ACTA SCIENTIAE



**ISSN**: 2178-7727
**DOI:** 10.17648/acta.scientiae.v21iss3id3940

# Uma Investigação dos Polinômios Bivariados e Complexos de Fibonacci Amparada na Engenharia Didática: uma Aplicação da Teoria das Situações Didáticas

Rannyelly Rodrigues de Oliveira [a]
Francisco Régis Vieira Alves [b]

[a] Governo do Estado do Ceará, Secretaria da Educação, Rede Estadual de Ensino do Ceará, Fortaleza, CE, Brasil.
[b] Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Limoeiro do Norte, CE, Brasil.

*Recebido para publicação em 12 abr. 2018. Aceito, após revisão, em 1 out. 2018.*
*Editor designado: Claudia Lisete Oliveira Groenwald.*

**RESUMO**

Será apresentado um recorte da pesquisa realizada no Mestrado Acadêmico do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PGECM) do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE). Essa investigação usou a Engenharia Didática com enfoque na Teoria das Situações Didáticas, evidenciando elementos epistemológicos, cognitivos e didáticos articulados entre si. O que possibilitou mobilizar o pensamento intuitivo do aluno em direção ao raciocínio inferencial durante o estudo dos Polinômios Bivariados e Complexos de Fibonacci. Além do mais, teve a finalidade de inserir uma concepção epistemológica no ensino de História da Matemática, tendo em vista que a pesquisa foi aplicada no curso de Licenciatura em Matemática na disciplina de História da Matemática.

**Palavras-chave:** Engenharia Didática. Teoria das Situações Didáticas. Polinômios Bivariados e Complexos de Fibonacci. Didática da Matemática.

## An Investigation of the Bivariate Complex Fibonacci Polynomials Supported in Didactic Engineering: An Application of Theory of Didactics Situations

**ABSTRACT**

A research cut will be presented in the Academic Master of the Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PGECM) of the Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE). This research used Didactic Engineering with a focus on the Theory of Didactic Situations, evidencing epistemological, cognitive and didactic elements articulated among themselves. This made it possible to mobilize the student's intuitive thinking towards inferential reasoning during the study of the Bivariate Complex Fibonacci Polynomials. Moreover, it had the purpose of inserting an epistemological conception in the teaching of History of Mathematics,

Autor correspondente: Rannyelly Rodrigues de Oliveira. E-mail: nanny-rockstar@hotmail.com

considering that the research was applied in the course of Degree in Mathematics in the discipline of History of Mathematics.

**Keywords:** Didactic Engineering. Theory of Didactic Situations. Bivariate Complex Fibonacci Polynomials. Didactics of Mathematics.

## INTRODUÇÃO

As pesquisas, que investigam os conceitos matemáticos e como eles estão dispostos no plano pedagógico, contribuíram para a criação de um campo científico: a Didática da Matemática. Esse fato, segundo Alves (2016, p.132), possibilitou observar a existência de várias tendências de ensino e "percepções sobre os paradigmas canônicos seguidos na formação em Matemática, que passaram a ser revistos".

Por outro lado, Alves (2016b) explica que na construção dos conceitos matemáticos surgiram "hiatos históricos", que representam a inércia epistemológica no desenvolvimento do conhecimento científico. Ou seja, numa abordagem histórico-evolutiva das relações matemáticas, houve um tempo em que os conceitos não evoluíram. Esses hiatos são verificados quando se faz uma revisão bibliográfica nos livros de História da Matemática, os quais possuem uma abordagem escassa dos conceitos matemáticos inerentes ao modelo de Fibonacci. (Alves & Borges Neto, 2011).

À vista disso, justifica-se a pesquisa apresentada neste artigo e que foi desenvolvida norteada pela seguinte questão: como realizar situações didáticas que possibilitam explorar as propriedades e definições oriundas do modelo de Fibonacci a fim de se compreender, no contexto epistemológico, a representação generalizada dos Polinômios Bivariados e Complexos de Fibonacci?

Dessa forma, essa pesquisa teve a finalidade de oportunizar a formação de uma concepção epistemológica no ensino de História da Matemática. Essa concepção está associada à exploração de teoremas e propriedades do modelo de Fibonacci em aulas de História da Matemática, explicitando a evolução e generalização das relações matemáticas. Para isso, a fase de experimentação desta pesquisa foi realizada na disciplina de História da Matemática no curso de Licenciatura em Matemática do IFCE.

Além do mais, este artigo apresenta um recorte da pesquisa, sobre o processo de complexificação do Modelo de Fibonacci, realizada no Mestrado Acadêmico do PGECM–IFCE e que assume os aspectos epistemológicos, cognitivos e didáticos como pressupostos. Nesse sentido, essa pesquisa, como parte da dissertação de Mestrado de Oliveira (2018), segue uma estrutura metodológica fundamentada na Engenharia Didática com enfoque na Teoria das Situações Didáticas. Assim, é relevante mencionar que o projeto desta pesquisa foi submetido ao Comitê de Ética em Pesquisa (CEP), obtendo o parecer aprovado (número do parecer: 2.701.969).

Isso favoreceu a criação de um cenário de ensino, onde foram realizadas situações didáticas, efetivadas pelo contrato didático entre docentes e alunos, que instiga o desenvolvimento do raciocínio inferencial do estudante durante a compreensão de conceitos matemáticos que são inseridos na pedagogia através da transposição didática. Ademais, pretende-se com este recorte, publicizar uma investigação, que até então é feita apenas na Matemática Pura, dos Polinômios Bivariados e Complexos de Fibonacci amparada numa teoria de ensino no contexto da Didática da Matemática.

Ainda sobre a pesquisa, é válido comentar que na dimensão epistemológica, a qual diz respeito à estrutura matemática do que se pretende ensinar, têm-se os elementos relacionados ao processo histórico e evolutivo do processo de generalização do modelo de Fibonacci com ênfase nas representações polinomiais e matriciais no contexto dos Polinômios Bivariados e Complexos de Fibonacci. No plano cognitivo e didático, considera-se a situação onde os estudantes aprendem, isto é, como assimilam e acomodam os conteúdos ensinados na sala de aula. A seguir, será discutida a Didática da Matemática.

## DIDÁTICA DA MATEMÁTICA NUMA VERTENTE FRANCESA

Na França nos anos 70, estava ocorrendo a reforma da Matemática Moderna, que ganhou destaque a partir da criação dos IREMs (*Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques*)*,* Instituto de Pesquisa sobre Ensino de Matemática, e do bom reconhecimento dos trabalhos de Piaget sobre as teorias psicológicas relacionadas ao desenvolvimento da inteligência. Esse fato favoreceu o surgimento da Didática da Matemática (DM) como uma área científica de pesquisa, cujo escopo principal é investigar "os problemas de ensino de conceitos matemáticos em razão das exigências próprias do saber matemático" (Almouloud, 2007, p.25-26). Para isso, essas pesquisas possuem enfoques nas dimensões epistemológica, cognitiva e didática (Artigue, p.98, 1995).

Nesse sentido, Pais (2002, p.9) compreende que a DM abrange aspectos relacionados ao ensino de Matemática, dando ênfase às dificuldades surgidas no processo de aprendizagem dos conceitos matemáticos. "Como consequências, observamos a evolução de teorias que buscaram tornar controlável, reprodutível e previsível, determinadas transposições didáticas e/ou abordagens estruturadas de ensino" (Alves, 2016c, p.2).

As pesquisas enfatizam os obstáculos identificados durante a construção epistemológica dos conceitos. Nesse contexto, Alves (2016c, p.9) acentua que por "intermédio de um movimento dialético, característico de sua evolução e sistematização, divisamos um *corpus* teórico que parte da Matemática, adquire uma robustez científica e tem capacidade de voltar a se aderir, mais uma vez, à Matemática".

Além do mais, esses conceitos têm sua gênese no campo científico da Matemática Pura e são inseridos por educadores nos ambientes pedagógicos. Por isso, é válido entender que essa transposição didática envolve elementos de ordem epistemológica, cognitiva e didática. O que serão evidenciados a seguir.

