Sobre o Ensino da Análise Combinatória: fatores a serem considerados, lacunas a serem evitadas

Renato Alves
Claudia Segadas

RESUMO

O objetivo deste artigo é relatar uma pesquisa sobre fatores que influenciam o ensino da análise combinatória, em especial o Modelo Combinatório Implícito (MCI), de Dubois (1984). Aplicamos um questionário a alunos da graduação em matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, e as respostas dos alunos foram analisadas usando o MCI e as técnicas mais usuais de contagem. Para cada questão, identificamos tipos de erros que foram classificados de acordo com Batanero, Navarro-Pelayo e Godino (1996). Ao final do artigo, apresentamos alguns dos resultados, bem como algumas recomendações para professores do ensino fundamental, ensino médio e ensino superior.

Palavras-chave: Análise Combinatória. Ensino. Matemática. Modelo Combinatório Implícito.

On the Teaching of Combinatorial Analysis: factors to be considered, gaps to be avoided

ABSTRACT

The aim of this paper is to describe a research on factors that can act on the teaching of combinatorial analysis, specially the Implicit Combinatorial Model (ICM), from Dubois (1984). We applied a questionnaire to undergraduate students in mathematics from Federal University of Rio de Janeiro, and the students' answers to it were analysed using the IMC and the most common count techniques. For each question, we identified types of mistakes that were classified according to Batanero, Navarro-Pelayo e Godino (1996). At the end of the paper, we present some of the results, as well as some recommendations for teachers from elementary school, high school or university.

Keywords: Combinatorial Analysis. Teaching. Mathematic. Implicit Combinatorial Model.

OBJETIVOS E JUSTIFICATIVAS

Nosso trabalho teve origem a partir da percepção das dificuldades que constatamos em nossos alunos em lidar com as técnicas de contagem da Análise Combinatória. Embora

---

Renato Alves é Mestre em Ensino de Matemática (UFRJ), professor de Matemática do Colégio Pedro II. Endereço para correspondência: Avenida Ministro Edgard Romero, 661 casa 10, Madureira – Rio de Janeiro, RJ – CEP: 21360-201 E-mail: alves.renatoc@gmail.com

Claudia Segadas é Doutora em Educação Matemática (Universidade de Londres), professora adjunta do Departamento de Métodos Matemáticos – Instituto de Matemática (UFRJ). Endereço para correspondência: Rua General Venâncio Flores, 481, apto. 501, Leblon – Rio de Janeiro, RJ – CEP: 22441-090.
E-mail: claudia@im.ufrj.br

os pré-requisitos sejam aparentemente poucos, boa parte dos alunos apresenta dificuldades como: leitura e interpretação do problema, perceber se é uma situação em que se deve somar ou multiplicar, se os elementos a serem contados são distinguíveis ou não, se a ordem é ou não importante para efeito de contagem.

Alguns fatores influenciam diretamente o ensino da Análise Combinatória. Citaremos aqui dois deles: o primeiro vem a ser o livro didático, frequentemente o único material de estudo do assunto ao qual os alunos terão acesso, o que percebemos pela nossa experiência em sala de aula; o segundo, refere-se à atuação do professor no ensino deste tópico, tendo como guia muitas vezes apenas o livro-texto adotado (LIMA et al, 2001).

O futuro professor de matemática é um aluno oriundo da educação básica, seja de âmbito público ou privado. Assim, sua aprendizagem está diretamente ligada ao material didático que utiliza, e também à atuação de seus professores. De um modo geral, os futuros professores,

> [...] por falta de uma formação específica cuidadosa, nada mais podem fazer do que criar expectativas e modelos baseados em sua experiência anterior enquanto alunos, tomando como modelos (positiva ou negativamente) seus professores anteriores [...] (D'AMORE; PINILLA, 2009, p.8, apud LORIA, 1993)

É possível que devido à concepção de matemática de seus professores, às opções pedagógicas feitas pelos mesmos, e aos tipos de problemas combinatórios aos quais esteve exposto nessa etapa de sua escolarização, ocorram lacunas em sua formação, tanto de conteúdo quanto do desenvolvimento de habilidades. Essas eventuais lacunas de formação que não sejam sanadas durante sua graduação, provavelmente serão retransmitidas aos seus alunos, aumentando assim o número de cidadãos incapazes de usar de modo satisfatório conceitos de Análise Combinatória que seriam úteis na análise de informações estatísticas ou probabilísticas, tão amplamente divulgadas pelos meios de comunicação contemporâneos.

Com o objetivo de entender melhor esta problemática, nos propusemos as seguintes questões de pesquisa:

1. Como os livros didáticos brasileiros têm abordado a Análise Combinatória, e como essas abordagens favorecem ou não o desenvolvimento do raciocínio combinatório?
2. Como a Análise Combinatória vem sendo cobrada nas provas de vestibular e nos testes de larga escala?
3. Como se encontram os alunos recém aprovados no vestibular (e portanto recém saídos do ensino médio), do ponto de vista do desenvolvimento do raciocínio combinatório?

A tentativa completa de responder às três perguntas se encontra na dissertação de mestrado do primeiro autor do artigo (ALVES, 2012). Nesse artigo, discutiremos um recorte da pesquisa feita, enfatizando as análises e resultados obtidos ao tentarmos responder à terceira das três perguntas apresentadas.

