

# Estudo Semiótico em Língua Natural das Cônicas: possibilidades de uso de novos registros

Sérgio Florentino da Silva  
Méricles Thadeu Moretti

## RESUMO

Neste trabalho, propomos analisar os registros em língua natural das elipses, hipérboles e parábolas presentes em livros do Ensino Superior tomando como referência a teoria dos registros de representações semióticas de Raymond Duval, sobretudo em relação à abordagem de interpretação global de propriedades figurais, as funções discursivas da linguagem e a operação semiótica e cognitiva de conversão. Tais análises evidenciaram que esses registros pesquisados recorrem, mesmo que nem sempre de forma explícita, a algumas variáveis visuais e a propriedades globais das figuras e que apresentam potencial para contemplar diversas funções discursivas, tais como, a apofântica que reflete a capacidade de designação de algo sob a forma de uma proposição matemática, a expansão discursiva que permite ligações entre proposições matemáticas de forma coerente além da operação de conversão. Ao adicionarmos, a essa discussão, o Princípio de Extensão de Bento de Jesus Caraça, indicamos possibilidades do uso de novos registros para as cônicas.

**Palavras-chave:** Interpretação Global. Funções Discursivas da Linguagem. Conversões. Princípio de Extensão.

## Semiotic Study in the Natural Language of Conics: Possibilities of using new records

## ABSTRACT

In this paper, we propose to analyze the natural language registers of ellipses, hyperboles, and parabolas present in Higher Education books. We take as reference Raymond Duval's theory of registers of semiotic representations, especially in relation to the approach of global interpretation for figurative properties, the discursive functions of language, and the semiotic and cognitive operation of conversion. The analyzes showed that these researched records resort, albeit not always explicitly, to some visual variables and to the global properties of the figures and that they have the potential to contemplate several discursive functions, such as the apophanatic that reflects the capacity to designate something in the

---

**Sérgio Florentino da Silva** é doutorando em Educação Científica e Tecnológica pela Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). Atualmente, é professor de Matemática do Departamento de Cultura Geral do Instituto Federal de Santa Catarina (IFSC). Endereço para correspondência: Rua José Lino Kretzer 608, 88103-310, São José/SC, Brasil. E-mail: sergio.florentino@ifsc.edu.br

**Méricles Thadeu Moretti** é Doutor em Didática da Matemática pela ULP/Estrasburgo – França. Atualmente, é professor permanente do PPGET/UFSC. Endereço para correspondência: Campus Universitário Trindade – CFM/PPGET. 88.040-900. Florianópolis/SC, Brasil. E-mail: mthmoretti@gmail.com

Recebido para publicação em 16 mar. 2018. Aceito, após revisão, em 09 maio 2018.

Acta Scientiae	Canoas	v.20	n.3	p.386-405	maio/jun. 2018
----------------	--------	------	-----	-----------	----------------

form of a mathematical proposition: the discursive expansion that allows connections between mathematical propositions in a coherent way beyond the conversion operation. When we add to this discussion the Extension Principle of Bento de Jesus Caraça, we indicate possibilities of using new records for the conics.

**Keywords:** Global Interpretation. Discursive Functions of Language. Conversions. Principle of Extension.

## INTRODUÇÃO

O estudo das cônicas é um tópico frequente no Ensino Superior e por vezes também no Ensino Médio. Tendo como base que os registros em língua natural são importantes não apenas para a comunicação, mas também para a aprendizagem em matemática, buscamos a literatura especializada para, neste artigo, analisarmos os termos em língua natural usados para as elipses, hipérbolos e parábolas (cônicas) no Ensino Superior. Nosso referencial teórico foi a Teoria dos Registros de Representações Semióticas (TRRS) de Raymond Duval, sobretudo no que diz respeito a *Abordagem de Interpretação Global de Propriedades Figurais* e as *Funções Discursivas Referencial, Apofântica e Expansão* e, ainda, a operação cognitiva e semiótica de conversão.

A pesquisa recaiu nos livros didáticos de Leithold (1994), Winterle (2000), Anton (2002) e Lehmann (2007), pois em relação a outros livros clássicos que observamos os escolhidos nos pareceram ser os que mais desenvolveram registros em língua natural para as cônicas dentro perspectiva da TRRS.

As análises indicam que os termos desses autores têm potencial para dizer algo dos objetos sobre a forma de uma proposição matemática (*Função Apofântica*), para religar a outras proposições matemáticas de forma coerente (*Expansão Discursiva*) e realizar conversões, por isso, pensamos que eles podem trazer contribuições interessantes para a aprendizagem. Entretanto, por vezes eles possuem alguns problemas principalmente decorrentes do uso da Função Referencial.

Para contribuir ainda mais com este artigo, além das análises, apropriamo-nos de algumas contribuições desses autores para, mediante as possibilidades da Função Referencial, propormos o que chamaremos de registros *básicos* em língua natural.<sup>1</sup> Justificamos o adjetivo *básico* por entender que nossas propostas de registros são elaboradas a partir de unidades significantes *básicas*.

Nossas propostas escolheram variáveis visuais que pensamos expor propriedades globais da figura. Nelas fizemos articulações explícitas entre os registros em língua natural com as unidades simbólicas e as variáveis visuais tomadas. Essas articulações são aprendizagens não naturais e sim do tipo semióticas e que, por isso, o ensino não deve negligenciá-las. Além disso, tendo como base o Princípio de Extensão de Caraça

---

<sup>1</sup> Veremos que os registros que propomos são mistos, pois mesmo que predominantemente sejam em língua natural, também possuem elementos do registro simbólico. A opção em usar o termos "registro em língua natural" se deve apenas pela referida predominância.

(1951), tentamos fazer com que um termo usado para uma das cônicas fosse, a seguir, usado para as outras. Segundo esse princípio,

[...] o homem tem tendência a generalizar e estender todas as aquisições do seu pensamento, seja qual for o caminho pelo qual essas aquisições se obtêm, e a procurar o maior rendimento possível dessas generalizações pela exploração metódica de todas as suas consequências. (Caraça, 1951, p.10)

## **ABORDAGEM DE INTERPRETAÇÃO GLOBAL DE PROPRIEDADES FIGURAIS**

Para Duval (2011a) a compreensão integral (ou integrativa) dos gráficos só é possível com o que ele definiu como Abordagem de Interpretação Global de Propriedades Figurais. Nesse entendimento, não nos limitamos em apenas “olhar” um desenho no papel ou em um *software* que representa uma equação e nem nos reduzimos a analisar elementos pontuais ou particulares presentes num gráfico. Mais do que isso, na concepção dessa teoria, a potencialidade da aprendizagem (integral) têm exigências mais amplas e específicas que necessitam de uma abordagem que permita a interpretação global das propriedades figurais e que, com isso, possibilita efeitos duradouros na aprendizagem dos alunos.

Para tanto, recorre-se ao Método de Análise e Identificação das Variáveis Cognitivas que possibilita identificar as unidades significantes simbólicas (pertinentes ao registro simbólico) e as correspondentes unidades significantes cartesianas (pertinentes ao registro cartesiano e também chamadas de variáveis visuais). Delineando melhor, para a identificação dessas unidades significantes (básicas) fazem-se todas as modificações possíveis num dos registros e observam-se quais delas geram modificações no outro registro. Deve-se variar, dentro de um mesmo registro, uma unidade significante e manter todas as outras constantes e ver o que ocorre no outro registro. Nesse Método, descrito por Duval (2003; 2009; 2011a; 2011b), a distinção das unidades significantes de um sistema semiótico é feita recorrendo ao clássico princípio de oposição utilizado pelos linguistas a partir de Ferdinand de Saussure. Nesse princípio, os signos são entendidos não de forma isolada e sim em sua forma relacional opositiva, pois, como esclarece Duval (2011b), “os signos só podem ser reconhecidos como signos por meio das relações de oposição que eles têm com os outros signos no interior de um sistema”. Logo, nesse princípio, o *valor* de um signo é constituído pela diferença em relação aos outros signos que constituem um sistema.

