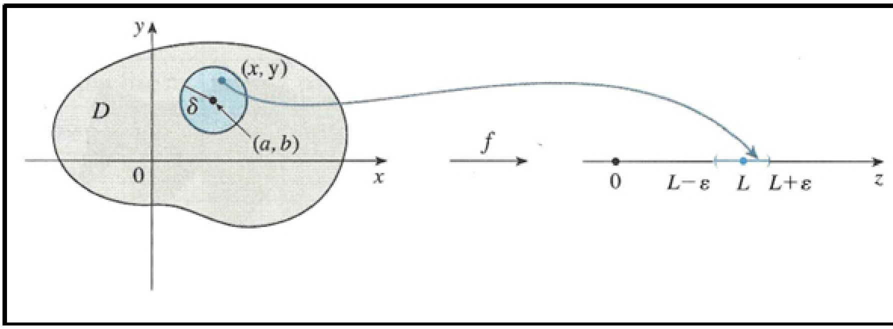

Figura 3. Diagrama de setas (Stewart, 2011, p.830).

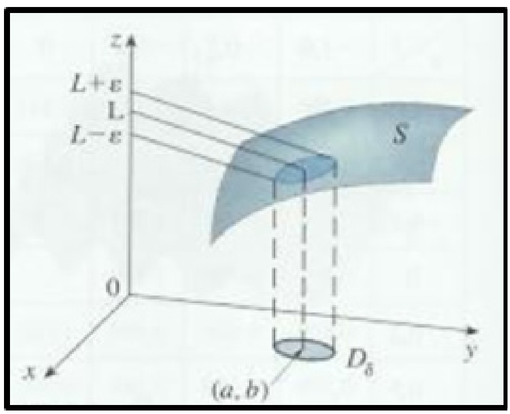

Figura 4. Gráfico 3D (Stewart, 2011, p.830).

Observamos que nessas ilustrações o número L, representado no interior do intervalo $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$, ao mesmo tempo em que se faz $f(x, y) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ pode induzir o aluno a formar um conflito cognitivo com o conceito imagem (equivocado) de que $f(x, y) \neq L$, caso ele o tenha. Porém, conforme salienta Tall e Vinner (1981), para que ocorra um conflito cognitivo, é necessário que esses conceitos imagens sejam evocados simultaneamente, ou do contrário, não causará confusão.

Em continuação, o autor explica sobre as diferentes maneiras do ponto (*x, y*) aproximar-se do ponto (*a, b*), apresentando uma ilustração (Figura 5) e estabelecendo relações com os limites laterais das funções de uma única variável.

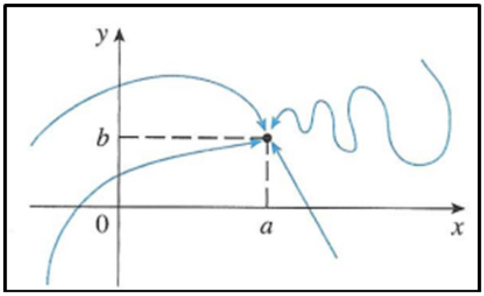

Figura 5. Direções de aproximação ao ponto (a, b) (Stewart, 2011, p.829).

Fazendo referência à definição de limite, o autor observa que, se o limite existe, "$f(x, y)$ deve se aproximar do mesmo valor-limite independentemente do modo como (x, y) aproxima-se de (a, b)" (Stewart, 2011, p.830). E conclui a seguinte propriedade (Figura 6).

Se $f(x,y) \to L_1$ quando $(x,y) \to (a,b)$ ao longo do caminho C_1 e $f(x,y) \to L_2$ quando $(x,y) \to (a,b)$ ao longo do caminho C_2, com $L_1 \neq L_2$, então $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ não existe.

Figura 6. Propriedade do limite de funções (Stewart, 2011, p.829).