REFERENCIAIS TEÓRICOS

Em nosso trabalho, tivemos como principais referenciais as pesquisas de Batanero, Navarro-Pelayo e Godino (1996), e Dubois (1984), que passamos a detalhar.

No trabalho de Dubois (1984), encontramos sua Teoria do Modelo Combinatório Implícito, que afirma que todos os problemas combinatórios simples podem ser classificados nas categorias de Seleção, Alocação, e Partição. Um problema combinatório é dito de Seleção quando a ideia principal de seu contexto é a de se retirar n elementos de um conjunto de m elementos. Problemas combinatórios são ditos de Alocação quando a principal ideia transmitida é a de se alocar n objetos em m espaços vazios. Já a classificação de Partição é atribuída a problemas combinatórios cuja ideia principal presente no enunciado é a de se particionar um conjunto de n objetos em m subconjuntos disjuntos, ou seja, sem interseção. Seguem-se três exemplos de cada uma dessas categorias, retirados da pesquisa de Batanero, Navarro-Pelayo e Godino (1996), e em que apenas os nomes foram adaptados para nomes utilizados na língua portuguesa:

- Uma professora tem que escolher três estudantes para limpar o quadro. Para isso dispõe de cinco voluntários: Elisa, Fernando, Marcos, Jorge e Maria. **De quantas formas ela pode escolher três destes alunos?** Exemplo: Elisa, Fernando e Maria. (Problema de Seleção)
- A garagem do prédio de Ângelo tem cinco vagas. Como o prédio é novo, até agora só há três carros: de Ângelo, Beatriz e Carmen, que podem colocar cada dia seu carro no lugar que preferirem, desde que este não esteja ocupado. Este é o esquema da garagem:

  1 2 3 4 5

  Por exemplo, Ângelo pode parar seu carro na vaga do apartamento 1, Beatriz na do apartamento 2 e Carmen na do apartamento 4. **De quantas formas possíveis eles podem estacionar seus carros na garagem?** (Problema de Alocação)
- Um grupo de quatro amigos, André, Bruno, Clara e Daniel, têm que realizar dois trabalhos diferentes: um de Matemática e outro de Português. Para realizá-lo, decidem dividir-se em dois grupos de dois integrantes cada um. **De quantas formas eles podem se dividir para realizar os trabalhos?** Exemplo: André e Bruno podem fazer o trabalho de Matemática e Clara e Daniel o trabalho de Português. (Problema de Partição)

Batanero, Navarro-Pelayo e Godino (1996) fizeram sua pesquisa na Espanha, com o objetivo de investigar variáveis que poderiam influenciar o ensino e a aprendizagem da Análise Combinatória. A pesquisa, realizada com alunos da educação básica na faixa etária de 14 a 15 anos, consistiu na aplicação de um questionário com 13 problemas combinatórios, montados após revisão de literatura feita pelos autores. Tais problemas levavam em consideração as seguintes variáveis:

- O Modelo Combinatório Implícito, abordando situações de seleção, alocação e partição como contexto do problema;
- Tipo de operação combinatória necessária à resolução (arranjos e permutações com e sem repetição e combinações simples, que são as técnicas mais comumente trabalhadas no ensino médio);
- A natureza dos elementos a serem combinados (entre letras ou números, pessoas ou objetos);
- O valor dado aos parâmetros m e n, no caso do possível uso de fórmulas como $C_{m,n}$ (combinações simples) ou $A_{m,n}$ (arranjos simples), onde n representa uma quantidade de elementos a serem escolhidos dentre os m disponíveis em um conjunto (com $n \leq m$).

A partir das respostas dos 720 alunos aos problemas propostos, os pesquisadores criaram as seguintes categorias para os erros encontrados:

- Erro 1: trocar o tipo de modelo (técnica) necessário(a) para resolver o problema;
- Erro 2: erros de ordem, tanto quando a mesma é essencial, como quando é irrelevante;
- Erro 3: erros de repetição (repete quando não pode e não repete quando pode);
- Erro 4: considerar idênticos objetos que são distinguíveis, e considerar diferentes objetos que são indistinguíveis;
- Erro 5: enumeração não sistemática, que permite encontrar algumas soluções do problema, mas não todas, ou soluções repetidas já encontradas anteriormente;
- Erro 6: resposta intuitiva errada, que não possui justificativa;
- Erro 7: identificar o modelo correto, mas utilizar uma fórmula errada;
- Erro 8: não lembrar o significado de cada parâmetro na fórmula utilizada na resolução;
- Erro 9: interpretação ou construção errada de um diagrama de árvore correspondente à questão;
- Erro 10: confusão entre tipos de subconjuntos, quando os mesmos são distinguíveis ou indistinguíveis;
- Erro 11: erro na formação de partições, seja pelo fato da união de todas as

partições possíveis não formar todo o conjunto original, seja pelo fato de não considerar todas as partições possíveis.

Neste artigo, utilizamos o Modelo Combinatório Implícito com o objetivo de variar os contextos nos problemas do questionário, e investigar a maior ou menor dificuldade com problemas de Alocação, Seleção ou Partição. Já as categorias de erros de Batanero, Navarro-Pelayo e Godino foram utilizadas como um guia para erros esperados dos alunos, ao responderem os problemas propostos.