Em todo esse processo de análise e identificação, que é central na TRRS, a discriminação das variáveis visuais é particularmente pouco evidente, mas infelizmente em geral é negligenciado no ensino. De qualquer maneira, o adequado reconhecimento dessas variáveis permite que se identifique o que é visualmente diferente de modo significativo. Sem ele, não temos como identificar as unidades significantes simbólicas correspondentes e, conseqüentemente, a compreensão integral em Matemática pode ser comprometida. Além disso, essas unidades são orientadoras e intermediarão as transformações entre

registros distintos (conversões). Não obstante, não é suficiente conhecê-las sendo necessário coordená-las a partir das regras de correspondência semiótica e, sobretudo, realizar as conversões tanto do registro simbólico para o registro cartesiano quanto do registro cartesiano para o registro simbólico (conversões em duplo sentido). Porém, no caso das quádras considerando que em geral não é possível, dado o registro cartesiano, determinar o registro simbólico, como realizar conversões em duplo sentido? Diante de tal impossibilidade nesses casos sugerimos que as conversões sejam feitas entre as variáveis visuais e as unidades significantes simbólicas. Nessa proposta devemos realizar conversões em duplo sentido.

Como vemos na TRRS a aprendizagem em matemática envolve um processo semiótico que inclui claras identificações, delimitações e regras de articulações entre distintos registros. Porém, tudo isso não é produzido de maneira automática, imediata ou natural e, claro, o professor não deve negligenciar essas questões. Portanto, na perspectiva da TRRS, os elementos semióticos têm um papel fundamental na aprendizagem em matemática e, por isso, trata-se de uma teoria semio-cognitiva.

## **FUNÇÕES DISCURSIVAS DA LINGUAGEM DA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS<sup>2</sup>**

De acordo com Duval (2004, p.86), “[...] o discurso é o emprego de uma língua para ‘dizer alguma coisa’, a saber, para falar de objetos físicos, ideais ou imaginários, que não são somente as potencialidades significantes de uma língua”.

Na TRRS para que um sistema semiótico seja considerado uma língua ele deve cumprir as Funções Metadiscursivas (Comunicação; Tratamento; Objetivação), comuns a todos os sistemas de representação, e as Funções Discursivas (Referencial de Designação de Objetos; Apofântica de Expressão de Enunciados Completos; Expansão Discursiva de Enunciados Completos; Reflexividade). Com isso, o emprego de uma língua possibilita tanto haver um discurso quanto a sua variedade em certo entorno cultural. No que diz respeito às Funções Discursivas, elas devem possibilitar: designar objetos (Função Referencial); dizer alguma coisa a respeito dos objetos que designam em forma de uma proposição matemática (Função Apofântica); vincular, ou religar a proposição enunciada à(s) outra(s) em um todo coerente (Função Expansão Discursiva); determinar o valor, o modo ou o estatuto de uma expressão (Função Reflexividade).

---

<sup>2</sup> Esta seção tem como base os escritos de Duval (2004), Brandt; Moretti e Bassoi (2014), Dionizio; Brandt e Moretti (2014) e Dionizio; Brandt (2014). Nesses trabalhos há uma série de exemplos práticos.

O esquema da Figura 1 a seguir sintetiza as Funções Metadiscursivas e Discursivas de Duval (2004).

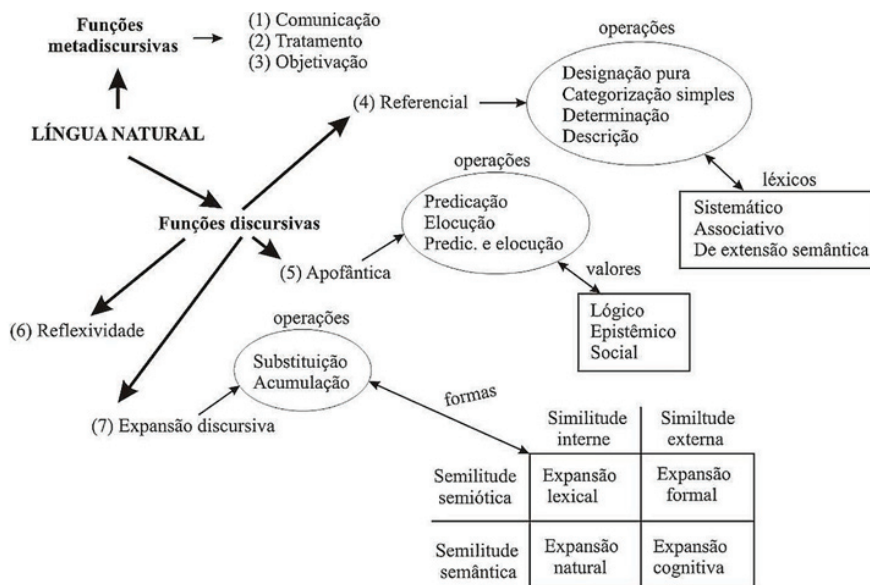


Figura 1. Funções Metadiscursivas e Discursivas no uso da língua (Brandt; Moretti & Bassol (2014, p.480).<sup>3</sup>

Conforme ilustra o esquema da figura anterior, em cada Função Discursiva pode ocorrer diferentes Operações Discursivas.

## FUNÇÃO REFERENCIAL

No caso da Função Referencial, as Operações Discursivas são as seguintes: Designação Pura; Categorização Simples; Determinação; Descrição.

A Designação Pura permite a identificação de um objeto por um gesto, por uma marca particular ou por uma combinação de signos. É caso “de **P** e **r** na frase seguinte: ‘Seja **P** um ponto qualquer da reta **r**...’” (Brandt; Moretti; & Bassol, 2014, p.481).

Na Categorização Simples a identificação de um objeto é feita a partir de uma de suas qualidades e com o emprego de substantivos, verbos e adjetivos que qualificam o objeto. Brandt; Moretti e Bassoi (2014, p.481) dão como exemplo “determinar o **MMC** dos números 3, 4 e 9”. Porém, a Operação de Categorização Simples nunca é suficiente para identificar um objeto sendo necessária a combinação com a Operação de Determinação.

<sup>3</sup> Trata-se de uma tradução e ampliação elaborada pelos autores a partir de Duval (1995, p.87-136). Nessa figura o termo *elocução* equivale ao *ato ilocutório*, que discutiremos mais adiante.

A Operação de Determinação possibilita precisar o campo de aplicação da Categorização Simples. Alguns exemplos são o uso de artigos e preposições. No exemplo anterior, trata-se do uso do artigo definido “o”.

A Operação de Descrição é a que se identifica um objeto cruzando os resultados de várias Operações de Categorização. No exemplo anterior, “MMC designa o Mínimo Múltiplo Comum, e os algarismos 3, 4 e 9 designam os números. Essas duas designações são interligadas pela preposição de: ‘Determinar o MMC **dos** (de + os) números 3, 4 e 9’” (Brandt; Moretti; Bassol, 2014, p.482).

Na designação dos objetos recorrem-se aos léxicos. De acordo com Duval (2004, p.96), “um léxico é um conjunto de elementos (signos, palavras ou símbolos) que permite marcar explicitamente a realização de cada uma dessas quatro operações discursivas da função referencial”. Especificamente para a Função de Designação Pura, distinguem-se os *léxicos sistêmicos, associativos e de extensão semânticos*.