Observamos, portanto, um cuidado em construir de forma intuitiva essa propriedade que é bastante utilizada em problemas que envolvem o cálculo do limite de funções de várias variáveis (nós a chamaremos de Teorema dos Caminhos). Consideramos que esse tratamento intuitivo facilita a formação de imagens mentais; porém, como já expomos anteriormente, não excluímos a possibilidade de partes dos conceitos imagem formados serem inapropriados constituindo os fatores de conflitos potenciais.

O Teorema dos Caminhos é abordado de forma algébrica e geométrica, em três exemplos subsequentes, nos quais o autor mostra que o limite das funções quando $(x, y) \to (0,0)$ não existe. Desse modo, concluímos que a propriedade apresentada na Figura 6 é bem explorada por meio de exemplos, favorecendo a construção de imagens mentais do cálculo do limite ao longo de caminhos. Inclusive, esses caminhos são representados geometricamente, mostrando a aproximação ao ponto escolhido por meio de flechas, de forma semelhante à Figura 5.

No quarto e último exemplo da seção, o autor desenvolve o limite de $f(x, y) = \dfrac{3x^2 y}{x^2 + y^2}$ quando $(x, y) \to (0,0)$ mostrando que ele *existe*. Após calcular o limite ao longo de parábolas e retas, obtendo sempre o mesmo valor-limite, Stewart sugere que o limite existe e é igual ao valor-limite calculado. Aplicou, então, a definição, exposta na Figura 2, para demonstrar a afirmação. Entretanto, nenhuma representação geométrica ou numérica desse exemplo é apresentada.

Além disso, outras propriedades dos limites são brevemente comentadas (limite de uma soma/diferença, limite do produto/quociente, teorema do confronto, etc.), pois o autor assume que todas elas decorrem dos limites de funções de uma única variável, e deixa a cargo do leitor as adaptações e verificações de suas validades.

Assim, no que se refere a técnicas para calcular o limite, observamos que há ênfase em utilizar o Teorema dos Caminhos, o qual garante a não existência do limite sempre que for aplicável, e por outro lado, ainda que reconheçamos um esforço para a construção do conceito definição de limite de funções de duas variáveis, constatamos que a definição formal foi pouco explorada por meio de exemplos.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

O teste foi elaborado com o objetivo de identificar e analisar erros e dificuldades dos estudantes acerca do conteúdo de limite de funções de várias variáveis. Foi constituído por três questões, sendo que, neste trabalho, serão analisadas somente duas. A primeira questão refere-se à definição de limite e a segunda, com quatro itens (denominados (a), (b), (c) e (d)), abordam o processo de cálculo do limite e foram adaptados de Stewart (2011), Cavasotto (2010), Guidorizzi (2012) e Leithold (1994), respectivamente.

Na primeira questão do teste foi solicitado que os alunos explicassem o que entendem por "$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$"; desse modo, poderíamos avaliar o conceito definição referente a este conceito. A questão foi proposta da seguinte forma:

> ***Questão 1**. Sejam $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função, (a,b) um ponto de acumulação de D e L um número real. Explique o que significa dizer que o limite de $f(x,y)$ quando (x,y) tende a (a,b) é L, ou seja, $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$.*

Nessa questão, as categorias resultantes da análise de erros foram analisadas a fim de separar as respostas que explicitaram uma ideia informal do conceito de limite de funções em várias variáveis daquelas que apresentaram uma definição formal deste conceito. Os resultados podem ser visualizados na Tabela 1.

Tabela 1
Conceito definição de limite de funções de várias variáveis.

Categorias	Número de ocorrências
C1) Usou uma ideia informal correta.	24
C2) Usou uma definição formal correta.	6
C3) Usou uma ideia informal incorreta.	12
C4) Usou a definição formal de forma incorreta.	6
C5) Limitou-se a reescrever o enunciado da questão.	10
C6) Não foi possível identificar o raciocínio utilizado.	8
C7) Respostas em branco.	23

As respostas informais corretas (C1) expressaram uma ideia dinâmica (de movimento), semelhante à definição informal dada em Stewart (2011) apresentada na Figura 1, tais como:

Aluno C6: *Conforme as coordenadas (x, y) se aproximam do ponto (a, b) o valor de z se aproxima de L.*

Aluno L4: *Significa que naquela região circular em volta de (a, b), por todos os pontos a função se aproxima de L quanto mais nos aproximamos de (a, b).*

Em alguns casos, o aluno evocou explicitamente em seu conceito definição que $f(x, y) \neq L$, conforme indicam as respostas dos alunos A13 e P7, a seguir:

Aluno A13: *O limite da função f (x, y) quando (x, y) tende a (a, b) resulta em uma constante L, ou seja, f (x, y) se aproximará infinitamente de L, porém <u>nunca chega em L</u>.*

Aluno P7: *O limite de uma função em um determinado ponto (a, b), onde a corresponde à coordenada x e b à coordenada y é o limite (valor) onde a função se aproxima de um ponto, <u>mas não toca ele</u>.*

Desse modo, inferimos que o pressuposto $f(x, y) \neq L$ para qualquer $(x, y) \in D$ constitui um possível fator de conflito potencial da teoria de limite de funções de várias variáveis, pois é parte do conceito definição de alguns desses sujeitos e está em desacordo com a definição formal, podendo causar conflitos.

As respostas informais incorretas (C3) incluem a ideia de que o valor de $f(x, y)$ deve existir e ser igual a L quando (x, y) se aproxima de (a, b) e ideias de continuidade:

Aluno L11: *Significa que o valor de f(x, y) quando x se aproxima de a e y se aproxima de b é igual a L.*

Aluno M28: *Significa que f (x, y) é contínua nestes pontos (a, b).*

Além disso, em três respostas os alunos confundiram elementos do domínio e da imagem da função *f*, afirmando por exemplo que *f(x, y)* está tendendo a *(a, b)*.

Em vista disso, entendemos que a proximidade entre os conceitos de limite e continuidade também constitui um fator de conflito potencial, pois identificamos associações incorretas referentes a esses conceitos. Além disso, alguns conceitos imagem evocados de função mostraram-se inapropriados, o que pode estar causando dificuldades na formação do conceito imagem de limite.

Das respostas formais incorretas (C4), duas indicaram que $0 <| f(x,y)-L| < \varepsilon$, que também resulta em $f(x,y) \neq L$. As outras apresentaram imprecisões como: trocou o sinal < (menor) por ≥ (maior ou igual); ou inverteu as implicações: $| f(x,y)-L| < \delta \Rightarrow d((x,y),(a,b)) < \varepsilon$; ou omitiu que $0 <| (x,y)-(a,b)| < \delta$.

A classificação apresentada no Quadro 1 nos mostra que a maioria dos alunos apresentaram um conceito definição informal, evidenciando que o conceito definição formal provavelmente é inativo na estrutura cognitiva desses sujeitos, o que deverá ser avaliado nas demais questões do teste.

Na Questão 2 pretendíamos identificar as dificuldades dos estudantes ao calcularem o limite de uma função de duas variáveis reais.

> ***Questão 2.*** *Calcule cada limite abaixo, se existir. Se não existir, justifique sua resposta.*
>
> *a)* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^2+y^2}{x^4y^4}$ *c)* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{-xy^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$
>
> *b)* $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{3xy+1}{1-x}$ *d)* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3y^3}{8x^{12}+6x^4}$

Apresentamos na Tabela 2 uma distribuição das respostas nas categorias "incorretas", "parcialmente corretas", "corretas" e "em branco". Os números indicam que a maioria dos estudantes tentou dar uma resposta a esta questão, porém o percentual de acertos é pequeno, o que nos motivou a investigar os tipos de erros cometidos bem como suas possíveis causas.

Tabela 2
Distribuição das respostas dadas à Questão 2.