METODOLOGIA, OS SUJEITOS DA PESQUISA E OS QUESTIONÁRIOS

Aplicamos um questionário com problemas de Análise Combinatória a 77 alunos do curso de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), no ano de 2011. Destes, 61 eram alunos de Licenciatura, 14 eram alunos do Bacharelado, e 2 não identificaram se pertenciam a uma ou outra modalidade. A maioria dos alunos ainda não havia cursado, na graduação, disciplina que abordasse a Análise Combinatória. Tentaram resolver os problemas com o conteúdo que se lembravam do Ensino Médio, e que eventualmente reviram para prestar os exames vestibulares.

Para a montagem dos questionários, utilizamos como variáveis o Modelo Combinatório Implícito de Dubois, e as técnicas matemáticas necessárias ao processo de contagem. A composição dos mesmos foi a seguinte:

TABELA 1 – Descrição de cada problema de ambos os questionários, evidenciando semelhanças e diferenças entre um e outro.

Questionário A	Questionário B
Questão 1: problema de Seleção, Princípio Multiplicativo	Questão 1: problema de Seleção, Princípio Aditivo
Questão 2: problema de Alocação, Combinações Simples	A questão 2 foi comum aos dois questionários
Questão 3: problema de Partição, Combinações Simples	A questão 3 foi comum aos dois questionários
Questão 4: problema de Seleção, Combinações Simples	A questão 4 foi comum aos dois questionários
Questão 5: problema de Seleção, Arranjos Simples	Questão 5: problema de Alocação, Arranjos Simples
Questão 6: problema de Alocação, Arranjos com repetição	A questão 6 foi comum aos dois questionários

Optamos por aplicar dois questionários, A e B, para que as perguntas 1A e 1B (e analogamente as questões 5A e 5B) não figurassem no mesmo questionário. Com isso, os alunos que resolveram a questão 1A o fizeram sem poder realizar nenhuma comparação com a questão 1B (analogamente para as questões 5A e 5B). Cada aluno respondeu apenas a um dos questionários, que foram distribuídos de forma aproximadamente equânime (39 alunos responderam ao questionário A e 38 alunos responderam ao questionário B).

Para o estudo das respostas dos alunos, analisamos soluções com fórmulas representativas dos modelos de contagem, com uso dos princípios multiplicativo e/ou aditivo, e com uso de enumeração (contagem das possibilidades uma a uma) através de tabelas, árvores de possibilidades, diagramas e esquemas.

Todas as respostas foram categorizadas pelo tipo de raciocínio utilizado (via fórmula, enumeração, e uso dos Princípios Aditivo ou Multiplicativo). Além disso, as respostas erradas foram agrupadas utilizando as categorias de erros da pesquisa de Batanero, Navarro-Pelayo e Godino. Algumas adaptações foram feitas para esta categorização. O que denominamos erro 3 passa a considerar os erros que os alunos possam cometer quanto à distinguibilidade/indistinguibilidade de objetos ou conjuntos de objetos, que levem a eventuais erros de repetição ou ausência de repetição, representados pelos erros 3, 4 e 10 da pesquisa de Batanero, Navarro-Pelayo e Godino. Quanto aos erros 5 e 11 da mesma pesquisa, que dizem respeito a erros por contagem em demasia ou por falta, tanto de objetos individuais quanto de subconjuntos, foram por nós agrupados na categoria Erro 4. Os demais têm correspondência direta com os erros já citados no referencial teórico, e estão representados na tabela 2:

TABELA 2 – Descrição de nosso agrupamento das categorias de erros utilizadas para a análise das respostas aos questionários.

Nossas categorias	Categorias de Batanero, Navarro-Pelayo e Godino
Erro 1	Erro 1
Erro 2	Erro 2
Erro 3	Erro 3, Erro 4 e Erro 10
Erro 4	Erro 5 e Erro 11
Erro 5	Erro 6
Erro 6	Erro 7
Erro 7	Erro 8
Erro 8	Erro 9

Uma cópia dos dois questionários completos, incluindo os tipos de escolas em que estudaram, se utilizaram livros didáticos ou apostilas, dentre outras informações para caracterização da amostra, pode ser obtida em Alves (2012). Neste artigo apresentamos apenas os problemas propostos. Passemos à análise das respostas obtidas para cada um.

ANÁLISE DAS RESPOSTAS AOS PROBLEMAS DOS QUESTIONÁRIOS

Na análise das respostas dos alunos aos problemas do questionário, foram observados três aspectos:

- Se a resposta estava correta, incorreta, ou em branco;
- Como o aluno tentou responder, ou seja, se utilizou o Princípio Multiplicativo, o Princípio Aditivo, algum tipo de enumeração (contagem dos casos um a um),

ou se tentou adequar os dados do problema diretamente a uma das fórmulas comumente estudadas no Ensino Médio;

- Qual era a natureza das respostas erradas encontradas. Nesse caso, categorizamos cada resposta incorreta de acordo com a tabela 2 deste artigo, adaptada da pesquisa de Batanero, Navarro-Pelayo e Godino (1996).