### Aspectos Epistemológicos, Cognitivos e Didáticos da DM

A DM abrange aspectos epistemológicos, cognitivos e didáticos. Assim, na concepção de Almouloud (2007, p.149), a epistemologia incorpora a estrutura, onde os conceitos científicos estão organizados, desse modo, é feita uma análise desde sua gênese histórica até sua evolução e como esses conceitos são manifestados e assimilados pelos indivíduos durante a fase de construção dos conceitos. Desse modo:

> A análise epistemológica apoia-se no desenvolvimento histórico do conceito. Assim, permite identificar as diferentes concepções sobre um determinado objeto, como também permite agrupá-las em classes pertinentes para que se possa fazer uma análise didática. Esse tipo de análise pode auxiliar o pesquisador em didática da matemática a entender melhor as relações entre os objetos matemáticos e controlar as variáveis didáticas relacionadas com o processo de ensino e aprendizagem de tais objetos. (Almouloud, 2007, p.156)

Além do mais, Almouloud (2007, p.152) explica que a análise epistemológica é uma investigação dos conceitos matemáticos e de sua fundamentação. Todavia, os problemas ligados à gênese dos conceitos, só passaram a ser objeto de estudo após séculos de aplicação dos conceitos como suporte na resolução de questões. Conforme Alves (2016a, p.137), o "terreno epistêmico" explorado pelo pesquisador exige atenção, "pois tendo em vista sua natureza, obstáculos e entraves, muitas vezes intransponíveis, podem surgir. E, nesse contexto é que falamos de um obstáculo epistemológico".

Podem-se categorizar os obstáculos em duas classes: uma composta pelas dificuldades manifestadas pelos alunos no processo de ensino e aprendizagem e a outra que abrange os entraves que aparecem na construção dos conceitos matemáticos no campo científico. Contudo, os obstáculos epistemológicos não representam a ausência de conhecimento, mas sim uma estagnação quanto à sua reformulação e resistência da aceitação do desenvolvimento de outras formas de representação. Nesse sentido, Pais (2002, p.39) afirma que existem pessoas, as quais compreendem essas mudanças como uma ameaça à "[...] estabilidade intelectual de quem detém o conhecimento".

Por outro lado, segundo Bachelard (1996, p.18-19), o conhecimento oriundo da construção científica pode se desgastar ocasionando a formação de "um obstáculo epistemológico que se incrusta no conhecimento não questionado". Embora Bachelard defenda que a Matemática seja a única área que não teve obstáculos epistemológicos, de modo que essa noção só se aplica às ciências naturais (experimentais), a noção bachelardiana influenciou Brousseau na elaboração de suas teses sobre obstáculos e entraves presentes em situações de ensino e aprendizagem, assim, Brousseau considera os aspectos didáticos que são ignorados nos estudos de Bachelard.

Os obstáculos são fatores relevantes quando se pesquisa o processo histórico e evolutivo de determinados conceitos matemáticos. Assim, o desenvolvimento dos conceitos matemáticos é evidenciado em duas etapas: a etapa inicial, onde são descobertas as noções axiomáticas da Matemática e a etapa final, onde se apresenta um texto produzido, que registra os conceitos construídos. No entanto, os obstáculos surgidos nesse momento de produção são dificilmente identificados historicamente, ou seja, “os avanços, retrocessos, dúvidas e erros cometidos na etapa em que as conjecturas são feitas pelo matemático, praticamente, desaparecem no resultado final apresentado pelo texto científico” (Pais, 2002, p.41).

A validade dos conceitos matemáticos, responsáveis por teoremas e propriedades, é verificada, na maioria das vezes, por métodos de indução. Vale comentar que apesar do pensamento generalizado poder se comportar como um obstáculo no desenvolvimento da Matemática deve-se compreender que, “[...] a técnica da indução matemática não se baseia em uma lógica indutiva. A observação de casos particulares não serve para fundamentar uma demonstração, no máximo, pode sugerir uma conjectura” (Pais, 2002, p.48).

> Nesse âmbito, vale a advertência do caráter epistemológico que reside em imprimir ao raciocínio do estudante, o caráter monossêmico e inferencial, característico das teorias formais. [...] Assim como os teoremas e as teorias fundantes, que conferem seu caráter de certeza, se mostram entrelaçadas com uma “teia epistêmica” de concepções e saberes que não são negligenciados pela Didática da Matemática. (Alves, 2016a, p.140-141)

Nesse sentido, Pais (2002, p.45) acentua que o desenvolvimento epistemológico do conhecimento científico só acontece quando se consegue superar as barreiras que limitavam o conhecimento até então estabelecido como verdade absoluta. Desse modo, segundo Pais (2002, p.44-45), os obstáculos epistemológicos surgem no contexto histórico, social e cultural. Com isso, numa abordagem cognitiva e histórica, Artigue (1995, p.113) explica que os obstáculos epistemológicos existem na sala de aula e são categorizados em operacional e estrutural, a primeira relacionada à aprendizagem da estrutura matemática e a outra associada à compreensão do contexto e processo que permitiu a construção dos conceitos matemáticos.

Assim, pode-se estabelecer uma relação entre a epistemologia e a cognição, pois os obstáculos surgem, primeiramente, na estrutura cognitiva do sujeito e, consequentemente, exercem influência no desenvolvimento do conhecimento científico, proporcionando o aparecimento dos obstáculos epistemológicos. À vista disso, na dimensão cognitiva, os obstáculos didáticos são subclassificados como ontogênicos e psicológicos. Na concepção de Brousseau (1976, p.108), os obstáculos ontogênicos são originados a partir das deficiências neuropsicológicas dos indivíduos quando estão diante de uma situação de aprendizagem. Assim:

> A epistemologia genética coloca em evidencia os estágios, as acomodações e o processo de assimilação (*assimilations),* que às vezes, se assemelham às etapas de desenvolvimento dos conceitos pela lei de regulação que os fazem aparecer,

> e que diferem da natureza exata das limitações que determinam essa regulação. (Brousseau, 1976, p.108, tradução nossa)

Além do mais, podem-se apontar os obstáculos psicológicos em situações que contradizem as concepções de senso comum dos sujeitos, assim, induzindo-os a "uma desestabilização inaceitável, como, por exemplo: a lógica matemática não é a lógica da vida do dia-a-dia" (Almouloud, 2007, p.144).

Considerando que os obstáculos cognitivos são evidenciados no contexto didático, pode-se compreender que a DM abrange elementos epistemológicos, cognitivos e didáticos a fim de investigar procedimentos metodológicos que permitam a transposição dos conceitos matemáticos do plano epistemológico para o pedagógico. À vista disso, Almouloud (2007, p.141-142) descreve que os obstáculos didáticos são gerados no momento da transposição didática, ou seja, são identificados em situações de ensino, nas quais o estudante expressa dificuldade em aprender ou quando questiona a validade dos conceitos abordados. Assim:

> Por exemplo, a apresentação atual dos decimais no nível elementar é o resultado de uma longa evolução no contexto de uma escolha educacional (*didactique*) [...]. Dada sua utilidade, os números decimais seriam ensinados o mais rápido possível, associados a um sistema de mesura e em referência às técnicas de aplicação em um todo. Assim, hoje, os decimais são, para os alunos, "inteiros naturais com uma mudança de unidade", tão "naturais" (com uma vírgula) e medida. E este projeto, apoiado por uma mecanização do aluno, irá criar obstáculos até o D.E.U.G[1]. É característico que o principal fator de discriminação dos alunos em um questionário recente (IREM de Rouen) seja o cálculo que envolve tanto decimal como os produtos de uma potência de dez. Assim, é a "compreensão" mesma da definição dos decimais que explica os comportamentos dos alunos. Mas, atualmente, esse obstáculo torna-se, às vezes, didático e sociocultural. (Brousseau, 1976, p.108, tradução nossa)

Dessa forma, Alves (2016a, p.141) explica que no contexto do ensino de Matemática, a didática abordada pelo professor deve considerar as "vivências e idiossincrasias particulares que proporciona ao aprendiz a origem de um repertório amplo de situações-problema que permitam-no explorar e, paulatinamente, elaborar e reelaborar construções e modelos mentais de ação eficazes", a fim de internalizar conceitos matemáticos.

Numa dialética entre didática e cognição, Alves (2016a, p.143) descreve que o estudante elabora dois tipos de mapas mentais para se explorar uma situação-problema. O primeiro mapa possui um "*corpus* teórico" específico pelo qual o aluno é orientado a formular suas conjeturas. Enquanto, o outro apresenta um aspecto intrínseco da estrutura

[1] Primeiro período do ensino superior (Nota dos Autores).

cognitiva do aluno, isto é, o pensamento intuitivo que é expresso quando o aluno se empenha a resolver alguma situação-problema.

Por fim, compreende-se que a investigação na DM enfatiza os obstáculos que, de acordo com Pais (2002, p.44), surgem na interseção do campo científico com o plano didático, assim, evidenciando aspectos epistemológicos, cognitivos e didáticos. A seguir, serão discutidos como esses aspectos estão articulados na ED em complementaridade com a Teoria das Situações Didáticas (TSD).