Itens		Incorretas	Parcialmente corretas	Corretas	Em branco	Total
a	n.	44	6	18	17	85
	%	51,8	7,1	21,2	20	100
b	n.	42	23	2	18	85
	%	49,4	27,1	2,4	21,2	100
c	n.	35	17	1	32	85
	%	41,2	20	1,2	37,6	100
d	n.	49	4	6	26	85
	%	57,6	4,7	7,1	30,6	100

As respostas consideradas "parcialmente corretas", nos itens (a) e (d) correspondem àquelas nas quais o aluno calculou os limites ao longo de um ou mais caminhos (de forma correta) obtendo sempre o mesmo resultado, mas não concluiu a questão. Assim, inferimos que o aluno tentou aplicar o Teorema dos Caminhos, mas não conseguiu concluir. Essa e outas dificuldades em aplicar esta propriedade serão discutidas mais adiante.

No item (b) foram consideradas "parcialmente corretas" aquelas respostas nas quais o aluno substituiu as variáveis (x, y) por (1, 1) na função, verificando que o denominador tende a zero e concluiu que o limite é infinito (mas não verificou os sinais + ou – infinito) ou concluiu que o limite não existe (sem dar explicações). Portanto, trata-se de uma dificuldade em lidar com a divisão por zero em situações de limite.

No item (c), foram consideradas "parcialmente corretas" aquelas respostas nas quais o aluno utilizou corretamente o Teorema dos Caminhos, calculou o limite de forma correta, mas cometeu o seguinte erro: considerou que $\sqrt{2x^2} = x\sqrt{2}$, ao invés de $\sqrt{2x^2} = |x|\sqrt{2}$, ao calcular o limite ao longo do caminho $S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = x\}$. Portanto, cometeu um erro algébrico, que, por sua vez, não implicou em contradições na resposta final do problema.

Na Tabela 3 apresentamos as categorias de erros que emergiram da análise das respostas consideradas incorretas.

Tabela 3
Distribuição dos erros cometidos pelos alunos na Questão 2.

Categorias	Número de ocorrências por item				N. Total
	a	b	c	d	
C8) Aplicou de forma incorreta o Teorema dos Caminhos.	23	30	4	18	**75**
C9) Errou a propriedade do limite envolvendo o produto de dois fatores.	7	0	9	5	**21**
C10) Usou estratégias inadequadas e ou desnecessárias considerando que não há indeterminação no problema.	0	7	0	0	**7**
C11) Substituiu (x, y) por valores próximos a $(1,1)$ na função e concluiu que o limite não existe porque os limites laterais são diferentes.	0	2	0	0	**2**
C12) Não reconheceu a indeterminação do tipo 0/0, inferindo que o limite, neste caso, é zero ou não existe.	4	0	8	11	**23**
C13) Considerou que o limite de uma função racional, cujo numerador tende a uma constante diferente de zero e o denominador tende a zero, é igual a zero.	8	2	0	6	**16**
C14) Aplicou de forma incorreta a Regra de L'Hopital.	0	0	1	2	**3**
C15) No desenvolvimento da resolução assumiu que $\lim_{x \to 1} \frac{1}{x} = 0$.	0	3	0	0	**3**
C16) Errou ao efetuar operações algébricas.	3	4	7	7	**21**
C17) Iniciou estratégias, mas não concluiu a questão ou não apresentou o desenvolvimento da solução.	17	8	15	14	**54**

Considerando os diversos tipos de erros identificados na resolução dessa questão, queremos discutir de modo especial aqueles pertencentes à categoria C8, os quais evidenciam dificuldades em aplicar o Teorema dos Caminhos e ocorreram em quantidades notáveis. Correspondem, em sua maioria, a dois tipos de encaminhamentos: (i) o aluno aplicou o limite ao longo de caminhos inadequados; ou (ii) calculou os limites ao longo de dois caminhos diferentes (de forma correta ou não) e obteve resultados iguais, por isso concluiu que o limite da função corresponde ao valor-limite encontrado.