Análise conjunta das questões 1A e 1B

QUADRO 1 – Questões 1A e 1B.

1A. Numa confeitaria há 5 sabores de picolés e 3 sabores de salgado. Suponha que Maria tenha permissão para tomar um picolé e comer um salgado. Quantos são os possíveis pedidos que Maria pode fazer?
1B. Numa confeitaria há 5 sabores de picolés e 3 sabores de salgado. Suponha que Lúcia tenha permissão para tomar um picolé ou comer um salgado. Quantos são os possíveis pedidos que Lúcia pode fazer?

Ambas as questões foram retiradas de Santos (2007), e a única diferença entre elas se referia à técnica de contagem necessária à sua resolução. Tivemos como objetivo observar se os participantes do questionário A reconheceriam uma situação multiplicativa, e se os participantes do questionário B reconheceriam uma situação aditiva, bem como medir se uma situação poderia ser considerada mais difícil do que a outra. Foram mantidas constantes a situação (de Seleção) e a natureza dos objetos a serem contados. A mudança no método de contagem necessário provocou alterações nos índices de acertos obtidos pelos alunos, como podemos perceber na tabela 3:

TABELA 3 – Respostas às questões 1A e 1B quanto à correção das respostas (as porcentagens estão em itálico).

Classificação	Questão 1A	Questão 1B
Respostas Corretas	36 (92,3)	23 (60,5)
Respostas Erradas	3 (7,7)	15 (39,5)
Sem resposta	0 (0)	0 (0)
Total	39 (100)	38 (100)

Ambas as questões tiveram um alto índice de acertos, mas a questão 1B teve um índice de acertos bem menor do que a questão 1A. Tal diferença sugere que problemas de contagem em que o Princípio Aditivo seja necessário, talvez não sejam tão trabalhados no ensino médio quanto os problemas envolvendo o Princípio Multiplicativo.

Quanto às técnicas de resolução, agrupamos as respostas dos alunos às questões de acordo com a tabela 4:

TABELA 4 – Respostas às questões 1A e 1B quanto às técnicas de contagem utilizadas (as porcentagens estão em itálico).

Técnica Utilizada	Questão 1A	Questão 1B
Princípio Multiplicativo	31 (79,5)	11 (28,9)
Princípio Aditivo	2 (5,1)	11 (28,9)
Modelos Prontos	3 (7,7)	9 (23,7)
Enumeração	3 (7,7)	7 (18,5)
Não responderam	0 (0)	0 (0)
Total	39 (100)	38 (100)

Podemos perceber nessa tabela que a questão 1B teve um número maior de alunos tentando resolver o problema utilizando alguma enumeração. O mesmo pode ser notado nas tentativas de resolução usando modelos prontos (fórmulas para contagem das configurações mais comumente estudadas no Ensino Médio, como Permutações Simples e com repetição, Arranjos Simples ou Combinações Simples). A análise conjunta dessas duas questões nos permitiu concluir que uma parcela dos alunos tem dificuldades ao diferenciar uma situação multiplicativa de uma aditiva. Em particular, os resultados dos alunos na questão 1B evidenciam que a maior parte deste grupo talvez não tenha desenvolvido na Educação Básica atividades relacionadas ao uso do Princípio Aditivo como método de contagem, bem como seja ressaltada a diferença deste para o Princípio Multiplicativo.

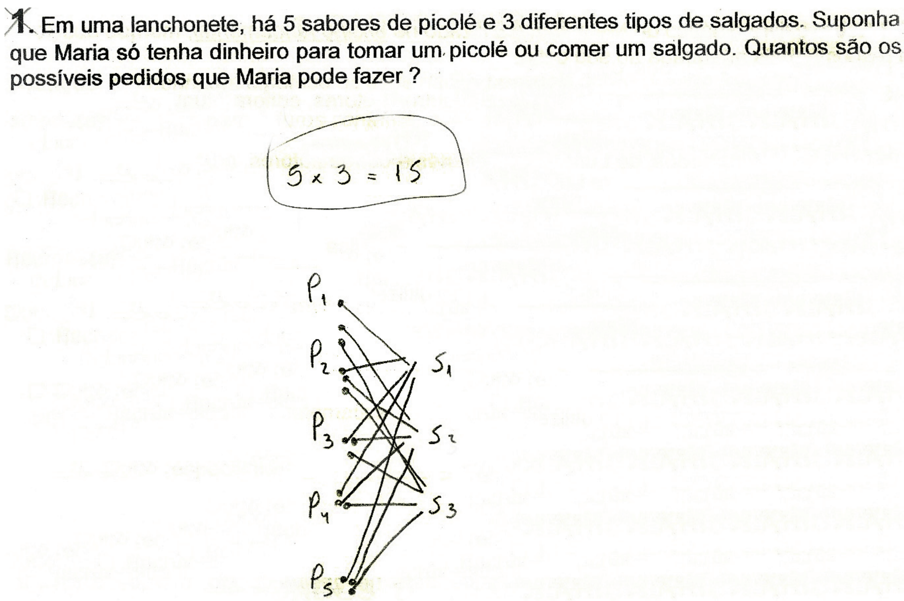
A tabela 5 apresenta os erros cometidos pelos alunos ao responderem a estas duas questões, a partir das categorias já apresentadas na Tabela 2 deste artigo:

TABELA 5 – Respostas erradas às questões 1A e 1B, categorizadas de acordo com as classificações da Tabela 2 (as porcentagens estão em itálico).