Um léxico é sistêmico quando dados um conjunto de objetos elementares e suas designações por meio de símbolos arbitrários, os objetos complexos são designados pela composição desses símbolos. Como exemplo, é o caso do sistema posicional de numeração. Nesse sistema, dados um conjunto de signos iniciais, as combinações entre eles e as regras de funcionamento próprias do sistema qualquer número natural pode ser designado (Duval, 2004). Ao referir-se a esse exemplo, Dionísio; Brandt e Moretti (2014, p.6) comentam que “esses numerais são caracterizados como léxicos sistemáticos que falam por si só – essa designação não precisa ser combinada com outras operações cognitivas de designação”. De qualquer forma, um léxico desse tipo permite apenas a operação de Designação Pura (Duval, 2004).

Segundo a definição de Duval (1995 apud Brandt; Moretti & Bassol, 2004, p.482), “um léxico é associativo quando o léxico de partida não remete mais a um conjunto de elementos elementares, mas a uma diversidade de objetos e fenômenos do meio físico e do ambiente sociocultural”. Um exemplo é o dado por Brandt; Moretti; Bassol (2004, p.482). Segundo eles, o uso das letras “A” e “B” para designar um segmento de reta ou o lado de um triângulo depende da associação com outros léxicos, pois essas letras “não falam por si só”. Assim, em ... *seja AB o segmento de reta ...* e em ... *seja AB o lado do triângulo ABC ...* o léxico AB é associado, respectivamente, ao segmento de reta e ao lado triângulo.

Um léxico é de extensão semântica quando “[...] permite que novos objetos sejam criados por metonímia, metáfora, sinédoque etc” (Brandt; Moretti; & Bassol, 2004, p.482). Como exemplo, tomaremos o citado por Dionísio; Brandt e Moretti (2014). Segundo eles, entre os léxicos usados na trigonometria temos a palavra *lado* que, de acordo com a vivência sociocultural dos alunos, pode ser associado a *lado de dentro*, *lado de fora*, etc. Por isso, é necessário delimitar o que entendemos por *lado* no estudo da trigonometria. Dessa forma, o léxico em questão passa por uma extensão semântica. Outro exemplo é o uso da palavra *vértice* que pode ser expressa pelos alunos como *canto*, *quina*, etc.

## FUNÇÃO APOFÂNTICA

Na TRRS, uma língua não se limita a apenas designar objetos e permite que se possa dizer alguma coisa sobre os objetos que designa. Essa possibilidade pode ser feita recorrendo a Função Apofântica com as *expressões de enunciados completos*. No que diz respeito à diferença entre essas expressões e as *expressões referenciais*, assim se expõe Duval (2004):

Um enunciado tem um “sentido completo” porque o ato de expressão que o produz é completo. Um ato de expressão é um ato completo do discurso quando a expressão produzida toma um valor determinado no universo cognitivo, representacional ou relacional dos interlocutores. Dito de outra maneira, a especificidade do sentido de um “enunciado completo” em relação com uma expressão referencial, deve buscar-se em seu valor. (Duval, 2004, p.105)

Como vemos a referida diferença é caracterizada pelo seu valor. Esse valor pode ser *lógico* (de verdade ou falsidade), *epistêmico* (de certeza, de necessidade, de verossimilidade, de possibilidade, absurdo, ...) e *social* (de pergunta que exige uma resposta, de ordem para se executar, de desejo, de promessa, ...). Um enunciado completo pode ter apenas um valor social (exemplo: venha rápido; chame mais tarde), um valor epistêmico e um valor social (exemplo: quando se faz uma promessa cuja realização parece pouco verossímil ou absurda) ou um valor epistêmico e um valor lógico se o ato do discurso se situa em um contexto teórico (por exemplo: a soma dos ângulos de um triângulo é maior que 180°).

A Função Discursiva Apofântica possui duas operações discursivas: *predicação*; *ato ilocutório*. A operação de predicação equivale a vincular a expressão de uma propriedade de uma relação ou de uma ação com uma expressão que designe os objetos. Em determinado contexto e com certas condições ao realizarmos o ato de pronunciarmos um enunciado certificamos certas ações e intenções (aquilo que quero dizer) e, com isso, produzimos um ato ilocutório<sup>4</sup>. Como exemplo, suponha que um professor dentro de uma sala de aula fale *está frio aqui dentro*. Com essa fala, talvez a intenção (ato ilocutório) do professor (o falante), ou seja, o que ele quer dizer seja que alguém aumente a temperatura do ar condicionado ou que esse aparelho possa ser desligado. Nesse contexto de fala, temos um ato ilocutório.

## FUNÇÃO EXPANSÃO DISCURSIVA

Entre as quatro Funções Discursivas a Expansão é mais importante. Isso se deve ao fato de que com ela é possível articular vários enunciados completos em uma unidade coerente de uma narração, de uma explicação ou de um raciocinamento. Com isso, sem

<sup>4</sup> Trata-se de um dos Atos da Fala da Teoria dos Atos de Linguagem de John Langshaw Austin.

cair em redundância, podemos vincular diferentes enunciados de um mesmo tema de forma a explicar melhor o assunto (Dionísio; Brandt, 2014).

O modo de progressão do discurso pode ser *lógico* ou *natural* (é mais espontâneo). Como exemplo, tomaremos o dado por Brandt; Moretti e Bassoi (2014, p.483). Segundo esses pesquisadores, caracterizamos uma Expansão Discursiva da forma lógica ao dizermos o seguinte: “se  $\Delta ABC$  é isósceles com  $\hat{A} = \hat{B}$ ,  $\Delta DEF$  é isósceles com  $\hat{E} = \hat{F}$  e se  $\hat{A} = \hat{E}$ , então os triângulos  $ABC$  e  $DEF$  são semelhantes”. Já ao dizermos “a soma de dois números ímpares é um número par” caracterizamos uma Expansão Discursiva da forma Natural. Devemos partir da diferença entre esses modos para determinar as operações da Expansão Discursiva.

No modo de progressão do discurso também devemos observar se ele se dá por *substituição* ou por *acumulação*. No primeiro caso, o discurso se limita a produzir inferências. Como se fosse um cálculo, “as inferências possibilitadas a partir da progressão das proposições podem ser realizadas pela substituição do resultado das novas inferências sobre as que foram feitas nas proposições anteriores” (Brandt; Moretti; & Bassol, 2014, p.483). Nessas inferências, deve-se notar cada vez mais a aplicação das regras utilizadas. Essas regras podem estar explícitas ou implícitas. No caso da acumulação na progressão do discurso as frases se unem por meio de conectores e, assim, o percurso do discurso é transformado ou enriquecido e há uma apreensão sinóptica. É o que ocorre na progressão de uma *narração*, *descrição* ou *explicação*.