Dizemos que o caminho é inadequado para o Teorema dos Caminhos quando a função não está definida no conjunto (exceto possivelmente no ponto (a, b)) ou quando o ponto (a, b) (para $(x, y) \to (a, b)$) não é um ponto de acumulação do conjunto. Por exemplo, no item (a), os caminhos $S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = 0\}$ e $S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = 0\}$ e são inadequados porque a função $f(x,y)=\dfrac{2x^2+y^2}{x^4y^4}$ não está definida nesses conjuntos. Por outro lado, os caminhos $S_3=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x=1\}$ e $S_4=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|y=1\}$ são inadequados, pois $(x,y)\to(0,0)$ e o ponto (0,0) não é ponto de acumulação desses conjuntos.

Em Stewart (2011) o conceito de ponto de acumulação não é definido. Mas observa que "existem infinitas maneiras de (x, y) se aproximar de (a, b) por uma quantidade infinita de direções e de qualquer maneira que se queira (veja a Figura 3 (5)) bastando que (x, y) se mantenha no domínio de f" (idem p.829). Portanto, é claro que devemos escolher um caminho que se aproxima arbitrariamente de (a, b) e que esteja contido no domínio de f. Além disso, o conceito de ponto de acumulação é discutido em outras referências bibliográficas da disciplina de Cálculo II, tais como Leithold (1994) e Guidorizzi (2012) e pode ter sido explorado em sala de aula.

Contudo, o mesmo cuidado não está explícito nos exemplos resolvidos das seções de limite e continuidade de funções dessas obras. Em Leithold (1994) por exemplo, ao tomar conjuntos arbitrários para aplicar o Teorema dos Caminhos não se verifica que o ponto (a, b) é ponto de acumulação de tais conjuntos. Este cuidado é feito em apenas um dos exemplos de Guidorizzi (2012). Por outro lado, em Stewart (2011) não se verifica se o caminho escolhido pertence ao domínio da função.

Essas observações também não aparecem nas respostas dos alunos. Isso nos induz a concluir que "verificar se o caminho escolhido pertence ao domínio da função" ou "verificar se o ponto (a, b) é um ponto de acumulação do conjunto escolhido" não constituem o conceito imagem de limite de funções de várias variáveis desses alunos. Possivelmente, o mesmo ocorre com estudantes que acertaram as questões por terem sido felizes nas suas escolhas, já que não demonstraram tais cuidados em seus registros escritos.

Além disso, todos os exemplos dessas obras tomam limites com $(x,y)\to(0,0)$, e com isso, os caminhos escolhidos sempre passam pela origem. Desse modo, o aluno pode ter como parte de seu conceito imagem de limite que os caminhos que passam pela origem sempre podem ser utilizados. Isso pôde ser verificado nas respostas do item (b), no qual temos $(x,y)\to(1,1)$. Verificamos que 22 alunos tomaram caminhos inadequados, dos quais 13 tomaram caminhos que passam pela origem, tais como: $S_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|y=0\}$ $S_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x=0\}$, $S_5=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x=2y\}$, $S_6=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x=3y\}$, $S_7=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x=y/2\}$ ou $S_8=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x=-y\}$ sendo que em duas respostas o aluno usou a notação $\gamma(t)=(0,t)$ da mesma forma em que o assunto é abordado em Guidorizzi (2012).

Uma outra possibilidade é que eles podem generalizar as situações, repetindo aqueles caminhos que foram usados em diversos exemplos. Em nossa pesquisa de doutorado, ainda em andamento, constatamos que para resolverem situações-problemas de Cálculo Diferencial Integral os alunos preferem consultar exemplos resolvidos em seu material de estudo ao invés da teoria formal envolvida, conforme relatamos em Vidotti e Kato

(2017). Sendo assim, estes exemplos resolvidos no livro didático e aqueles resolvidos em sala de aula, exercem forte influência na forma como os estudantes aprendem.

Tall e Li (1992), ao investigarem a introdução dos conceitos de sequência, série e limites por meio de um ambiente computacional que usava programação, constataram que "os alunos desse curso não evocam o conceito definição para fazer matemática, em vez disso eles evocam um conceito imagem, a partir de suas experiências" (p.5, tradução nossa).