**A Inserção da Teoria das Situações Didáticas na ED**

No início de 1980, o contexto de pesquisas no campo da DM contribuiu para que Artigue (1995) criasse uma metodologia de pesquisa, que ficou conhecida como Engenharia Didática, essa nomenclatura, segundo Pais (2002, p.100), faz referência às etapas de concepção, elaboração e execução de um projeto desenvolvido por um engenheiro.

Artigue (1995, p.36-37) explica que a ED é um percurso metodológico experimental fundamentado em situações de ensino, com ênfase na sala de aula, onde se podem realizar sequências didáticas, as quais são concebidas, observadas e analisadas considerando duas tipologias: a microengenharia inerente aos fenômenos da sala de aula e a macroengenharia, que abrange os aspectos metodológicos e institucionais para a execução de situações didáticas.

Nesse sentido, a ED é estruturada em quatro etapas consecutivas: análises preliminares, concepção e análise *a priori*, experimentação e análise *a posteriori* e validação. Almouloud e Silva (2012, p.26) descrevem que nas análises preliminares é realizada uma "análise epistemológica do ensino atual e seus efeitos, das concepções dos alunos, dificuldades e obstáculos, e análise do campo das restrições e exigências no qual vai se situar a efetiva realização didática". Além disso, é feita uma revisão bibliográfica sobre os conceitos matemáticos que se pretende explorar nas situações de ensino.

Na etapa de concepção e análise *a priori*, segundo Artigue (1995, p.42-43), o pesquisador determina um conjunto de variáveis relacionadas ao objeto em estudo. Essas variáveis de comando são classificadas como variáveis macrodidáticas, estas estão associadas à estrutura geral da ED e as microdidáticas, que se referem a um subconjunto local da ED, isto é, à organização de uma situação específica.

Nesse sentido, Pommer (2013, p.22) recomenda que os conceitos a serem investigados em sala de aula devem ser apresentados aos alunos sob a forma de situações-problema, que permitam ao aluno a participar ativamente do seu processo de aprendizagem, sentindo-se estimulados a desenvolverem sua autonomia na elaboração de estratégias de soluções e, assim, considerando seus conhecimentos prévios e intuitivos.

À vista disso, compreende-se aplicar uma metodologia fundamentada numa teoria de ensino focada no estudante. Assim, Pais (2002, p.69-70) explica que as situações-problema podem oportunizar ao estudante desenvolver seu conhecimento partindo de suas concepções prévias e intuitivas. Isso caracteriza uma aprendizagem por adaptação. Esse cenário serviu de inspiração para que Brousseau pudesse conceber a TSD, com ênfase na aproximação dos "esquemas de assimilação e acomodação, que foram descritos inicialmente por Piaget".

Destarte, a TSD se insere na ED, principalmente, nas fases de concepção, análise *a priori*, experimentação e análise *a posteriori*. Assim, a TSD é organizada como um sistema de situações didáticas elaboradas para serem aplicadas em ambientes de ensino a fim de analisar o comportamento dos estudantes. Ou seja, "o objeto central de estudo nessa teoria não é o sujeito cognitivo, mas a situação didática na qual são identificadas as interações estabelecidas entre professor, aluno e saber" (Almouloud, 2007, p.31-32).

Nesse sentido, a TSD apresenta quatro etapas: ação, formulação, validação e institucionalização. Na etapa de ação, o aluno tem a liberdade de pensar em uma estratégia de solução partindo de seus conhecimentos prévios e intuitivos, assim, podendo definir e redefinir sua suposta trajetória para resolução do problema proposto (Almouloud, 2007, p.37). Na formulação, o estudante apresenta uma estratégia de solução, na qual ele vai elaborar conjecturas para serem validadas ou refutadas na etapa posterior. Desse modo, o aluno mobiliza um raciocínio de natureza teórica, apresentando em suas produções uma linguagem mais elaborada (Pais, 2002, p.72). Na validação, conforme Pais (2002, p.73), acontece a verificação da validade dos argumentos formulados, neste momento, o aluno já deve ter internalizado os conceitos matemáticos, apresentando, assim, um raciocínio inferencial e utilizando métodos de demonstração matemática. Além disso,

> Um problema de validação é mais um problema de comparação, de avaliação e de rejeição de evidências e da investigação da demonstração. [...] Para as uma abordagem de validação, o pensamento deve basear-se em formulações anteriores. A linguagem desenvolvida, na dialética da formulação, é menos específica do que a da validação. A comunicação desempenha um papel importante em parte independente das questões de validade. (Brousseau, 1976, p.110, tradução nossa)

Retomando as fases da ED, tem-se a experimentação, onde acontecem as situações de ensino, através da proposta de situações-problema. Essa aplicação é seguida de uma análise *a posteriori*, a qual aborda a discussão dos dados coletados durante a experimentação, essa coleta é feita com o uso de alguns recursos externos como: questionários, entrevistas, dentre outros (Artigue, 1995, p.48).

Além do mais, Artigue (1995, p.48) explica que na fase de validação da ED, acontece a comparação entre as análises *a priori* e *a posteriori* a fim de validar a hipóteses da pesquisa. Dessa forma, a validação é interna, no que diz respeito à experiência na sala de aula, estando vinculada às variáveis de comando e ao "estado epistemológico da didática". A eficiência das situações didáticas com enfoque na TSD ocorre devida à efetivação da transposição didática e do contrato didático. O que será discutido a seguir.

### Transposição Didática e Contrato Didático

A transposição didática é responsável por articular elementos das dimensões epistemológica e cognitiva. Nesse sentido, vale compreender que o conceito de transposição didática foi concebido por Chevallard a fim de se distinguir os conhecimentos de natureza apenas científica dos escolares. Além do mais, a transposição didática parte de uma análise epistemológica dos conhecimentos, que são categorizados em: matemáticos e paramatemáticos que estão relacionados à investigação de conceitos matemáticos e os protomatemáticos, os quais apresentam propriedades para resolver problemas matemáticos (Almouloud, 2007, p.113). Dessa forma:

> A transformação do conteúdo de saber em uma versão didática desse objeto de saber, mais apropriadamente, é chamado de *transposición didáctica stricto sensu*. Mas, o estudo científico do processo de transposição didática (que é uma dimensão fundamental da didática da Matemática) implica tendo em conta a transposição didática *sensu lato*, representada pelo esquema: objeto de saber $\Longrightarrow$ objeto para ensinar $\Longrightarrow$ objeto de ensino. O primeiro elo que marca a passagem do implícito para o explícito, da prática à teoria, do pré-construído para construído. (Chevallard, 1998, p.45, tradução nossa)

Depois que os conceitos matemáticos são transpostos para o plano didático, é relevante efetuar um contrato didático entre docentes e discentes. Nesse contexto, Almouloud (2007, p.89) descreve que o contrato didático abrange as situações de ensino, nas quais se pretende construir a compreensão de determinados conceitos matemáticos. Assim, a situação didática só acontece se houver engajamento dos professores, no planejamento e na aplicação das situações, e alunos na resolução das situações-problema propostas.

Portanto, no contrato didático, ficam definidas as funções tanto do professor como do aluno. No caso da TSD, as três etapas iniciais de ação, formulação e validação são realizadas pelo estudante, podendo o professor intervir, enquanto a institucionalização é efetivada pelo professor. Por conseguinte, será apresentada a fase de análises preliminares da pesquisa sobre a investigação dos Polinômios Bivariados e Complexos de Fibonacci.

## ANÁLISES PRELIMINARES INERENTES AOS POLINÔMIOS BIVARIADOS E COMPLEXOS DE FIBONACCI

As análises preliminares abrangem um conjunto de elementos epistemológicos, cognitivos e didáticos. Nesse sentido, se tem uma análise epistemológica dos conceitos matemáticos que se pretende ensinar, das concepções dos estudantes, do ensino tradicional e de sua repercussão e dos entraves que surgem no desenvolvimento histórico dos conceitos matemáticos (Artigue, 1995, p.38).

À vista disso, a pesquisa descrita neste artigo tem o escopo de investigar o processo de complexificação do Modelo de Fibonacci (MF), com ênfase na classe dos Polinômios Bivariados e Complexos de Fibonacci (PBCF). Assim, no contexto epistemológico da Matemática, é feita uma revisão bibliográfica sobre as representações polinomiais do MF. Desse modo, inicia-se o levantamento bibliográfico, pelos trabalhos de Brother (1963), Hoggatt e Long (1974), Witford (1977), Asci e Gurel (2012) e Alves (2017).