Duval (2004) categoriza quatro formas fundamentais de Expansão Discursiva: *expansão formal*; *expansão cognitiva*; *expansão lexical*; *expansão natural*. Elas se embasam na *similaridade* de unidades apofânticas. As similaridades são determinadas por duas dimensões: presença ou ausência de significantes comum às duas unidades; mediação ou não por meio de uma terceira unidade apofântica. Assim, temos uma *similaridade semiótica* quando há repetição dos mesmos signos ou das mesmas palavras nos enunciados, mas com invariância referencial e uma *similaridade semântica* quando os enunciados têm por referência o mesmo objeto, sem apresentarem significantes comuns. A *similaridade direta* ocorre quando a passagem de um enunciado para outro acontece de forma direta, sem a necessidade de um terceiro enunciado e a *similaridade indireta* é caracterizada pela necessidade, implícita ou explícita, da mediação de um terceiro enunciado. Com a articulação dessas dimensões, temos as citadas formas fundamentais: com presença de significante comum nas duas unidades apofânticas e com mediação por meio de uma terceira unidade apofântica (expansão formal); com ausência de significante comum nas duas unidades apofânticas e mediação por meio de uma terceira unidade apofântica (expansão cognitiva); com presença de significante comum nas duas unidades apofânticas e não mediação por meio de uma terceira unidade apofântica (expansão lexical); com ausência de significante comum nas duas unidades apofânticas e não mediação por meio de uma terceira unidade apofântica (expansão natural) (Dionísio; Brandt & Moretti, 2014). O quadro a seguir sintetiza essas quatro formas.



Quadro 1. As quatro formas de Expansão Discursiva de uma expressão

Mecanismos de expansão	<b>Similaridade interna</b> (continuidade sem terceiro enunciado)	<b>Similaridade externa</b> (continuidade com um terceiro enunciado)
<b>Similaridade semiótica</b> (são recuperados alguns significantes)	<p><b>Expansão LEXICAL</b> (recuperação do sentido de uma mesma unidade do vocabulário sob um modo fonético-auditivo ou gráfico-visual)</p> <p><i>Associações verbais, ocorrências, “Linguagem do inconsciente”</i></p>	<p><b>Expansão FORMAL</b> (recurso exclusivo aos símbolos: notações, escrita algébrica etc)</p> <p><i>Raciocinamento dedutivo</i> (proposições de estrutura funcional)</p> <p><i>Cálculo proposicional, cálculos de predicados etc</i></p>
<b>Similaridade semântica</b> Lei de Frege: Significantes diferentes e mesmo objeto. (Invariância referencial estrita ou global)	<p><b>Expansão NATURAL</b> (É suficiente com os conhecimentos da língua corrente)</p> <p><i>Descrição, Narração</i></p> <p><i>Argumentação retórica</i> Silogismo aristotélico (proposição de estrutura temática predicativa)</p> <p><i>Raciocinamento pelo absurdo</i></p>	<p><b>Expansão COGNITIVA</b> (Exige o conhecimento de definições, regras e leis para um domínio de objetos)</p> <p><i>Explicação</i></p> <p><i>Raciocinamento dedutivo</i> (proposição de estrutura temática condicional)</p> <p><i>Raciocinamento pelo absurdo</i></p>

Fonte: Duval (2004, p.111).<sup>5</sup>

Dionízio; Brandt e Moretti (2014, p.521) esclarecem que as diferentes formas associadas à Função Expansão “[...] permitem entender como uma unidade apofântica pode ser produzida em continuidade discursiva com outra unidade apofântica [...]”.

Cada unidade apofântica produzida pode ser considerada em relação ao seu conteúdo ou estatuto. Naquele caso, corresponde aos diferentes aspectos sob os quais pode ser identificada a unidade apofântica: a materialidade dos signos que permitem a sua distinção em relação à outra unidade apofântica, a significação de suas expressões referenciais e predicativas assim como as associações permitidas pela rede semântica do qual provém, ou seu eventual valor lógico de verdade. Neste caso, corresponde ao papel que cumpre frente a outro enunciado da organização global de um discurso (premissa; regra; conclusão; ...). Este estatuto geralmente estabelece um valor epistémico da unidade apofântica que, dependendo do contexto que se situa, pode ter um quadro teórico (definições; axioma; teoremas; ....) ou um quadro social (normas; crenças; opiniões;...) (Duval, 2004).

Ao referir-se a Expansão Discursiva por substituição, Brandt; Moretti e Bassoi (2014) esclarecem que essa forma de expansão

[...] depende do estatuto dos respectivos enunciados, que podem estar prévia e explicitamente fixados desde o começo, de acordo com o marco teórico e com

<sup>5</sup> A tradução aqui exposta foi elaborada por Dionízio; Brandt e Moretti (2014, p.8).

as hipóteses que fundamentam o enunciado; ou apenas no momento em que ele aparece, durante o discurso. Assim, esse estatuto faz parte do sentido do enunciado. (p.484)

No progresso do discurso por acumulação Brandt; Moretti e Bassoi (2014, grifo dos autores, p.484) destacam que “[...] a evolução do enunciado depende do conteúdo expresso. O *estatuto* é quase sempre esquecido, pois se imagina que as informações expressadas têm o mesmo **valor epistêmico** e estão relacionadas ao mesmo assunto”.

Ao analisarmos a produção de um sujeito frente a uma atividade também podemos considerar se a solução apresentada é *pragmática* ou *intelectual*. Seu tipo de argumentação matemática pode ser *válida* ou não.

## ANÁLISES E PROPOSTAS DE REGISTROS *BÁSICOS* EM LÍNGUA NATURAL

As seções tratam das análises e propostas dos registros em língua natural das cônicas.

### REGISTROS EM LÍNGUA NATURAL DAS PARÁBOLAS NAS POSIÇÕES PADRÃO

No estudo das parábolas no  $R^2$  que estão nas posições padrão é comum usarmos os clássicos termos *parábola côncava para cima*, *para baixo*, *para direita* e *para esquerda* e correlacioná-los respectivamente aos registros simbólicos  $x^2 = 4py$ ,  $x^2 = -4py$ ,  $y^2 = 4px$ ,  $y^2 = -4px$ . Ainda recorremos aos registros cartesianos correspondentes.

Pensamos que os referidos termos são interessantes, pois visualmente e intuitivamente trazem propriedades globais que permitem correlacionar representações de diferentes sistemas semióticos. Porém, vemos alguns problemas e limites neles. Em primeiro lugar, ao correlacionar *parábola côncava para cima* com  $x^2 = 4py$ , por exemplo, supõe-se que o sistema cartesiano adotado é o canônico (eixo  $x$  na direção horizontal e com sentido para direita e eixo  $y$  na direção vertical e com sentido para cima). Se escolhermos outros sistemas cartesianos, suponha como exemplo mudar o sentido do eixo  $y$ , a primeira equação se corresponderá ao termo *parábola côncava para baixo* (e não mais para cima). Logo, as correlações desses registros em língua natural com os simbólicos são condicionadas ao sistema cartesiano adotado. Além disso, para os casos em que a parábola é rotacionada em relação ao sistema cartesiano adotado pensamos que essa nomenclatura pode ser limitada.

Do ponto de vista de variável visual, o uso desses termos se apoia nos conceitos de convexidade. Com isso, surge a seguinte pergunta: o que significa convexidade? A partir

de critérios geométricos, Camargo e Boulos (2005, grifo do autor, p.317) distinguem que “[...] um conjunto é **convexo** se qualquer segmento de extremidades pertencentes a ele está nele contido, e **côncavo** no caso contrário, isto é, se existe um segmento que não satisfaz essa condição”. No caso das elipses, parábolas e hipérbolas esses autores nos convidam a notar que esses objetos dividem o plano em regiões<sup>6</sup> de tal forma que as regiões convexas, segundo a distinção deles, contêm algum foco. Por isso, para as parábolas, a região que contém o foco é chamada de região focal da parábola ou região convexa determinada pela parábola e o conjunto que não contém o foco é chamado de região côncava determinada pela parábola. Os pontos das curvas não pertencem a essas regiões.<sup>7</sup>

Dentro da perspectiva que discutimos, ao menos para as parábolas, côncavo e convexo são definições que andam juntas e, ainda nessa ótica, como se explicam os clássicos termos *côncavo para cima ou para baixo* usados nas parábolas? Como vemos o uso dos termos parábola côncava para cima ou para baixo, apesar de bastante usual pode ser mais complicado do que inicialmente a intuição parece dizer. Seu uso, portanto, necessita delimitar adequadamente a que se refere.