Desse modo, entendemos que as fórmulas usadas para descreverem os caminhos utilizados para calcular limites fazem parte do conceito imagem de limite de funções de várias variáveis dos alunos e são evocados na resolução de problemas, ao invés de evocarem o conceito definição, que, como pudemos observar na Questão 1, envolve a noção de "aproximação" e, portanto, não poderia admitir o uso de caminhos que não se aproximam do ponto (*a, b*). Em vista disso, consideramos que a escolha de caminhos para calcular o limite é um possível fator de conflito potencial da teoria de limite de funções de várias variáveis, pois foram identificadas nessa pesquisa conceitos imagem em desacordo com o conceito definição formal.

Por outro lado, o segundo tipo de encaminhamento (calculou os limites ao longo de dois caminhos diferentes e obteve resultados iguais, por isso concluiu que o limite da função corresponde ao valor-limite encontrado) evidencia a evocação do conceito imagem "o limite da função corresponde ao limite restrito a um ou dois caminhos" que, por sua vez, não é incoerente, pois pode ser que o limite seja esse. Mas faltaram argumentos para confirmar ou refutar a afirmação. Nesses casos, o aluno deveria ter usado a definição formal para demonstrar a sua suspeita. Esse é mais um indício de que o conceito definição de limite é inativo na estrutura cognitiva destes sujeitos, visto que eles não procuraram aplicá-la em suas soluções.

A categoria C9 corresponde aos erros cometidos na aplicação da propriedade: "Se $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=0$ e se $|g(x,y)|\leq M$ para $0<\|(x,y)-(a,b)\|<\mathrm{r}$, onde $r>0, M>0$ são reais fixos, então $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)\cdot g(x,y)=0$" (Guidorizzi, 2011, p.166). Essa propriedade possui versão equivalente para o limite de funções de uma única variável e alguns autores, como Leithold (1994) e Stewart (2011), apenas mencionam a sua validade para o caso das funções de várias variáveis, bem como outras propriedades de limites de funções. Em Guidorizzi (2011) há um exemplo que mostra apenas de forma algébrica a sua aplicação. Assim, é compreensível que o aluno tenha dificuldades em formar imagens mentais relacionadas a ela, especialmente para verificar se a função *g* é limitada, cuja noção passa a ser explorada no espaço tridimensional.

Todos os alunos que tentaram utilizar a propriedade referida na Questão 2 cometeram erros, visto que as respostas para esses itens são todas diferentes de zero. Esses erros, em sua maioria, consistiram em escolher um fator (função) não limitado para formar o produto de dois fatores. Aqueles que tentaram provar que a função é limitada, apresentaram apenas um limitante inferior, conforme apresentado na Figura 7, o que evidencia a formação de um conceito imagem restrito para a noção de função limitada.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^3}{8x^{12}+6x^4} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^3y^3 \cdot \frac{1}{8x^{12}+6x^4} = 0 \text{, pois, sendo } 8x^{12}+6x^4 \geq 0 \text{ então}$$

$$\frac{1}{8x^{12}+6x^4} > 0 \text{, logo é limitada e } \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^3y^3 = 0 .$$

Figura 7. Resposta do aluno M34.

Alguns estudantes não evocaram nenhuma das propriedades discutidas anteriormente. Tentaram manipular as funções, multiplicando e/ou dividindo os seus termos pelas variáveis x ou y, ou por polinômios formados por elas antes de aplicar o limite diretamente. Isso gerou alguns erros algébricos, contabilizados na categoria C16. Algumas dessas estratégias foram consideradas válidas. Entretanto, alguns estudantes as utilizaram no item (b), o que, por sua vez, não resulta em uma indeterminação matemática, logo, não requer a utilização destes tipos de estratégias, contabilizadas na categoria C10.

Desse modo, os erros atribuídos à categoria C10 denotam indícios de que as estratégias utilizadas para eliminar indeterminações matemáticas no cálculo de limite constituem imagens mentais muito fortes para esses sujeitos a ponto de serem aplicadas em situações inadequadas. Ao nosso olhar, remetem imagens formadas a partir do cálculo de limite de funções de uma única variável, e que não formaram conflitos cognitivos nesses indivíduos, por isso continuam a repetir o erro.