Erro	Questão 1A	Questão 1B
E1	2 (66,7)	10 (66,7)
E5	1 (33,3)	3 (20)
E8	0 (0)	2 (13,3)
Total	3 (100)	15 (100)

A maior parte dos erros observados nessas duas questões se deu na questão 1B, com a troca do modelo/técnica de contagem necessária à sua resolução. Os erros do tipo E5 se caracterizaram pela escrita de números sem nenhuma justificativa, ou pela escrita de fatoriais indevidos. Os dois erros do tipo E8 se referem a dois alunos que tentaram enumerar as soluções de 1B através de um esquema do tipo árvore. A título de exemplo, apresentamos uma dessas soluções na figura 1.

FIGURA 1 – Resposta incorreta à questão 1B, apoiada em uma árvore de possibilidades.



Análise conjunta das questões 2, 3 e 4

QUADRO 2 – Questões 2, 3 e 4.

2. Dispomos de 4 cartas iguais. Temos à disposição para colocar essas cartas 5 envelopes de cores diferentes: amarelo, branco, creme, rosa e verde. Se cada envelope pode conter no máximo uma carta, de quantas formas podemos colocar as 4 cartas nos cinco envelopes?
3. Um grupo de 8 funcionários de uma companhia precisa se dividir em dois grupos de trabalho: um com 5 integrantes, e outro com 3 integrantes. De quantos modos diferentes essa divisão pode ser feita?
4. Um médico acabou de ser aprovado em um concurso público, e terá que cumprir uma carga horária semanal de 24 horas, 12 em um dia e 12 em outro. De quantos modos diferentes ele pode escolher seus dois dias de trabalho, dentro de uma mesma semana?

Com essas três questões, por nós confeccionadas e comuns aos dois questionários, tivemos como objetivo comparar se os alunos teriam mais ou menos dificuldades para respondê-las. Para isso, mantivemos invariável a técnica para a contagem do número de soluções, mas variamos o modelo combinatório implícito nas mesmas, bem como a natureza dos elementos a serem contados. No caso, temos um problema de alocação (questão 2), um de partição (questão 3), e um de seleção (questão 4), e todos os três são problemas cujas configurações são combinações simples dos respectivos elementos. A tabela 6 mostra os índices de acertos, erros, e questões deixadas em branco pelos alunos:

TABELA 6 – Respostas às questões 2, 3 e 4 quanto à correção das respostas (as porcentagens estão em itálico).

Classificação	Questão 2	Questão 3	Questão 4
Respostas corretas	33 (42,9)	26 (33,8)	42 (54,5)
Respostas erradas	42 (54,5)	43 (55,8)	34 (44,2)
Sem resposta	2 (2,6)	8 (10,4)	1 (1,3)
Total	77 (100)	77 (100)	77 (100)

Podemos perceber que houve diferenças nos índices de acertos das três questões. A questão 4 (de Seleção) teve o maior índice de acertos, enquanto a questão 3 (de Partição) teve o menor índice. O fato de a questão 3 aparentemente ter sido a mais difícil para os alunos também pode ser percebido ao analisar a quantidade de perguntas sem resposta: a questão 3 apresenta o maior índice nesse quesito. Tal fato se coaduna com as análises feitas por Alves (2012), em livros do ensino fundamental e médio.

Neste trabalho, fica claro que a maior parte dos problemas combinatórios trabalhados nos livros didáticos são de seleção, em contraposição a uma quantidade bem pequena de problemas de partição.

A tabela 7 apresenta as técnicas utilizadas pelos alunos para responderem aos problemas 2, 3 e 4 de nossa pesquisa:

TABELA 7 – Respostas às questões 2, 3 e 4 quanto às técnicas de contagem utilizadas (as porcentagens estão em itálico).

Técnicas	Questão 2	Questão 3	Questão 4
Princípio Multiplicativo	28 (36,4)	11 (14,3)	23 (29,9)
Princípio Aditivo	0 (0)	1 (1,3)	0 (0)
Modelos Prontos	21 (27,3)	54 (70,1)	41 (53,3)
Enumeração	26 (33,8)	0 (0)	10 (13)
Sem resposta	2 (2,6)	8 (10,4)	1 (1,3)
Resposta sem justificativa	0 (0)	3 (3,9)	2 (2,6)
Total	77 (100)	77 (100)	77 (100)

É possível notar que, à exceção da Questão 2, a maioria dos alunos mostrou preferência por tentar responder o problema utilizando necessariamente uma das fórmulas (modelos) para contagem das configurações comumente estudadas no Ensino Médio (Permutações Simples ou com Repetição, Arranjos Simples e Combinações Simples). Quanto à Questão 2, embora a maioria não tenha tentado responder o problema utilizando uma fórmula, foi grande a quantidade de alunos que tentou chegar a uma resposta enumerando a quantidade de soluções, utilizando esquemas, tabelas ou árvores de possibilidades. Podemos supor que, apesar de haver cada vez mais professores conscientes da importância de um trabalho que priorize o raciocínio combinatório, e o uso consciente dos princípios aditivo e multiplicativo, ainda ocorre relativamente cedo a formalização do assunto, e com bastante ênfase nas fórmulas para a contagem de cada tipo de configuração. Esse tipo de ênfase, embora seja um caminho possível, não parece trazer grandes benefícios para a aprendizagem, como podemos observar na tabela 8:

TABELA 8 – Respostas erradas às questões 2, 3 e 4, categorizadas de acordo com as classificações da Tabela 2 (as porcentagens estão em itálico).