Em Leithold (1994), Winterle (2000), Anton (2002) e Lehmann (2007) e encontramos termos parecidos aos clássicos que já mencionamos. Trata-se de termos semelhantes aos seguintes: *parábola que se abre (ou abrindo-se) para direita, para esquerda, para cima e para baixo*.<sup>8</sup> Da mesma forma que aqueles termos, estes possuem as mesmas contribuições, problemas e limites. Porém nestes casos, ainda há outro complicador, pois o que significa *que se abre*? Devemos admitir que são apenas códigos ou há mais potencial para o uso desses termos? Nesses livros, não encontramos explicações delimitadas nesse sentido e, por isso, supomos que para entendê-lo ou se recorre aos aspectos apenas intuitivos ou se remete a noção de distância. Porém, no segundo caso, a que distância nos referimos? Seria a distância entre dois pontos simétricos da parábola ou, para piorar, à distância dos pontos da parábola a um dos eixos coordenados? Neste caso, é fácil notar que dado um ponto pertencente à parábola à medida que ele que se afasta da origem ele aumenta a distância em relação aos dois eixos. Por isso, qual dos dois eixos coordenados nos referimos? Diante da não delimitação do que é o *que se abre* vemos que o uso apenas dos aspectos intuitivos para os termos aqui analisados gera dúvidas que podem inicialmente comprometer a Função Referencial e, subsequentemente, a Função Apofântica, a Expansão Discursiva e até as conversões.

Com o objetivo de ir além de apenas aspectos intuitivos partiremos para nossas propostas para o caso das parábolas padrão. Nesses casos, tomaremos duas variáveis visuais: o eixo de simetria da parábola; o semieixo determinado pela projeção ortogonal da parábola no eixo de simetria. Para a primeira variável visual, considerando que a

<sup>6</sup> Por uma questão de complexidade, os autores usam argumentos intuitivos.

<sup>7</sup> Camargo e Boulos (2005) também definem essas ideias para as elipses e hipérbolas.

<sup>8</sup> Para ver os termos com mais detalhamento, veja Leithold (1994, p.892), Winterle (2000, p.164), Anton (2002, p.151) e Lehmann (2007, p.129). Anton (2002, p.235) ainda usa os seguintes termos: “[...] aberta na direção  $z$  negativa”.

equação está na “forma canônica”,<sup>9</sup> à unidade significante simbólica correspondente é a variável linear e para a segunda é o sinal do coeficiente dessa variável.<sup>10</sup>

Diante dessas considerações semióticas e cognitivas, incluindo aspectos intuitivos, para as parábolas padrão, propomos as seguintes convenções que chamaremos de registros *básicos* em língua natural: *parábola abrindo em  $\alpha_+$* ; *parábola abrindo em  $\alpha_-$* . Nessas convenções, designamos que o eixo  $\alpha$  é o eixo de simetria da parábola (por consequência da definição da parábola o foco e o vértice estão sobre esse eixo) e, dessa forma, a projeção ortogonal da parábola sobre o eixo  $\alpha$  coincide com os pontos do semieixo  $\alpha_+$  ou do semieixo  $\alpha_-$ . No quadro seguinte e nos demais que virão a coluna 1 corresponde as propostas de registros em língua natural e as colunas 2 e 3 são as correspondentes designações que tomamos e que entendemos que devem ser destacadas explicitamente no ensino ao usarmos nossos registros em língua natural, pois trata-se de aprendizagens não naturais e sim do tipo semióticas que o ensino não deve negligenciar.

Quadro 2. Propostas de registros *básicos* em língua natural para as parábolas padrão

Registros básicos em língua natural	Variáveis visuais	Unidades significantes simbólicas correspondentes
<i>Parábola abrindo em <math>\alpha_+</math></i> .	- O eixo $\alpha$ é o eixo de simetria da parábola; - projeção ortogonal da parábola sobre o eixo $\alpha$ determina com os pontos do semieixo $\alpha_+$ .	- A variável linear é $\alpha$ ; - o sinal do coeficiente de $\alpha$ é positivo.
<i>Parábola abrindo em <math>\alpha_-</math></i> .	- O eixo $\alpha$ é o eixo de simetria da parábola; - projeção ortogonal da parábola sobre o eixo $\alpha$ determina com os pontos do semieixo $\alpha_-$ .	- A variável linear é $\alpha$ ; - o sinal do coeficiente de $\alpha$ é negativo.

Fonte: os autores

No sistema cartesiano  $xy$ , a primeira variável visual assume dois valores (o eixo de simetria coincide com o eixo  $x$  ou com o eixo  $y$ ) e a segunda também assume dois valores (semieixo  $Y_+$  ou  $X_+$  para as parábolas que se abrem no sentido positivo e semieixo  $Y_-$  ou  $X_-$  para as parábolas que se abrem no sentido negativo). Como exemplo, para  $x^2 = -4py$  (a variável linear é  $y$  e seu coeficiente é negativo) usaremos o registro *parábola abrindo em  $Y_-$*  e, independentemente da posição do sistema cartesiano adotado, essa parábola terá o eixo  $y$  como eixo simetria e a projeção ortogonal dela sobre o eixo  $y$  coincide com os pontos do semieixo  $Y_-$ .

<sup>9</sup> Em todo este artigo estamos nos referindo ao que chamamos classicamente na Geometria Analítica de “forma canônica” da equação. Também estamos adotando apenas o sistema cartesiano ortogonal.

<sup>10</sup> Se preferirmos a segunda unidade significante simbólica correspondente pode ser verificar se os sinais dos coeficientes dos termos linear e quadrático são os mesmos ou não.

Conforme mostra o quadro anterior, nos apropriamos da expressão *abrindo*, usada semelhantemente por Leithold (1994), Winterle (2000), Anton (2002) e Lehmann (2007). Justificamos essa apropriação por entender que se trata de uma expressão bastante intuitiva e, se for designada adequadamente, pode chamar a atenção para propriedades globais da figura. Portanto, o que fizemos foi apenas fazer uma convenção do termo *abrindo* que enunciasse a ideia de simetria e projeção. Além disso, pretendemos que ambiguidades acerca do uso desse termo sejam evitadas. Porém, conforme o interesse, o termo *abrindo* pode ser suprimido de nossa proposta, ficando com “parábola em  $\alpha_+/\alpha_-$ ” ou até substituído por outro. Além disso, se o interesse for apenas se focar na questão da simetria, poderíamos dizer, por exemplo, *parábola com eixo  $\alpha$  como eixo de simetria*. Porém, com essa escolha teríamos um registro muito extenso.

Do ponto de vista matemático, sabemos que há propriedades algébricas que permitem estudar as simetrias. Assim, de acordo com seus objetivos pedagógicos, o professor pode incluir esse tipo de estudo nas atividades pedagógicas. A Tese do primeiro autor deste artigo trará algumas dessas propriedades.

## REGISTROS EM LÍNGUA NATURAL DAS HIPÉRBOLES NAS POSIÇÕES PADRÃO

Para as hipérbolas no  $R^2$  que estão nas posições padrão (eixos de simetria coincidem com os eixos coordenados), encontramos termos semelhantes à *hipérbole com seu eixo transverso paralelo ao eixo  $x$*  (Leithold, 1994), *hipérbole com o eixo real sobre o eixo dos  $x$  ou dos  $y$*  (Winterle, 2000) e *hipérbole com eixo focal ao longo (ou sobre) o eixo  $x$  ou  $y$*  (Anton, 2002).<sup>11</sup>

Uma análise semiótica dos citados termos evidência que os termos “*eixo real (ou focal ou transverso) sobre (ou ao longo) eixo dos  $x$  (ou  $y$ )*” parecem que são pensados a partir da escolha desses eixos e dos focos como variáveis visuais. De todo modo, há unidades significantes que possibilitam correlações entre os registros em língua natural com os registros gráficos e simbólicos.