Os erros contabilizados nas categorias C12, C13, C14, C15 e alguns dos erros algébricos (C16) foram cometidos nos cálculos de limites ao longo de caminhos na aplicação do Teorema dos Caminhos, logo, refletem dificuldades em limites de funções de uma única variável que não constituem o foco principal deste trabalho. Contudo, podemos apontar algumas pesquisas que também constataram esses tipos de erros: Cury (2003), Cavasotto (2010) e Pereira Filho (2012). Além desses, Domingos (2003), Abreu (2011) e Soares e Cury (2017) investigaram os conceitos imagem e definição de limite embora não tenham estabelecido relações com esses tipos de erros.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Retomando nossos objetivos iniciais que consistiram em "investigar possíveis causas para os erros cometidos pelos estudantes do curso de Licenciatura em Matemática em um teste sobre limite de funções de várias variáveis, através dos elementos teóricos: conceito imagem e conceito definição", discorremos aqui sobre os resultados que corroboram para a ampliação das discussões acerca do processo de aprendizagem do Cálculo.

Analisando o desenvolvimento da teoria de limite de funções de várias variáveis, em um dos livros disponíveis aos estudantes, encontramos indícios de que o pressuposto

$f(x, y) \neq L$ para qualquer $(x, y) \in D$ poderia constituir um fator de conflito potencial e isto pôde ser verificado nas respostas de alguns estudantes ao explicarem os seus entendimentos sobre o conceito de limite. Entretanto, esse resultado aparentemente não respondia a nossa investigação, porque não observamos relações entre esse fator e os erros cometidos pelos alunos nas demais questões do teste.

Contudo, outros fatores de conflitos potenciais puderam ser identificados, tais como: a proximidade entre os conceitos de limite e continuidade e a escolha de caminhos para aplicar o Teorema dos Caminhos no cálculo do limite, sendo que esse último se manifestou com uma frequência considerável nas respostas dos estudantes e pode ser considerado como causa para aqueles erros que consistiram em tomar caminhos inadequados para calcular o limite.

Além disso, constatamos conceitos imagem inapropriados de função e de função limitada, os quais parecem estar causando dificuldades na formação do conceito imagem de limite de funções de várias variáveis, além de provocar erros relacionados a aplicação de uma propriedade de limite que envolve o produto de dois fatores, no qual um deles tende a zero e o outro é limitado.

Outro fato observado diz respeito à definição formal de limite, que se mostrou inativa na estrutura cognitiva dos sujeitos, visto que constou de forma correta em apenas seis dos conceitos definição dos estudantes e não foi utilizada para resolver as demais questões do teste.

Essas conclusões apontam para possibilidades nas quais o professor pode auxiliar os alunos a formarem conceitos imagem apropriados de limite de funções de várias variáveis, estando atento sobretudo a esses fatores de conflitos potenciais. Segundo Tall e Vinner (1981) o professor também pode mostrar imagens incorretas para que se discuta e racionalize o problema. No entanto, essa tarefa não é simples, visto a complexidade deste conceito. Além disso, segundo os autores

> [...] em níveis avançados é muito mais difícil de visualizar os conceitos como imagens mentais e o aluno pode não ter certeza das intuições sugeridas pelo seu conceito imagem, que pode ser uma mistura do conceito imagem forte com conflitos potenciais com o conceito definição. Essas dificuldades em formar o conceito imagem apropriado, pode impedir o desenvolvimento de uma teoria formal na mente do indivíduo. (Tall & Vinner, 1981, p.167, tradução nossa)

Para além dessa afirmação, nossas conclusões remetem também para a importância do papel do professor nesse processo de ampliação das imagens mentais apropriadas do conceito de limite de funções de várias variáveis, principalmente porque, como vimos, a forma como os livros didáticos apresentam esse tema não são suficientemente abrangentes para atingir tal objetivo sozinhos.