Considerando a epistemologia do MF, King (1963) descreve que o modelo Fibonacciano teve sua gênese a partir da problematização da reprodução de coelhos, tal situação-problema, proposta por Leonardo Pisano em 1202, tem sua resolução representada pela sequência $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, ....\}$. Atualmente, esse modelo matemático é descrito pelo "aparato notacional moderno" $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \forall n \in \mathbb{N}$ com $f_0 = 0$ e $f_1 = 1$, descrito por Alves e Catarino (2017).

Dessa forma, no processo de desenvolvimento histórico do MF, pode-se compreender uma evolução da sequência de Fibonacci (SF), no que diz respeito ao surgimento de outras formas generalizadas do MF, evidenciadas nas representações polinomiais e matriciais. Nesse sentido, a introdução da unidade imaginária *i* e de variáveis no modelo recursivo unidimensional de Fibonacci caracterizou a extensão do modelo para o contexto dos polinômios, registrada a partir da década de 70.

Além do mais, os primeiros trabalhos sobre os polinômios Fibonaccianos foram propostos por Ernest Erich Jacobsthal (1881-1965) e Eugene Charles Catalan (1814-1894) em 1983. Por conseguinte, as sequências dos polinômios de Fibonacci e dos PBCF são apresentadas por Asci e Gurel (2012). Veja:

**Definição 1.** A sequência polinomial de Fibonacci é dada pela relação recursiva:

$$f_n(x) = x \cdot f_{n-1}(x) + f_{n-2}(x) \text{ com } f_1(x) = 1, f_2(x) = x \text{ e } n \geq 1.$$

**Definição 2.** A sequência dos PBCF $\{F_n(x, y)\}_{n=0}^{\infty}$ é descrita pela relação de recorrência:

$$F_{n+1}(x, y) = ix \cdot F_n(x, y) + F_{n-1}(x, y) \text{ com } F_0(x, y) = 0,\ F_1(x, y) = 1 \text{ e } n \geq 1.$$

Além disso, para se explorar o comportamento da matriz tridiagonal da Figura 2, Asci e Gurel (2012) destacam:

**Teorema 1.** $\det D_n(x, y)_{nxn} = f_n(x, y),\ n \geq 0$ e $\det D_0(x, y) = 0$.

Ainda no contexto PBCF, é apresentada uma fórmula análoga de Binet, explorada por Witford (1977):

**Fórmula análoga de Binet.** $f_n(x, y) = \dfrac{\alpha^n(x, y) - \beta^n(x, y)}{\alpha(x, y) - \beta(x, y)}$, para $n \geq 0$.

Partindo da investigação desses conceitos matemáticos inerentes ao MF, foram selecionadas algumas definições e propriedades, a fim de serem exploradas em situações de ensino, tendo em vista a transposição da Matemática Pura para o plano didático com a finalidade de oportunizar aos alunos a compreensão da construção dessas relações. Para isso, é necessário instigar a mobilização do pensamento intuitivo do aluno em direção ao raciocínio inferencial. Dessa forma, as situações didáticas propostas nessa pesquisa e discutidas a seguir possuem um enfoque na TSD.

## A TSD NA CONCEPÇÃO E NA ANÁLISE *A PRIORI* DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

As situações didáticas foram concebidas com fundamentação na TSD, pois essa teoria de ensino tem a finalidade de estimular o cognitivo do aluno no sentido de desenvolver um conhecimento matemático teórico, através da realização das fases de ação, formulação e validação. Para a elaboração das situações-problema, foi selecionada a classe dos PBCF, assim, as situações propostas possuem um propósito implícito de trabalhar a validade de propriedades oriundas do MF.

Doravante, serão descritas as situações-problema elaboradas, seguidas de sua análise *a priori* com enfoque na TSD, evidenciando a predição de possíveis comportamentos que os alunos possam manifestar durante as fases de ação, formulação e validação, e também do posicionamento do professor na fase final de institucionalização. A seguir, tem-se a primeira situação-problema.

Quadro 1
*Situação-problema (1).*

| |
|---|
| (1) De acordo com essa tabela, pede-se para verificar se existe alguma relação da mesma com a sequência (0,1,1,2,3,5,8,13, 21,...), caso compreenda que sim, explicá-la detalhadamente, em seguida, determine outros dos termos presentes na SPBCF. |

A tabela mencionada no enunciado do Quadro 1 se refere aos termos iniciais da sequência dos PBCF dispostos na Figura 1. Desse modo, na fase de ação, partindo de tentativas, espera-se que o estudante determine uma relação entre a SF e a sequência de termos do tipo $f_n = (x, y)$ (Figura 1), a fim de identificar cada elemento da segunda sequência como uma representação polinomial da SF e, assim, obtenha uma relação recursiva para os PBCF.

Na situação de formulação, os alunos devem recorrer à definição $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$, para $n \geq 1$ para escrever $f_{n+1}(x, y) = ixf_n(x, y) + yf_{n-1}(x, y)$, com $n \geq 1$, dando ênfase à inserção da unidade imaginária *i* e das variáveis *x* e *y*. Na validação, usando a expressão bivariada da SF, explorada na fase anterior, deve-se determinar alguns termos da sequência dos PBCF.

| $n$ | $F_n(x,y)$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| 2 | $ix$ |
| 3 | $-x^2+y$ |
| 4 | $-x^3i+2xyi$ |
| 5 | $x^4-3x^2y+y^2$ |
| 6 | $x^5i-4x^3yi+3y^2xi$ |
| 7 | $-x^6+5x^4y-6x^2y^2+y^3$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ |

*Figura 1.* Termos iniciais da sequência dos PBCF. (Asci & Gurel, 2012).

Ademais, na institucionalização, o professor deve retomar a situação didática e conferir as produções dos alunos, a fim de resignar uma extensão da SF através dos PBCF. Adiante, a situação-problema (2) (Quadro 2) apresenta uma abordagem matricial para os PBCF com o propósito de averiguar a matriz tridiagonal (Figura 2) proposta por Asci e Gurel (2012).

Quadro 2
*Situação-problema (2).*

| |
|---|
| (2) [...] tem-se uma matriz proposta por Asci & Gurel (2012). Explique, com suas palavras, a função e propriedades dessa matriz, inclusive, seu comportamento para as ordens 2x2, 3x3. 4x4, 5x5, 6x6, etc. Além disso, considere o teorema $\det D_n(x,y)_{nxn} = f_n(x,y), n \geq 0$. |

A segunda situação-problema, no momento de ação, deve ser resolvida partindo da reflexão sobre os aspectos da matriz proposta, com isso os estudantes devem sugerir a descrição das matrizes quadradas buscando uma compreensão generalizada da matriz, além disso, é valido discutir como supostamente essa matriz pode ser classificada, tendo em vista que Asci e Gurel (2012) a definem como tridiagonal. Na fase de formulação, os alunos devem calcular os determinantes das matrizes construídas na fase anterior, além de compreender que os termos da matriz são os mesmos da sequência dos PBCF. Assim, os alunos podem apresentar um argumento mais elaborado e formal com a finalidade de propor um modelo matemático que se aproxime do teorema $\det D_n(x,y)_{nxn} = f_n(x,y), n \geq 0$ para $D_0(x,y) = 0$.

$$D_n(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & ix & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -y & ix & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & -y & ix \end{bmatrix}, \quad n \geq 1$$

*Figura 2.* Matriz tridiagonal. (Asci & Gurel, 2012).

Assim, na validação, espera-se que os estudantes utilizem um raciocínio inferencial, como a indução matemática, para avaliar a validade do modelo matemático formulado, podendo recorrer à definição $f_{n+1}(x,y) = ixf_n(x,y) + yf_{n-1}(x,y)$ com $n \geq 1$ e partindo dos valores iniciais $f_0(x,y) = 0$ e $f_1(x,y) = 1$. Por fim, a institucionalização possibilita que o docente sistematize e reconheça, através da generalização, a validade de $D_0(x,y) = 0 \Rightarrow \det D_n(x,y)_{nxn} = f_n(x,y),\ n \geq 0$.

Quadro 3

*Situação-problema (3).*

| |
|---|
| (3) A Fórmula de Binet conhecida por $f_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ foi formulada por Jacques-Phillipe-Marie Binet (1786-1856). Existe uma fórmula análoga para a classe dos PBCF? Caso exista, deduzir a mesma. Considere a equação $t^2 - ixt - y = 0$. |

Vale comentar que, durante as resoluções das questões, o aluno pode recorrer aos conhecimentos construídos na resolução dos problemas anteriores. Por conseguinte, durante a resolução da situação-problema (3), no momento de ação, o estudante deve tentar reescrever a Fórmula de Binet inserindo as variáveis *x* e *y*. Dessa forma, na dialética da formulação, os alunos devem sugerir a reescrita de $f_{n+1}(x,y) = ixf_n(x,y) + yf_{n-1}(x,y)$ para $n \geq 1$, em função da fórmula variante de Binet $f_n(x,y) = \dfrac{\alpha^n(x,y) - \beta^n(x,y)}{\alpha(x,y) - \beta(x,y)}$, para $n \geq 0$.