De maneira mais ampla, em o *eixo real (ou focal ou transverso) sobre (ou ao longo) eixo dos  $\alpha$*  além da imediata posição desses eixos no sistema cartesiano, podemos estabelecer correlações com os registros simbólicos, pois, nesse caso, sabemos  $\alpha^2$  é a variável quadrática que tem coeficiente positivo. Assim, por exemplo em  $+\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $x^2$  é a variável quadrática que tem coeficiente positivo) podemos dizer *hipérbole com eixo real (ou focal ou transverso) sobre (ou ao longo) eixo dos  $x$*  e, no registro cartesiano, o eixo real e focal (e também os focos) estão contidos no eixo  $x$ . Portanto, temos possibilidades de delimitarmos designações que permitem conversões entre os registros simbólicos, em língua natural e cartesianos que inicialmente se central nos eixos citados e nos focos. A partir de expansões do discurso, podemos fazer outras conversões ou tratamentos.

<sup>11</sup> Para ver os termos com mais detalhamento veja Leithold (1994, p.892), Winterle (2000, p.195-196) e Anton (2002, p.154-156).

Do ponto de vista semântico, se a intensão é chamar a atenção para o eixo focal ou os focos, os termos *eixo focal* (*e não eixo real ou transverso*) *sobre eixo dos  $\alpha$*  se mostram adequados. Já se a intensão é chamar a atenção para o eixo de simetria que intercepta a hipérbole, então pensamos ser mais adequado semanticamente usarmos o termo *eixo transverso*. Por expansões discursivas, claro que dado um desses termos pode-se inferir os conteúdos que o outro carrega.

Cabe lembrar que a “equação canônica” da hipérbole fornece de imediato à medida do semieixo transverso – basta extrair a raiz quadrada do denominador do termo quadrático com coeficiente positivo. Já para calcularmos a medida do semieixo focal precisamos de outros tratamentos simples. Por isso, para fazermos conversões que envolvam medidas, o uso do termo *eixo transverso* (*e não real ou focal*) é mais imediato.

Nos termos que pesquisamos, notamos ainda que as expressões *que se abre* usados nas parábolas não foram usadas para as hipérbolas. Conforme discutimos, esses termos podem remeter a propriedades globais do objeto que, além de intuitivas, são visualmente interessantes. Por isso, pensamos em estender seu uso para as hipérbolas.

Assim, tentando articular aspectos intuitivos, delimitações formais e semióticas propomos o seguinte registro *básico* em língua natural para as hipérbolas padrão: *hipérbole abrindo em  $\alpha$* . Nessa convenção o eixo  $\alpha$  é o eixo de simetria que intercepta a hipérbole (por consequência da definição da hipérbole, esse eixo contém os vértices, os focos e o eixo transverso). Com essas convenções, temos as seguintes correlações.

Quadro 3. Propostas de registros *básicos* em língua natural para as hipérbolas padrão

Registros básicos em língua natural	Variável visual	Unidade significativa simbólica correspondente
<i>Hipérbole abrindo em <math>\alpha</math>.</i>	- O eixo $\alpha$ é o eixo de simetria que intercepta a hipérbole.	- A variável quadrática $\alpha^2$ tem coeficiente positivo.

Fonte: os autores.

No sistema cartesiano  $xy$ , temos dois valores (o eixo de simetria que intercepta a hipérbole coincide com o eixo  $x$  ou com o eixo  $y$ ) e a unidade simbólica correspondente assumi dois valores ( $x^2$  ou  $y^2$ ) Como exemplo, o registro básico em língua natural de  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  (a variável quadrática  $x^2$  tem coeficiente positivo) é *hipérbole abrindo em  $x$* , com isso, o eixo  $x$  é o eixo de simetria que intercepta a hipérbole.

Além das implicações do quadro anterior, é imediato que a raiz quadrada do denominador da variável quadrática  $\alpha^2$  é numericamente à medida do semieixo transverso. Assim, podemos esboçar o gráfico dessa cônica.

Optamos em propor um registro que chame a atenção para a variável visual relativa à simetria. Porém, conforme já dissemos também é interessante o registro *eixo focal sobre eixo dos  $\alpha$*  se quisermos chamar a atenção para a variável visual eixo focal ou os focos.

Entendemos apenas que nossa escolha parece evidenciar uma propriedade mais global da figura que é a questão da simetria.

## REGISTROS EM LÍNGUA NATURAL DAS ELIPSES NAS POSIÇÕES PADRÃO

Para as elipses no  $R^2$  que estão nas posições padrão (os eixos coordenados são eixos de simetria), encontramos na literatura termos semelhantes à *elipse em que o eixo maior está sobre o eixo dos  $x$  ou dos  $y$*  (Winterle, 2000), *elipse com eixo maior (ou focos) ao longo (ou sobre) o eixo  $x$  ou  $y$*  (Anton, 2002) e *elipse cujo centro está na origem e cujo eixo focal (ou maior) é coincidente com o eixo  $x$  ou  $y$*  (Lehmann, 2007).<sup>12</sup>

Esses autores consideram a circunferência como um tipo de elipse<sup>13</sup> e optam em não usar os termos do parágrafo anterior para as circunferências.<sup>14</sup>

Além de explicitar propriedades globais da figura, do ponto de vista semiótico o termo *elipse com eixo maior (ou focos) ao longo (ou sobre) o eixo  $\alpha$*  tem unidades significantes que permitem realizar conversões de forma bastante imediata e simples. Por isso, pensamos que são termos potencialmente proveitosos.

Para efeitos de comparação, cabe lembrar que a “equação canônica” da elipse fornece de imediato à medida do semieixo maior – basta extrair a raiz quadrada do maior denominador dos termos quadráticos. Já para calcular a medida do semieixo focal precisamos de outros tratamentos simples. Por isso, para fazermos conversões que envolvam medidas, o uso do registro *elipse com eixo maior sobre o eixo  $\alpha$*  é mais imediato do que quando usamos o termo *eixo focal sobre o eixo  $\alpha$* .

No  $R^3$  alguns autores usam o termo ... *alongado* ... para se referir a certos *elipsoides*. Semioticamente o que está por traz da definição desse termo são questões análogas as provenientes das elipses – a comparação entre o tamanho dos eixos.<sup>15</sup>

Tentando estender o uso do termo *alongado* para as elipses, propomos os seguintes registros *básicos* em língua natural. Neles, estamos supondo que o eixo  $\alpha$  é o eixo que contém o eixo maior da elipse.

<sup>12</sup> Para ver os termos com mais detalhamento veja Winterle (2000, p.180), Anton (2002, p.152-153) e Lehmann (2007, p.148). Não encontramos contribuições de Leithold (1994) para as elipses.

<sup>13</sup> Ver Winterle (2000, p.182), Anton (2002, p.152) e Lehmann (2007, p.182).

<sup>14</sup> Apoiados no Princípio de Extensão de Caraça (1951), estamos consideramos que a circunferência é um tipo de elipse.

<sup>15</sup> Esta discussão estará na Tese de doutorado do primeiro autor deste artigo.