Além disso, conforme aponta Alves (2011), alguns livros didáticos, tais como, Leithold (1999) e Guidorizzi (2004), não exploram as ligações entre os conceitos de Cálculo em uma variável e do Cálculo em várias variáveis, o que constitui mais um aspecto a ser observado pelo professor em sala de aula, pois como vimos nessa pesquisa, muitos dos erros cometidos pelos alunos se estendem do Cálculo em uma variável.

REFERÊNCIAS

Abreu, O. H. (2011) *Discutindo algumas relações possíveis entre intuição e rigor e entre imagem conceitual e definição conceitual no ensino de limites e continuidade em Cálculo I.* Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, UFOP, Ouro Preto.

Alves, F. R. V. (2011) *Aplicações da Sequência Fedathi na promoção das categorias do raciocínio intuitivo no Cálculo a Várias Variáveis.* Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza.

Artigue, M. (1991) Analisys. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer, Dordrecht, 167-198.

Bisognin, E. & Bisognin, V. (2017, jul./dez.) Como professores em formação continuada compreendem o conceito de limite. *Vidya*, Santa Maria, *37*(2), 355-365.

Cavasotto, M. (2010) *Dificuldades na aprendizagem de Cálculo*: o que os erros cometidos pelos alunos podem informar. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Faculdade de Física, PUCRS, Porto Alegre.

Cury, H. (2003) Análise de erros em cálculo diferencial e integral: resultados de investigações em cursos de engenharia. *Anais do Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia*, 31, Rio de Janeiro: PUCRJ.

Cury, H. N. & Cassol, M. (2004, junho) Análise de erros em Cálculo: uma pesquisa para embasar mudanças. *Acta Scientiae,* Canoas, *6*, 27-36.

Cury, H. N. (2008) *Análise de erros:* o que podemos aprender com as respostas dos alunos**.** Belo Horizonte: Autêntica.

Domingos, A. M. D. (2003) *Compreensão de conceitos matemáticos avançados:* a matemática no início do superior. Tese (Doutorado em Ciências de Educação) – Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa, Lisboa.

Duval, R. (1995) *Sémiosis et Pensée Humaine:* registres sémiotiques et apprentissages intellectuels, Editeur: Peter Lang, 1995.

Fonseca, L. (Org.) (2016) *Didática do Cálculo:* epistemologia, ensino e aprendizagem. São Paulo: Editora Livraria da Física.

Guidorizzi, H. L. (2012) *Um Curso de Cálculo* (Vol. 2, 5ª Ed.) Rio de Janeiro: LTC.

Leithold, L. (1994) *O Cálculo com Geometria Analítica* (Vol. 2, 3ª Ed.). São Paulo: Harbra Ltda.

Pereira Filho, A. D. (2012) *Análise de erros produzidos por estudantes de um curso de Engenharia Civil na disciplina de Cálculo diferencial e integral I.* Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Luterana do Brasil, Canoas.

Radatz, H. (1979, May) Error analysis in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 10*(3), 163-172.

Soares, G. O. & Cury, H. N. (2017, dezembro) O conteúdo de limite em cursos de Licenciatura em Matemática: uma pesquisa à luz da teoria dos Três Mundos da Matemática. ReBECEM, Cascavel, PR, *1*(1), 64-83.

Stewart, J. (2011) *Cálculo* (Vol. 2, 6ª Ed.), São Paulo: Cengage Learning.

Tall, D. O. & Li, L. (1992) Constructing Different Concept Images of Sequences & Limits by Programming. *Proceedings of the Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 17, (Vol. 2), Tsukuba. Disponível em: <http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1993e-lan-li-pme.pdf> Acesso em: 21/03/2018.

Tall, D. O. & Vinner, S. (1981) Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity, *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.

Vidotti, D. B. & Kato, L. A. (2017) Atividades de Modelagem Matemática oportunizando a prática como componente curricular na disciplina de cálculo II**.** *Anais da Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática*, 10, Maringá: UEM.