Erros	Questão 2	Questão 3	Questão 4
E1	10 (23,8)	8 (19,5)	10 (29,4)
E2	17 (40,5)	7 (17,1)	15 (44,1)
E3	9 (21,4)	17 (41,5)	0 (0)
E4	2 (4,8)	0 (0)	2 (5,9)
E5	4 (9,5)	9 (21,9)	2 (5,9)
E6	0 (0)	0 (0)	5 (14,7)
Total	42 (100)	41 (100)	34 (100)

Podemos perceber que houve um grande número de erros do tipo E1 em todas as três questões (erro no modelo de contagem). A maioria dos erros deste tipo se deu pela tentativa em adequar o problema a uma das fórmulas de contagem estudadas no ensino médio, mas utilizando-se a fórmula errada (arranjos simples em lugar de combinações simples). Já os erros do tipo E2 e E3, também numerosos, mostraram basicamente tentativas de uso do Princípio Multiplicativo, mas sem considerar que em alguns casos a ordem entre os elementos não era importante (problemas 3, dos grupos de pessoas, e 4, dos dias de trabalho), e em outros, alguns elementos eram indistinguíveis (problema 2, das cartas).

Análise conjunta das questões 5A e 5B

QUADRO 3 – Questões 5A e 5B.

5A. Um clube tem 30 membros. A diretoria é formada por um presidente, um vice-presidente, um secretário e um tesoureiro. Se uma pessoa pode ocupar apenas um desses cargos, de quantas maneiras podemos formar uma diretoria?
5B. Um professor precisará aplicar uma prova de segunda chamada a 4 alunos de sua turma. Para isso, tem a sua disposição uma sala com 30 lugares. De quantos modos diferentes o professor pode arrumar os alunos nesta sala, sem qualquer restrição?

Com estas duas questões, retiradas de Dante (2008), nosso objetivo foi manter invariante a técnica matemática, e mudar o contexto do problema. Os problemas 5A e 5B, respectivamente de Seleção e Alocação, poderiam ser resolvidos utilizando a fórmula para o cálculo do número de Arranjos Simples ou se utilizando o Princípio Multiplicativo. Optamos pela mudança da técnica matemática (em relação às questões 2, 3 e 4) para avaliar se haveria alguma diferença nos índices de acerto e erro das resoluções. A tabela 9 ilustra essas informações:

TABELA 9 – Respostas às questões 5A e 5B quanto à correção das respostas (as porcentagens estão em itálico).

Classificação das respostas	Questão 5A	Questão 5B
Respostas corretas	26 (66,7)	13 (34,2)
Respostas erradas	11 (28,2)	22 (57,9)
Sem resposta	2 (5,1)	3 (7,9)
Total	39 (100)	38 (100)

Podemos perceber que, a exemplo das questões 2, 3 e 4, o maior índice de acertos ocorreu no problema cujo contexto é de Seleção (questão 5A). A questão 5B, de Alocação, apresentou maiores índices de erro e de questões em branco. Embora a técnica matemática necessária à resolução dessas questões seja considerada mais "fácil" do que as Combinações Simples por boa parte dos estudantes, tal mudança não produziu uma grande diferença nos índices de acerto e erro em relação às três questões anteriores.

Outro fator que chama a atenção é a opção pelo uso ou não de fórmulas para resolver essas questões, como podemos observar na tabela 10:

TABELA 10 – Respostas às questões 5A e 5B quanto às técnicas de contagem utilizadas (as porcentagens estão em itálico).

Técnicas	5A	5B
Princípio Multiplicativo	18 (46,2)	12 (31,6)
Princípio Aditivo	0 (0)	1 (2,6)
Modelos Prontos	19 (48,7)	20 (52,6)
Enumeração	0 (0)	0 (0)
Resposta sem justificativa	0 (0)	2 (5,3)
Sem resposta	2 (5,1)	3 (7,9)
Total	39 (100)	38 (100)

Embora fosse bem mais fácil aplicar o Princípio Multiplicativo para resolver tanto uma questão quanto a outra, a maioria dos estudantes preferiu utilizar um modelo (fórmula) para tentar chegar à solução. Essa diferença se mostrou maior na questão 5B, de Alocação. Isso sugere que com a mudança de contexto, os alunos passaram a não visualizar que apenas a multiplicação 30.29.28.27 seria suficiente para responder à pergunta proposta, tendo maiores dificuldades em formular uma solução, e sentindo mais necessidade de adequar o problema a uma fórmula. A tabela 11 destaca a natureza dos erros que surgiram nas soluções incorretas dadas a estas questões:

TABELA 11 – Respostas erradas às questões 5A e 5B, categorizadas de acordo com as classificações da Tabela 2 (as porcentagens estão em itálico).