Quadro 4. Propostas de registros *básicos* em língua natural para as elipses padrão

Registros básicos em língua natural	Variáveis visuais	Unidades significantes simbólicas correspondentes
<i>Elipse alongada em <math>\alpha</math>.</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Os eixos maior e menor da elipse têm medidas diferentes;</li> <li>- e o eixo maior da elipse está contido no eixo coordenado <math>\alpha</math>.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Os denominadores dos dois termos quadráticos são diferentes;</li> <li>- entre os dois termos quadráticos o maior denominador está sobre a variável <math>\alpha^2</math>.</li> </ul>
<i>Circunferência com <math>R = R_0</math>.</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Os eixos da elipse têm medidas iguais;</li> <li>- a medida do raio <math>R</math> é <math>R_0</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Os denominadores dos dois termos quadráticos são iguais;</li> <li>- o denominador de cada termo quadrático é numericamente igual ao quadrado da medida do raio.</li> </ul>

Fonte: os autores.

No sistema cartesiano  $xy$ , a primeira variável visual, que se refere à comparação entre o tamanho dos eixos, assume dois valores (iguais ou diferentes) sendo que com ela diferenciamos elipses do tipo alongadas das que são do tipo circunferências. No caso das alongadas, há outra variável visual que é a posição do eixo maior e que também assume dois valores (o eixo maior está contido no eixo  $x$  ou no eixo  $y$ ). No caso das circunferências, há ainda a variável visual medida do raio que assume infinitos valores.

Com exemplo, em  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  (os denominadores de  $x^2$  e  $y^2$  são diferentes; o maior denominador entre essas 4 variáveis está sobre  $x^2$ ) temos uma *elipse alongada em  $x$* . Além disso, expandindo o discurso é possível saber que a medida do semieixo maior é  $\sqrt{4} = 2$  unidades de comprimento (u.c).

Com alguns ajustes, pode-se propor o registro *elipse achatada em  $\alpha$* . Com isso, chegaríamos resultados semelhantes aos que propomos.

Por ser uma figura fechada, é claro que o termo ... *abrindo* ... não faz sentido para as elipses e, por isso, não o usamos nesses casos. Ainda ressaltamos que a excentricidade<sup>16</sup> ( $e$ ) também é uma variável visual importante, pois, com ela, podemos discutir o maior ou menor “alongamento” da elipse. Assim, conforme o interesse de estudo, podemos dizer “*elipse alongada em  $\alpha$  com  $e = e_0$* ”. No caso em que temos uma circunferência, como  $e = 0$ , esse acréscimo é desnecessário. Seja como for, pode-se sempre fazer outros acréscimos conforme a conveniência.

<sup>16</sup> Camargo e Boulos (2005) ainda falam em *centralidade*.



## REGISTROS EM LÍNGUA NATURAL DAS PARÁBOLAS, HIPÉRBOLES E ELIPSES TRANSLADADAS E/OU ROTACIONADAS

Já designamos o que é o eixo  $\alpha$  para as parábolas, hipérboles e elipses na posição padrão. No quadro a seguir, o acréscimo das aspas (') em  $\alpha$  indica translação; já o acréscimo de  $\theta$  indica rotação (o sentido de rotação a convencionar pelo professor). O significado de  $\alpha_+$  e  $\alpha_-$  com os citados acréscimos é análogo. Além disso, convencionaremos que para as parábolas  $V(x_0, y_0)$  representa as coordenadas do vértice e para as elipses e hipérboles  $C(x_0, y_0)$  representa as coordenadas do centro. Assim, o quadro a seguir apresenta os registros *básicos* em língua natural para o caso das posições padrão e também para os casos em que há transladadas e/ou rotação. Temos como base que a posição dessas figuras no sistema cartesiano é uma variável visual que assume os valores padrão, transladado, rotacionado e transladado/rotacionado. Com isso, os registros que propomos para os casos transladados e rotacionados tentam incluir os correspondentes elementos algébricos que se relacionam a essas transformações.

Quadro 5. Propostas de registros *básicos* em língua natural para as parábolas, hipérboles e elipses padrão, transladadas e rotacionadas

Posição padrão	Posição transladada	Posição rotacionada	Posição transladada e rotacionada
Parábola abrindo em $\alpha_+$ (ou em $\alpha_-$ ).	Parábola abrindo em $\alpha'_+$ (ou em $\alpha'_-$ ) e $V(x_0, y_0)$ .	Parábola abrindo em $(\alpha_+)_\theta$ (ou em $(\alpha_-)_\theta$ );	Parábola abrindo em $(\alpha'_+)_\theta$ (ou em $(\alpha'_-)_\theta$ ) e $V(x_0, y_0)$ .
Hipérbole abrindo em $\alpha$ .	Hipérbole abrindo em $\alpha'$ e $C(x_0, y_0)$ .	Hipérbole abrindo em $\alpha_\theta$ .	Hipérbole abrindo em $\alpha'_\theta$ e $C(x_0, y_0)$ .
Elipse alongada em $\alpha$ .	Elipse alongada em $\alpha'$ e $C(x_0, y_0)$ .	Elipse alongada em $\alpha_\theta$ .	Elipse alongada em $\alpha'_\theta$ e $C(x_0, y_0)$ .
Circunferência com $R = R_0$ .	Circunferência com $R = R_0$ e $C(x_0, y_0)$ .	Não convém	Não convém

Fonte: os autores.

Como vemos, mediante algumas adaptações e/ou ampliações, tentamos estender nossas propostas de registros para as diferentes posições.

Como exemplo, analisaremos o caso da parábola de equação  $(x - 1)^2 = 4(y - 2)$ . Conforme sabemos, nesse caso temos as seguintes características:  $V = (1, 2)$ ; o eixo de simetria é o eixo  $y'$  (paralelo ao eixo  $y$  e tem equação  $x = 1$ ); a projeção ortogonal da parábola sobre o eixo  $y'$  coincide com os pontos do semieixo  $y'_+$  (equação  $x = 1; y \geq 2$ ). Com isso, o correspondente registro básico em língua natural é: “*parábola abrindo em  $y'_+$  e  $V = (1, 2)$ ”.*

Conforme o interesse, algumas questões a respeito do eixo, como sua equação ou outro elemento, podem ser especificados entre parênteses logo após sua notação. Assim,

o exemplo anterior pode ser registrado da seguinte maneira: “*parábola abrindo em  $y_+^4$  ( $x = 1; y \geq 2$ ) e  $V = (1, 2)$ ”.* Podemos ainda incluir outros elementos logo após o registro básico que propomos. Assim, nos casos em que as parábolas, elipses e hipérbolas são obtidas pelas interseções com planos – questão recorrente no estudo as superfícies quádricas –, podemos fazer acréscimos como, por exemplo, “*hipérbole abrindo em  $y'$ ,  $V(x_0, y_0, z_0)$  e contida no plano de equação  $E$ ”.*<sup>17</sup>

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os termos que Leithold (1994), Winterle (2000), Anton (2002) e Lehmann (2007) usam para se referir as elipses, hipérbolas e parábolas têm potencial para dizer algo dos objetos sob a forma de uma proposição matemática (*Função Apofântica*), para religar a outras proposições matemáticas de forma coerente (*Expansão Discursiva*) e realizar conversões, por isso, na perspectiva da TRRS, pensamos que eles podem trazer contribuições interessantes para a aprendizagem. Entretanto, por vezes nos deparamos com os seguintes problemas: a designação dos objetos não é consistente (*Função Referencial*) e geralmente não deixam explícitas correlações entre os registros em língua natural com unidades simbólicas e visuais; uso mais enfático apenas dos aspectos intuitivos; recurso de codificações em detrimento de conversões. Dessa forma, os aspectos semióticos e cognitivos podem ser comprometidos ou pouco explorados e, com isso, mesmo diante do citado potencial, podem surgir problemas na identificação dos objetos, além de comprometer os tratamentos, as conversões e as expansões que envolvam os registros em língua natural.