Além do mais, no contexto da validação, deve-se verificar a fórmula variante de Binet para o índice $n+1$, assumindo um raciocino de natureza teórica como, por exemplo, o método de indução matemática e com isso obter $f_{n+1}(x,y) = \dfrac{\alpha^{n+1}(x,y) - \beta^{n+1}(x,y)}{\alpha(x,y) - \beta(x,y)}$ com $n \geq 0$. Finalmente, o professor deve institucionalizar, ou seja, formalizar que de fato existe uma representação análoga à fórmula de Binet para os PBCF.

Quadro 4

*Situação-problema (4).*

| |
|---|
| (4) [...] ao comparar a coluna da esquerda com a coluna da direita, é possível interpretar e significar uma perspectiva histórica e evolutiva da sequência concebida por Leonardo Pisano em 1202? |

A coluna citada no enunciado da situação-problema (4) refere-se à tabela da Figura 9. Assim, na fase de ação, espera-se que o aluno compare as duas colunas (Figura 9) e compreenda que as propriedades abordadas no contexto dos PBCF se tratam de uma extensão do modelo de Fibonacci. No momento de formulação, os estudantes devem sugerir que houve um "hiato histórico" no processo de construção de modelos generalizados de Fibonacci. Contudo, pode-se observar que houve uma evolução do modelo de Fibonacci a partir da sua extensão para índices negativos e da inserção de representações matriciais, funções geradoras e da fórmula variante de Binet, dentre outras relações.

A validação dessa situação apresenta uma perspectiva histórica, pela qual se espera que o estudante compreenda que essa questão dar ênfase à extensão do MF através da introdução da unidade imaginária *i* e das variáveis *x* e *y* no MF, caracterizando assim um processo de complexificação do modelo. Essa concepção é formalizada, na institucionalização, pelo professor ao relatar que, na dimensão epistemológica, a sequência (0,1,0,2,3,5,8,13,21,...) modelizada por Leonardo Pisano passa por um processo evolutivo-histórico, o qual é explorado por meio da classe dos PBCF.

Quadro 5
*Situação-problema (5).*

| |
|---|
| (5) argumente e deduza qualquer propriedade da sequência de Fibonacci e que possa ser relacionada com o modelo dos Polinômios Bivariados e Complexos de Fibonacci. Justifique essa relação. Considere a equação $x^2 - x - 1 = 0$. |

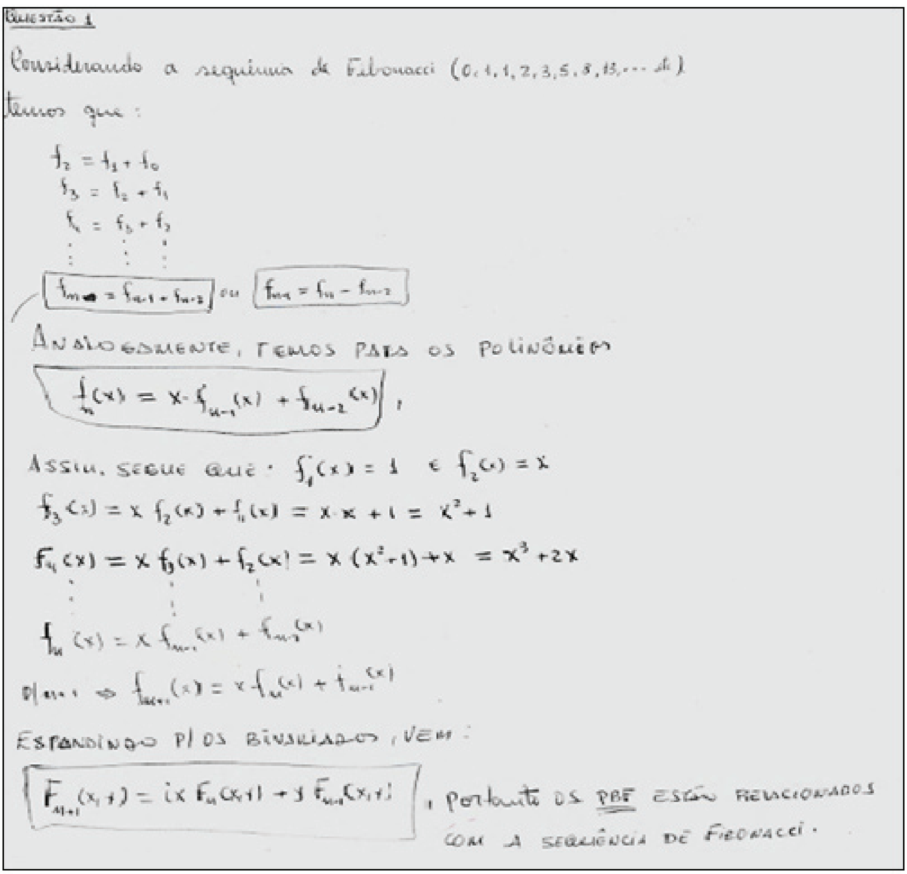
A situação-problema (5) tem a finalidade de oportunizar ao aluno a compreensão da construção matemática das propriedades oriundas da complexificação do MF. Desse modo, no momento de ação, os estudantes devem selecionar uma propriedade da classe dos PBCF. Supondo que as propriedades escolhidas fossem $f_{-n} = (-1)^{n+1}.f_n$ e $f_{-n}(x,y) = \frac{-f_n(x,y)}{(-y)^n}$. Assim, para deduzi-las, o aluno deve recorrer à definição $f_{n+1}(x,y) = ixf_n(x,y) + yf_{n-1}(x,y)$, para $n \geq 1$, argumentando que essa recursividade valida algumas relações derivadas do MF, como por exemplo, $f_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \Rightarrow f_n(x,y) = \frac{\alpha^n(x,y) - \beta^n(x,y)}{\alpha(x,y) - \beta(x,y)}$, para $n \geq 0$.

Na fase formulação, uma das sugestões dos alunos deve ser a reescrita das propriedades selecionadas em função, respectivamente, da Fórmula de Binet e de sua fórmula variante. Desse modo, espera-se que essas duas fórmulas sejam verificadas para índices negativos a fim de determinar as propriedades $f_{-n} = (-1)^{n+1}.f_n$ e $f_{-n}(x,y) = \frac{-f_n(x,y)}{(-y)^n}$. Com isso, na institucionalização, deve-se formalizar que a primeira propriedade é intrínseca da SF, enquanto a outra é uma extensão dos PBCF. A seguir, serão descritos os momentos de aplicação e analisados os dados coletados durante a experimentação.

## A TSD NA EXPERIMENTAÇÃO E ANÁLISE *A POSTERIORI* DOS DADOS

O trabalho abordado neste artigo é um recorte de uma pesquisa que foi aplicada na disciplina de História da Matemática, do curso de Licenciatura em Matemática do IFCE. Vale salientar que os momentos de ensino e aprendizagem foram realizados utilizando a TSD como metodologia de ensino. Assim, prosseguindo na estrutura da ED, nesta seção, os dados obtidos nas situações didáticas foram analisados com enfoque na TSD evidenciando as suas etapas de ação, formulação, validação e institucionalização.

Dessa forma, quanto à situação-problema (1), nas etapas de ação e formulação, o aluno $A_1$ (Figura 3) buscou estabelecer uma relação entre a SF e a sequência $(0, 1, ix, -x^2+y, -x^3i+2xyi, x^4-3x^2y+y^2, \ldots)$, obtendo a relação de recursividade $f_{n+1}(x,y) = ixf_n(x,y) + yf_{n-1}(x,y)$ para $n \geq 1$. Nesse sentido, para validar sua estratégia de solução, o estudante $A_2$ realizou algumas contas (Figura 4) aplicando $f_{n+1}(x,y) = ixf_n(x,y) + yf_{n-1}(x,y)$, para $n \geq 1$.com isso ele determinou um termo da sequência dos PBCF.