Erros	5A	5B
E1	6 (54,5)	7 (31,8)
E2	5 (45,5)	11 (50)
E3	0 (0)	1 (4,6)
E5	0 (0)	1 (4,6)
E6	0 (0)	2 (9)
Total	11 (100)	22 (100)

Os erros do tipo E1 representam várias soluções dadas pelo uso das fórmulas de Combinações Simples e de Permutações Simples. Os erros do tipo E2 se referem aos alunos que tentaram resolver as questões utilizando o Princípio Multiplicativo, mas pensaram ser necessário dividir o valor encontrado por 4, aparentemente em uma tentativa de descontar a ordem (o que nesses problemas, não deveria ser feito).

Análise da questão 6

QUADRO 4 – Questão 6.

6. Um menino tem 4 carrinhos de cores diferentes (azul, branco, verde e roxo) e decide dá-los a seus irmãos Fernando, Luis e Teresa. De quantas formas diferentes ele pode dar todos os seus carrinhos a seus irmãos? Por exemplo: poderia dar 2 para Fernando e 2 para Teresa, ou ainda, poderia dar todos para Luis.

O objetivo desta questão, que foi adaptada de Batanero, Navarro-Pelayo e Godino (1996), foi avaliar o desempenho dos alunos da licenciatura ao resolver um problema em que cada decisão a ser tomada possui o mesmo número de opções para escolha. No caso, a cada carrinho que será presenteado, o menino pode escolher entre quaisquer de seus três irmãos, não havendo a necessidade de cada irmão receber pelo menos um carrinho. A tabela 12 mostra o desempenho dos participantes na resolução deste problema:

TABELA 12 – Respostas à questão 6, quanto à correção das respostas (as porcentagens estão em itálico).

Questão 6	Frequência
Respostas corretas	1 (1,3)
Respostas erradas	65 (84,4)
Sem resposta	11 (14,3)
Total	77 (100)

Os alunos poderiam ter respondido a esta questão seguindo a recomendação de que *"Devemos sempre nos colocar no papel da pessoa que deve fazer a ação solicitada pelo problema e ver que decisões devemos tomar"* (LIMA et al, 2002, p.86), efetuando o produto 3.3.3.3=81, onde há 4 fatores pois há 4 cores distintas para os carrinhos, e onde cada fator 3 representa as opções de escolha para qual irmão receberia o referido carinho. Embora de resolução aparentemente fácil, essa foi a questão que apresentou os maiores índices de erro e respostas em branco, com apenas um participante da amostra tendo-a respondido corretamente. A tabela 13 ilustra as estratégias utilizadas pelos alunos ao tentarem responder a este problema:

TABELA 13 – Respostas à questão 6 quanto às técnicas de contagem utilizadas (as porcentagens estão em itálico).

Técnicas	Frequência
Princípio Multiplicativo	15 (19,5)
Princípio Aditivo	7 (9,1)
Modelos Prontos	27 (35,1)
Enumeração	14 (18,2)
Resposta sem justificativa	3 (3,9)
Sem resposta	11 (14,3)
Total	77 (100)

Chama a atenção nesta tabela uma quantidade um pouco maior de alunos que tentou uma resolução por enumeração, em relação às demais questões. Mesmo o único aluno que a acertou, antes de escrever o produto 3.3.3.3=81, iniciou seu raciocínio com uma divisão em casos. A exemplo de outros problemas do questionário, a maioria pensou em resolver a questão utilizando uma das fórmulas da Análise Combinatória, porém sem sucesso. A tabela 14 detalha os tipos de erros observados:

TABELA 14 – Respostas erradas à questão 6, categorizadas de acordo com as classificações da Tabela 2 (as porcentagens estão em itálico).

Erro	Frequência
E1	12 (18,5)
E3	48 (73,8)
E5	5 (7,7)
Total	65 (100)

A maior parte dos erros (E3) se deu a partir da não consideração de que, tanto o conjunto dos carrinhos quanto o conjunto dos irmãos, eram compostos de elementos distintos e distinguíveis (no caso dos carrinhos, pela cor). O grupo de participantes que apresentou esse tipo de erro, em geral, tentou dividir a situação em casos (por exemplo, um dos irmãos recebe 3 carrinhos, outro recebe um, e o terceiro nenhum, ou ainda, um recebe dois carrinhos, e os outros dois recebem um carrinho cada). Porém não perceberam que, como os carrinhos eram distinguíveis, deveriam ser consideradas ainda as permutações possíveis entre os mesmos. Os erros do tipo E1 se referem à troca do modelo necessário à resolução do problema, em que alguns alunos optaram por responder com uma fórmula de Arranjos Simples (4.3.2.1=24), quando na verdade a solução era o número de Arranjos com repetição dos objetos envolvidos (3.3.3.3=81).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo do desenvolvimento da pesquisa, e principalmente, quando estávamos tentando responder a terceira das três perguntas da pesquisa, abordada neste artigo, foi possível perceber diretamente algumas lacunas de formação em Análise Combinatória apresentadas pelos licenciandos em Matemática.