De qualquer forma, os termos pesquisados parecem recorrer, mesmo que nem sempre explicitamente, a algumas variáveis visuais e a propriedades globais das figuras.

Com nossas propostas nossa intenção é que os registros em língua natural contenham algumas e não todas as variáveis visuais do objeto. Do contrário, os registros seriam tediosos e nada práticos. Para tanto, nos focamos em escolher variáveis visuais que expõem propriedades globais da figura. Conseqüentemente, podem-se incluir outros elementos em nossa proposta ou, ainda, escolher outras variáveis diferentes das que escolhemos o que, inclusive, pode sugerir outros termos. Pensamos que estas escolhas dependerão dos interesses dos professores e dos alunos. Portanto, não pretendemos que nossos termos sejam absolutos e, assim, queremos apenas contribuir para o debate.

Como contribuição nossas propostas almejam as seguintes possibilidades: (1) criar designações linguísticas que não apresentem problemas de referência aos objetos e que possuam articulações explícitas entre os registros em língua natural com as unidades simbólicas e as variáveis visuais tomadas; (2) explorar linguisticamente todas as diferentes posições de uma cônica no sistema cartesiano; (3) a partir dos registros em língua natural, explorar de maneira imediata ao menos uma propriedade global da figura e por Expansões

<sup>17</sup> Nos casos em que se deseja especificar as equações do plano e/ou da reta elas podem estar na forma que se julgar mais conveniente.

Discursivas explorar outras propriedades; (4) realizar conversões entre os registros em língua natural, gráfico e simbólico. Assim, pode-se dar mais destaque aos aspectos semióticos e cognitivos presentes nos registros em língua natural sem, com isso, fazer com que um termo linguístico tenha apenas a função de codificação.

Cabe também lembrar que para a TRRS a aprendizagem integrativa não se limita a apenas o estudo dos registros em língua natural e, por isso, a apropriação apenas desses termos não é o suficiente para esse tipo de aprendizagem. Além disso, o entendimento desses termos necessita que se tenham noções básicas a respeito das cônicas.

## REFERÊNCIAS

- Anton, Howard. (2002) *Cálculo: um novo horizonte*. v.2. 6.ed. Porto Alegre: Bookman. 552p. Tradução: Cyro de Carvalho Patarra; Márcia Tamanaha.
- Brandt, Célia Finck. (2005) *Contribuições dos registros de representação semiótica na conceituação do sistema de numeração*. 2005. 242 f. Tese (Doutorado) – Curso de Pós-graduação em Educação Científica e Tecnológica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.
- Brandt, Célia Finck & Moretti, Mércles Thadeu. (2005) O papel dos registros de representação na compreensão do sistema de numeração decimal. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, 7(2), 201-227.
- Brandt, Célia Finck; Moretti, Mércles Thadeu; & Bassol, Tânia Stella. (2014) Estudo das funções do discurso na resolução de problemas matemáticos. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, 16(2), 479-503.
- Burak, D. & Brandt. C.F. (2010) Modelagem Matemática e Representações Semióticas. Contribuições para o desenvolvimento do pensamento algébrico. *ZETETIKÉ – FE – Unicamp* –8(33).
- Camargo, Ivan de & Boulos, Paulo. (2005) *Geometria analítica: um tratamento vetorial*. 3.ed. São Paulo: Prentice Hall. 543p.
- Caraça, B. J. (1951) *Conceitos fundamentais da matemática*. Lisboa: Bertrand.
- Corrêa, Madeline Odete Silva; & Moretti, Mércles Thadeu. (2014) Esboçando curvas de funções a partir de suas propriedades figurais: uma análise sob a perspectiva dos registros. In: Brandt, Célia Finck; & Moretti, Mércles Thadeu. (Orgs.). *As contribuições da Teoria dos Registros de Representações Semióticas para o Ensino e a Aprendizagem na Educação Matemática*. Ijuí: Ed. Unijuí.
- Dionizio, Fátima Aparecida Queiroz & Brandt, Célia Finck. (2014) Conhecimentos docentes: uma análise dos discursos de professores que ensinam matemática. In: Brandt, Célia Finck; Moretti, Mércles Thadeu. (Orgs.). *As contribuições da Teoria dos Registros de Representações Semióticas para o Ensino e a Aprendizagem na Educação Matemática*. Ijuí: Ed. Unijuí.
- Dionizio, Fátima Aparecida Queiroz; Brandt, Célia Finck & Moretti, Mércles Thadeu. (2014) Emprego das Funções Discursivas da Linguagem na Compreensão de Erros de Alunos em uma Atividade que Envolve Noções de Trigonometria. *Perspectivas da*

*Educação Matemática*, UFMS, 7, 513-553. Número temático. Disponível em: <<http://www.edumat.ufms.br/>>. Acesso em: 11 out. 2014.

Duval, Raymond. (1955) *Sémiósis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Suisse: Peter Lang.

Duval, Raymond. (2003) Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. p.11-33. In: Machado, Silvia D. A. (Orgs.). *Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica*. Campinas: Papirus.

Duval, Raymond. (2004) *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Santiago de Cali: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática. 328p. Tradução de Myriam Vega Restrepo.

Duval, Raymond. (2009) *Semiósis e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais (fascículo I)*. São Paulo: Livraria da Física. 120p. (Coleção contextos da ciência). Tradução de: Lênio Fernandes Levy; Marisa Rosâni Abreu da Silveira.

Duval, Raymond. (2011a) Gráficos e equações: a articulação de dois registros. *REVEMAT*, Florianópolis, 6(2), 91-112. Tradução Mércles Thadeu Moretti. Disponível em: <http://www.periodicos.ufsc.br/index.php/revemat>. Acesso em: 20 ago. 2013.

Duval, Raymond. (2011b) *Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas*. São Paulo: PROEM. 160p. Tradução: Marlene Alves Dias.

Lehmann, Charles H. (2007) *Geometria analítica*. 8.ed. 1. imp. São Paulo: Globo. Tradução de: Ruy Pinto da Silva Sieczkowski.

Leithold, Louis. (1994) *O cálculo com geometria analítica*. 3.ed. São Paulo: Harbra. Tradução de: Cyro de Carvalho Patarra. Revisão técnica de: Wilson Castro Ferreira Júnior e Sílvia Pregolato.

Moretti, Mércles Thadeu & Luiz, Learcino Santos. (2010) O procedimento informático de interpretação global no esboço de curvas do ensino superior. *Educação Matemática Pesquisa*. São Paulo. 12(3), 529-547.

Moretti, Mércles Thadeu. (2002) O papel dos Registros de Representação na Aprendizagem de Matemática. *Contra Pontos – Revista de Educação da Universidade do Vale do Itajaí*, Itajaí, 6.

Moretti, Mércles Thadeu. (2003) A translação como recurso no esboço de curvas por meio da interpretação global de propriedades figurais. In: *Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica*. (Org.) Sílvia Dias Alcântara Machado. Campinas: Papirus, 2003.

Né, Adriano Luís dos Santos. (2013) *A análise da linguagem Matemática como elemento para pensar o ensino e a aprendizagem da prática de esboço de curvas no Ensino Superior*. 2013. 157f. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.

Silva, Madeline Odete. (2008) *Esboço de curvas: uma análise sob a perspectiva dos registros de representação semiótica*. 2008. 143f. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.

Winterle, Paulo. (2000) *Vetores e geometria analítica*. São Paulo: Pearson Makron Books. 232p.