QUESTÃO 1

Considerando a sequência de Fibonacci (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... etc)

temos que:

$f_2 = f_1 + f_0$

$f_3 = f_2 + f_1$

$f_4 = f_3 + f_2$

$\vdots$

$\boxed{f_{n} = f_{n-1} + f_{n-2}}$ ou $\boxed{f_{n+1} = f_n - f_{n-2}}$

Analogamente, temos para os polinômios

$\boxed{f_n(x) = x \cdot f_{n-1}(x) + f_{n-2}(x)}$,

Assim, segue que: $f_1(x) = 1$ e $f_2(x) = x$

$f_3(x) = x f_2(x) + f_1(x) = x \cdot x + 1 = x^2 + 1$

$f_4(x) = x f_3(x) + f_2(x) = x(x^2+1) + x = x^3 + 2x$

$\vdots$

$f_n(x) = x f_{n-1}(x) + f_{n-2}(x)$

p/ $n+1 \Rightarrow f_{n+1}(x) = x f_n(x) + f_{n-1}(x)$

Estendendo p/ os bivariados, vem:

$\boxed{F_{n+1}(x,y) = ix F_n(x,y) + y F_{n-1}(x,y)}$, portanto os PBF estão relacionados com a sequência de Fibonacci.

*Figura 3.* Fase de ação e formulação: relação entre a SF e os PBCF.

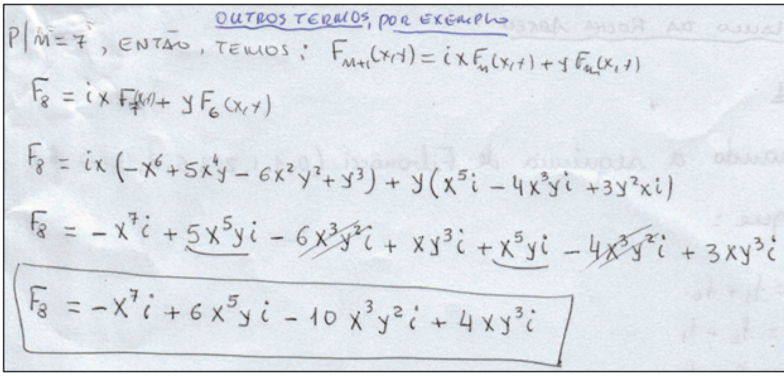



*Figura 4.* Fase de validação: determinação de um termo da sequência dos PBCF.

Por conseguinte, na resolução da situação-problema (2), os alunos se depararam com uma matriz (Figura 2), assim, como um comportamento de ação e no sentido de determinar uma nomenclatura para a matriz proposta por Asci e Gurel (2012), tem-se o comentário:

> *Aluno $A_3$: [...] Essa matriz proposta por esses estudiosos vão originar os Polinômios Bivariados. A matriz diagonal é aquela que todos os elementos que não estão na diagonal principal são zero. Comparando aqui, essa tem três "camadas" como sendo três diagonais [...].*

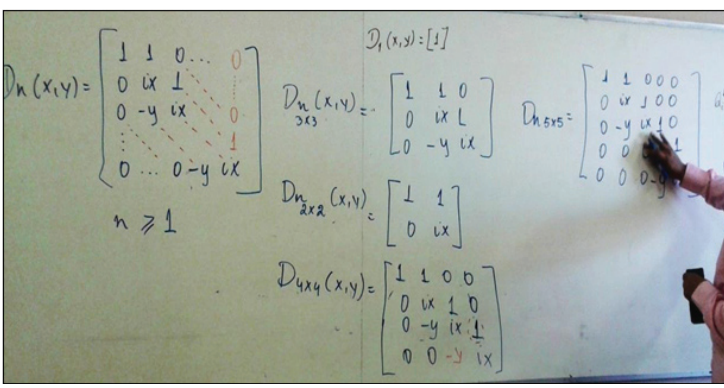



*Figura 5.* Fase de ação: comportamento da matriz tridiagonal quadrada.

Além do mais, na Figura 5, pode-se observar que $A_3$ buscou explorar o comportamento da matriz. Enquanto, na formulação, o estudante $A_1$ (Figura 6) sugere que o determinante de cada matriz quadrada é um termo da sequência dos PBCF, desse modo, é abordado o teorema $\det D_n(x,y)_{nxn} = f_n(x,y), n \geq 0$ com $D_0(x,y) = 0$.

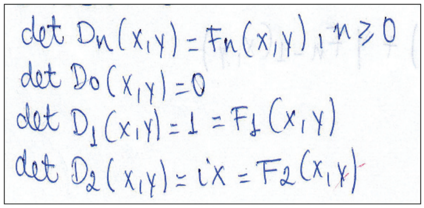



*Figura 6.* Fase de formulação: relação do determinante da matriz com os PBCF.

Na situação de validação, foi observado que muitos estudantes estavam acompanhando a construção das relações matemáticas, assim, alguns alunos avaliaram a validade do Teorema 1 por indução matemática. Um aspecto desse processo é evidenciado na introdução do passo indutivo (Figura 7) na demonstração do Teorema 1.

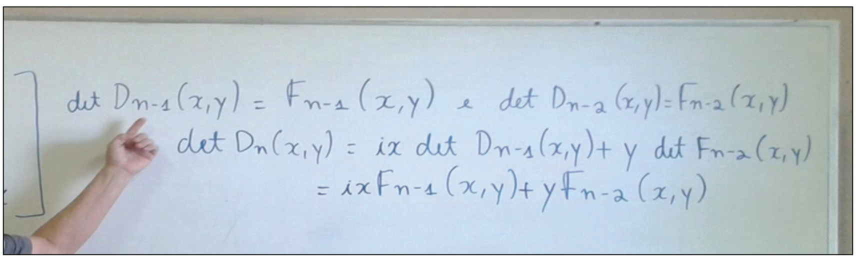



*Figura 7.* Passo indutivo na demonstração do Teorema 1.

A situação-problema (3) oportuniza os alunos a explorarem a Fórmula de Binet no contexto dos polinômios com duas variáveis. Desse modo, na etapa de ação, foi proposta a reescrita da fórmula de Binet na forma $f_n(x,y) = \frac{\alpha^n(x,y) - \beta^n(x,y)}{\alpha(x,y) - \beta(x,y)}$, para $n \geq 0$. Assim, na formulação, a equação característica $t^2 - ixt - y = 0$ foi explorada, a fim de se obter relações oriundas das suas raízes: $\alpha(x,y) = \frac{ix + \sqrt{4y - x^2}}{2}$ e $\beta(x,y) = \frac{ix - \sqrt{4y - x^2}}{2}$.

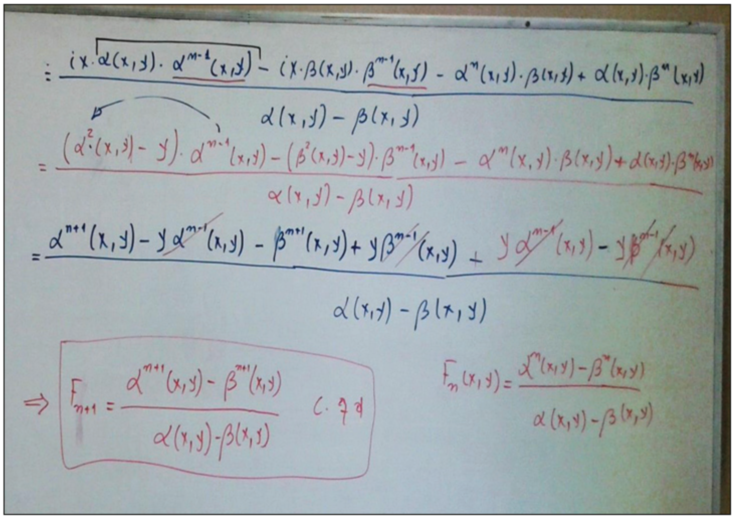



*Figura 8.* Parte da demonstração da fórmula variante de Binet.

No processo de validação, os alunos verificaram a fórmula variante de Binet para o índice $n+1$, obtendo $f_{n+1}(x,y) = \dfrac{\alpha^{n+1}(x,y)-\beta^{n+1}(x,y)}{\alpha(x,y)-\beta(x,y)}$ para $n \geq 0$. Na Figura 8, está explícita uma demonstração matemática feita pelo aluno $A_1$.