A maior parte desses licenciandos tentou adequar suas soluções ao uso de fórmulas que, em boa parte de suas escolhas, não correspondiam à fórmula que poderia ser utilizada para resolver o problema. Essa preferência, ou necessidade, sentimento de quase obrigatoriedade de usar uma fórmula aparentemente mostra que há uma formalização precoce das técnicas de contagem da Análise Combinatória. Embora boa parte dos livros didáticos atuais sigam a recomendação de que é necessário "*... levar o aluno a lidar com situações que envolvam diferentes tipos de agrupamentos que possibilitem o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a compreensão do princípio multiplicativo...*" (BRASIL, 1998, p. 52), tal modo de se abordar este tópico é interrompido mais cedo do que se deveria, para dar lugar às fórmulas. Com isso, problemas que seriam facilmente resolvidos apenas com o uso do Princípio Multiplicativo, acabam por serem resolvidos após um trabalho mais longo envolvendo cálculos e simplificações com fatoriais, ou não são resolvidos corretamente, devido à maior probabilidade de erro com o uso das fórmulas.

Outro fato que nos chamou a atenção foram as dificuldades apresentadas pelos alunos ao lidar com o Princípio Aditivo, e em reconhecer situações em que o mesmo pode ser aplicado. Percebemos que não há em boa parte dos livros didáticos uma definição com palavras deste princípio, a exemplo do Princípio Multiplicativo (ALVES, 2012), sugerindo que se acredita que o seu uso seja talvez algo que vá ocorrer naturalmente ao estudante durante as resoluções de problemas combinatórios. Os resultados apresentados pelos licenciandos nas respostas dadas aos questionários mostram que não é esse o caso.

Outro fator que influencia o desenvolvimento do raciocínio combinatório por parte dos alunos, pode ser identificado na Teoria do Modelo Combinatório Implícito, de Dubois (1984). As respostas aos questionários mostraram que mesmo os futuros professores de matemática, apresentaram vários tipos de dificuldade ao tentarem resolver problemas que, embora correspondam ao mesmo modelo matemático (questões 2, 3 e 4, e questões 5A e 5B), são diferentes quanto ao contexto (de Seleção, Alocação ou Partição). Tais dificuldades são consoantes ao que foi observado na análise de livros didáticos em outra parte de nossa pesquisa: embora haja bastante variação de problemas do ponto de vista matemático, há pouca variação do ponto de vista situacional, com um predomínio de problemas de seleção, e quase nenhum problema envolvendo partições.

O conhecimento desses fatores que influenciam o desenvolvimento do raciocínio combinatório é de especial importância, tanto para professores do Ensino Básico quanto para professores do Ensino Superior.

Os professores da Educação Básica devem estar atentos e utilizar esses fatores a seu favor, seja durante as aulas com sua mediação, seja escolhendo livros didáticos que os considerem na formulação de exercícios e problemas, seja na confecção de materiais extras que complementem o aprendizado de seus alunos.

Quanto aos professores do Ensino Superior, em especial das Licenciaturas em Matemática, é importante conhecer estes fatores e ter claro que mesmo tendo concluído o Ensino Médio e sido selecionados por um vestibular, os licenciandos chegam à graduação com várias lacunas de formação em Análise Combinatória. Tais lacunas, caso não sejam sanadas nas disciplinas de Combinatória durante a graduação, provavelmente retornarão à sala de aula, causando um efeito cascata no ensino deste tópico.

A longo prazo, tais efeitos se revelarão através de uma grande parte da população incapaz de utilizar com propriedade o raciocínio combinatório, e impedida de compreender e ler o mundo e situações em que o mesmo é necessário, como nas informações estatísticas e probabilísticas cada vez mais presentes nos meios de comunicação atuais.

REFERÊNCIAS

ALVES, Renato de Carvalho. *O ensino de análise combinatória na educação básica e a formação de professores*. Dissertação de Mestrado. 172 f. Rio de Janeiro: UFRJ, 2012.

BATANERO, C.; NAVARRO-PELAYO, P.; GODINO, J. D. Razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria. *Educación Matemática*, 8 (1), p.26-39, 1996.

BRASIL. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL. *Parâmetros curriculares nacionais*: matemática. Brasília. MEC/SEF, 1998.

DANTE, Luiz Roberto. *Matemática* (vol. único). São Paulo: Ática, 2008.

DUBOIS, Jean-Guy. Une systématique des configurations combinatoires simples. *Educational Studies in Mathematics*, v.15, p.37-57, 1984.

D'AMORE, Bruno; PINILLA, Martha Isabel Fandiño. A formação dos professores de matemática: problema pedagógico, didático e cultural. *Acta Scientiae*, v.11, n.2, jul./dez. 2009.

LIMA, Elon Lages et al. *A matemática do ensino médio*. Rio de Janeiro: SBM, 2002.

LIMA, Elon Lages et al. *Exames de Textos*: análise de livros de matemática para o ensino médio. Rio de Janeiro: SBM, 2001.

SANTOS, José Plínio O.; MELLO, Margarida P.; MURARI, Idani T. C. *Introdução à análise combinatória*. 4.ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2007.

Recebido em: jun. 2012 **Aceito em**: ago. 2012