O esquema comparativo entre a SF e a sequência dos PBCF foi explorado na situação-problema (4). Nesse sentido, na ação (Figura 10), o aluno $A_3$ explica que ao comparar as colunas da tabela (Figura 9) é possível considerar que o esquema trata de um levantamento bibliográfico das propriedades inerentes ao MF, representando a sua extensão. Prosseguindo, na formulação (Figura 11), o estudante $A_2$ identificou a existência de um “hiato histórico” nas pesquisas sobre a generalização do MF, observado nas datas de registro das propriedades.

| Descrição histórica | Propriedades dos polinomios bivariados de Fibonacci |
|---|---|
| $f_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ Fórmula fornecida por Jacques-Phillipe-Marie Binet (1786 – 1856). | $F_n(x,y) = \dfrac{\left(\alpha^n(x,y) - \beta^n(x,y)\right)}{\alpha(x,y) - \beta(x,y)}$ Fórmula variante de Binnet |
| $g(t) = \dfrac{t}{1-t-t^2}$ Abraham De Moivre (1667–1754) empregou a noção de função geradora ao modelo de Fibonacci. | $g(t) = \dfrac{t}{1-ix\cdot t - y\cdot t^2}$ Função geradora do modelo PBF |
| $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Representação matricial estudada em 1960, por Charles King (GOULD, 1981) | $Q_i(x,y) = \begin{pmatrix} ix & y \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Representação matricial introduzida por Asci & Gurel (2013). |
| $f_{-n} = (-1)^{n+1} f_n$ Processo de extensão da SF ao campo dos índices inteiros discutida por Broussseau (1963) | $F_{-n}(x,y) = \dfrac{-F_n(x,y)}{(-y)^n}$ Processo de extensão da SPF ao campo dos índices inteiros |
| $f_{n-1} f_{n+1} - f_n^2 = (-1)^n$ Identidade formulada por Domênico Cassini (1625 – 1712) | $F_{n-1}(x,y)F_{n+1}(x,y) - F_n(x,y)^2 = (-1)^n y^{n-1}$ Fórmula variante de Cassini fornecida por Asci & Gurel (2013). |
| $f_m \backslash f_n \Leftrightarrow m \backslash n$ Caso de divisibilidade relacionadas com a SF | $\mathrm{F}_m(\mathrm{x},\mathrm{y}) \backslash \mathrm{F}_n(\mathrm{x},\mathrm{y}) \Leftrightarrow \mathrm{m} \backslash \mathrm{n}$ Divisibilidade dos PBF introduzidas por Jacob; Reutenauer & Sakarovitch (2006) |
| $mdc(\mathrm{F}_n(\mathrm{x},\mathrm{y}), \mathrm{F}_{n+1}(\mathrm{x},\mathrm{y})) = 1$ Caso de divisibilidade relacionadas com a SF | $mdc(\mathrm{F}_n(\mathrm{x},\mathrm{y}), \mathrm{F}_{n+1}(\mathrm{x},\mathrm{y})) = 1$ Divisibilidade dos PBF introduzidas por Jacob; Reutenauer & Sakarovitch (2006) |
| $\begin{cases} H_0(x,y) = a_0, \mathrm{H}_1(x,y) = a_1, \\ H_{n+1}(x,y) = x\cdot H_n(x,y) + y\cdot H_{n-1}(x,y) \end{cases}$ Polinômios bivariados introduzidos por Catalani em 2004. | $\begin{cases} F_0(x,y) = 0, \mathrm{F}_1(x,y) = 1, \\ F_{n+1}(x,y) = ix\cdot F_n(x,y) + y\cdot F_{n-1}(x,y) \end{cases}$ Forma complexa dos PBF introduzidos por Asci & Gurel (2012; 2013) |

*Figura 9.* Esquema comparativo entre a SF e a sequência dos PBCF. (Alves & Catarino, 2017).

Logo, os polinomios de Fibonacci foram estudados (ou definidos) pela 1ª vez 188;
pelo matematico belga Eugene Charles Catalan (1814-1894) pelo matemático
Alemão Ernest Erich Jacobsthal (1881-1965). Ele definiu as funções
Polinomiais de Fibonacci $\{F_1(x) = 1;\ F_2(x) = x;\ F_n(x) = x\cdot F_{n-1}(x) + F_{n-2}(x),\ n \geq 1\}$.
Em 2012 Asci e Gurel, se interessou pelo estudo de lucas, em 1970, o Green
Trabalhos de Bicknell (1970), registrou a seguinte ~~[illegible]~~ recorrência $L_0(x) = 2;$
$L_1(x) = x;\ L_n(x) = x\cdot L_{n-1}(x) + L_{n-2}(x)$. ou Temos também $\begin{cases} F_0(x,y) = 0;\ F_1(x,y) = 1 \\ F_{n+1}(x,y) = ix\cdot F_n(x,y) + y\cdot F_{n-1}(x,y) \end{cases}$

*Figura 10.* Fase de ação: interpretação histórico-evolutiva do MF.

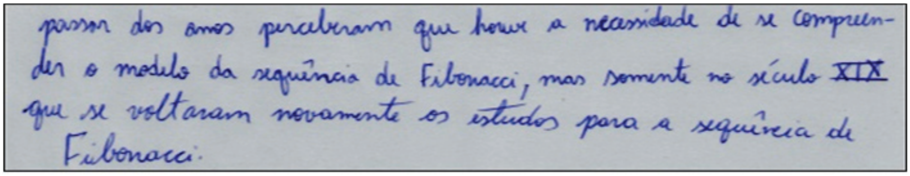



*Figura 11.* Fase de formulação: “hiato histórico” do MF.

Dessa forma, a fim de validar os argumentos elaborados, o aluno $A_5$ explicou que na história dos conceitos da SF existe uma evolução evidenciada com a inserção da unidade imaginária *i* e de variáveis no MF e os PBCF representam uma tipologia generalizada do modelo na forma complexa. Essa concepção é enfatizada a seguir:

> *Aluno $A_5$: [...] a fórmula da primeira é muito básica, elementar. Na segunda ele aperfeiçoou o que já existia, acrescentou as variáveis, agora dá pra trabalhar com polinômios a partir dessas fórmulas. Na última linha, ele já trabalhava com polinômios só que aí no Fibonacci, ele vai trabalhar nos complexos. Sempre tendo uma extensão [...].*

Concluindo a sequência de atividades, na situação-problema (5), em sua fase de ação, os alunos recorreram à Figura 9 para selecionar as propriedades. Assim, alguns alunos decidiram explorar as identidades $f_{-n} = (-1)^{n+1}.f_n$ e $f_{-n}(x,y) = \frac{-f_n(x,y)}{(-y)^n}$.

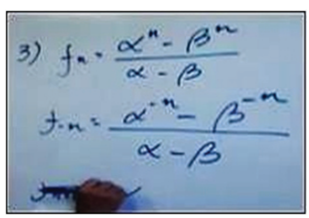


*Figura 12.* Fase de formulação: Fórmula de Binet.

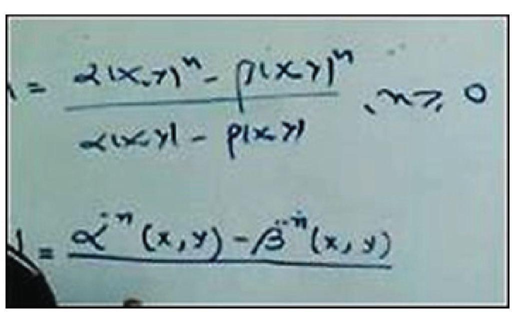


*Figura 13.* Fase de formulação: fórmula variante de Binet.

Nesse contexto, na formulação (Figuras 12 e 13), os alunos exploraram a fórmula de Binet e de sua variante, a fim de obter as identidades selecionadas. Por fim, na validação (Figura 14), os estudantes conseguiram demonstrar as duas fórmulas para índices negativos.

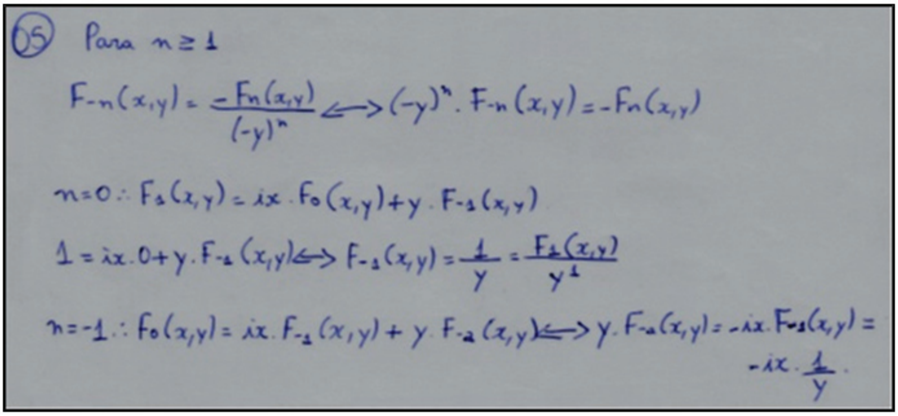



*Figura 14.* Fase de validação: propriedade inerente aos PBCF.

Finalmente, vale comentar sobre a institucionalização feita pelo professor-pesquisador ao final da resolução de cada situação-problema. Neste momento, são analisadas as produções dos alunos a fim de organizar, através de um raciocínio generalizador, o conhecimento construído. Assim, na situação-problema (1), consegue-se compreender a classe dos PBCF como uma forma generalizada do MF, na situação (2), consegue-se validar o Teorema 1 e na situação (3), se extrai uma fórmula variante de Binet para os PBCF. Na situação (4), foi formalizado o processo de complexificação do MF com ênfase na classe dos PBCF a partir da inserção da unidade imaginária *i* e de variáveis. Na última situação, as propriedades (Figura 9) dos PBCF são generalizadas como uma extensão do MF. Doravante, será discutida a validação desta pesquisa.

## VALIDAÇÃO INTERNA

A validação da pesquisa é feita internamente, conforme a ED, através dos resultados obtidos da análise da aplicação das situações didáticas. E, vale mencionar que não foi feita uma comparação dos dados coletados nesta pesquisa com produções externas a esta aplicação. O que caracteriza a validação interna desta pesquisa. Dessa forma, como o trabalho apresentado aqui se trata de uma parte de uma pesquisa, pode-se concluir que houve a validação das hipóteses didáticas específicas e inerentes ao estudo da classe dos PBCF, o que pode ser evidenciado através da construção e aprendizado de um modelo generalizado polinomial bivariado da SF, com ênfase na validade matemática de propriedades e teoremas investigados na sala de aula.

À vista disso, a TSD foi um fator relevante para a validação desta pesquisa. Numa perspectiva epistemológica, pode-se destacar que a institucionalização com enfoque na TSD feita pelo docente, evidenciou o êxito na construção das relações oriundas do MF através de demonstrações matemáticas. Todavia, na validação interna, além da investigação de definições e propriedades dos PBCF, foram considerados aspectos cognitivos e didáticos.

No plano didático, as situações didáticas oportunizaram a compreensão do processo de construção de propriedades e teoremas, com a mobilização do raciocínio generalizador, e o entendimento do processo evolutivo-histórico da SF. Desse modo, quanto à cognição, observou-se que durante as fases da ação, formulação e validação da TSD, alguns alunos conseguiram evoluir desenvolvendo um raciocínio inferencial.

Por fim, compreende-se que de fato, as aulas de História da Matemática, onde a pesquisa foi aplicada, foram abordadas numa perspectiva epistemológica no que diz respeito ao processo de complexificação do MF com ênfase na classe dos PBCF. Isso foi possível devido à efetivação do contrato didático entre o professor e os alunos diante das situações didáticas.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este artigo apresenta um recorte de pesquisa realizada no PGECM-IFCE e que investigou o processo de complexificação do modelo de Fibonacci, contudo, ficou restrito à classe dos PBCF. Compreende-se que as definições e teoremas explorados nessa pesquisa, têm sua origem na Matemática Pura, dessa forma, se fez necessário realizar uma transposição didática desses conceitos matemáticos para o plano pedagógico, a fim de serem ensinados aos alunos no curso de Licenciatura em Matemática.

À vista disso, pode se observar que as situações didáticas aplicadas com enfoque na TSD, incorporada à ED, possibilitou realizar um processo de aprendizagem das relações matemáticas seguindo, de modo implícito, a estrutura de uma demonstração matemática, e mobilizando um raciocínio inferencial. Assim, foi compreendido que o processo de construção do modelo Polinomial Bivariado e Complexo de Fibonacci representa uma generalização do modelo de Fibonacci, evidenciando seu processo histórico e evolutivo. Isso também oportunizou o desenvolvimento de uma concepção epistemológica no ensino de História da Matemática. Tal concepção está associada ao campo epistêmico-matemático, ou seja, ao estudo da estrutura algébrica de um modelo matemático não trivial. O que é pouco pormenorizado nas aulas de História da Matemática, as quais se limitam, na maioria das vezes, a discutir a biografia dos matemáticos e o contexto histórico em que as relações generalizadas surgiram.

## DECLARAÇÕES DE CONTRIBUIÇÃO DO AUTOR

F.R.V.A. supervisionou o projeto. R.R. de O. e F.R.V.A. concebeu a ideia apresentada. R.R. de O. desenvolveu a teoria. R.R. de O. adaptou a metodologia a esse contexto, criou os modelos, executou as atividades e coletou os dados. F.R.V.A. e R.R.

de O. analisaram os dados. Ambos os autores discutiram os resultados e contribuíram para a versão final do manuscrito.

## REFERÊNCIAS


Almouloud, S. A. & Silva, M. J. F. (2012) Engenharia didática: evolução e diversidade. *Revemat: R. Eletr. de Edução. Matemática,* Florianópolis, *7(2)*, 22-52.

Almouloud, S. A. (2007) *Fundamentos da didática da matemática.* Curitiba: UFPR.

Alves, F. R. V. & Alves Dias, M. (2017). Formação de professores de matemática: um contributo da engenharia didática (ED). *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, *12(2)*, 192–202.

Alves, F. R. V. & Catarino, P. M. M. C. (2017) A classe dos polinômios bivariados de Fibonacci (PBF): elementos recentes sobre a evolução de um modelo. *Revista Thema,14(1),* 112–136.

Alves, F. R. V. (2016a) Didática de Matemática: seus pressupostos de ordem epistemológica, metodológica e cognitiva. *Interfaces da Educ.,* Paranaíba, *7(21)*, p.131-150.

Alves, F. R. V. (2016b) Engenharia Didática para a generalização da sequência de Fibonacci: uma experiência num curso de licenciatura. *Educ. Matem. Pesq*., São Paulo, *18(1)*, 61-93.

Alves, F. R. V. (2016c) Engenharia didática (análises preliminares e análise *a priori*): o caso das equações diferenciais de segunda ordem. *Ensino de Ciências e Tecnologia em Revista, 6(2)*.

Alves, F. R. V. (2018). Engenharia Didática de Formação (EDF): sobre o ensino dos Números Generalizados de Catalan (NGC). *Educação Matemática Pesquisa*, *20(2)*, 47–83.

Alves, F. R. V. & Borges Neto, H. (2011) A existência de sequência de Fibonacci no campo dos inteiros: uma atividade de investigação apoiada nos pressupostos da Sequência Fedathi. *BOLETIM GEPEM.* n. 59, 135-140. [online] <http://www.ufrrj.br/SEER/index.php?journal=gepem&page=article&op=view&path%5B%5D=647>.

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., & Gómez, P. (Ed.). (1995) *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* Bogotá: una empresa docente & Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V.

Asci, M. & Gurel, E. (2012) On bivariate complex Fibonacci and Lucas Polynomials. *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, *18(1)*, 1–25.

Bachelard, G. (1996) *A formação do espírito científico: contribuição para uma psicanálise do conhecimento.* Tradução: Esteia dos Santos Abreu. Rio de Janeiro: Contraponto.

Brother, U. A. (1963) Exploring Fibonacci Numbers*. The Fibonacci Quarterly, 1(1)*, 57-64, February.

Brousseau, G. (1976) Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. In J. Vanhamme & W. Vanhamme (Eds.), La problématique et l'enseignement de la mathématiques. *Comptes rendus de la XXVIIIe rencontre organisée par la Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques.* Louvain-la-Neuve, p.101-117.

Chevallard, Y. (1998) *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado.* 3. ed. Argentina: Aique.
Hoggatt, V. E.; Long, C. T. (1974) Divisibility properties of generalized Fibonacci polynomials. *The Fibonacci Quarterly, 12(2)*, 113–121.
King, C. (1963) Leonardo Fibonacci. *The Fibonacci Quarterly. 1(4)*, 15–19, December.
Oliveira, R. R. (2018) *Engenharia Didática sobre o Modelo de Complexificação da Sequência Generalizada de Fibonacci: Relações Recorrentes n-Dimensionais e Representações Polinomiais e Matriciais.* Dissertação de Mestrado Acadêmico – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática – PGECM do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE. Fortaleza: IFCE. Disponível em: <http://pgecm.fortaleza.ifce.edu.br/apresentacao-do-programa/>
Pais, L. C. (2002) *Didática da Matemática: uma análise da influência francesa.* 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica.
Pommer, W. M. (2013) A *Engenharia Didática em sala de aula: Elementos básicos e uma ilustração envolvendo as Equações Diofantinas Lineares.* São Paulo.
Witford, A. K. (1977) Binet´s formula generalized. *The Fibonacci Quarterly, 15(1)*, 21–22, February.