Evaluación de la Falacia del Eje Temporal en Futuros Profesores de Educación Secundaria

José M. Contreras García
Carmen Batanero Bernabeu
Carmen Díaz Batanero
Pedro Arteaga

RESUMEN

Se analizan las respuestas a tres ítems relacionados con la falacia del eje temporal y a un problema sobre el Teorema de Bayes en 196 futuros profesores de educación secundaria y Bachillerato. Se comparan los resultados en dos grupos de profesores, y con los de Díaz y de la Fuente (2007) en 414 estudiantes de Psicología, observando que la mayor preparación matemática de los participantes en nuestro estudio no contribuye a la superación de este sesgo ni a la mayor competencia en la resolución del problema. Se encuentra también una asociación estadísticamente significativa entre la solución correcta a los ítems que evalúan la falacia y la resolución del problema. Se concluye la necesidad de una mejor formación probabilística de los futuros profesores que incluya actividades dirigidas a confrontarlos con sus sesgos de razonamiento.

Palabras clave: Sesgos. Probabilidad Condicional. Futuros Profesores de Secundaria. Evaluación.

Assessing the Time Axis Fallacy in Prospective Secondary School Teachers

ABSTRACT

In this paper we analyze the responses to three items related to the time axis fallacy and a Bayes problem in a sample of 196 prospective secondary and high school mathematics teachers. Results are compared in two groups according their background and also with those obtained by Díaz (2007) in a sample of 414 Psychology students. We observed no difference in the extension of this bias or better competence to solve the problem in our participants in spite of the higher mathematical preparation. A significant association between the correct responses to the time axis fallacy and the correct solution to the problem was also found. We conclude the need for a better preparation of prospective teachers that include some activities directed to confront them with their reasoning biases.

Keywords: Biases. Conditional Probability. Prospective Secondary Teachers. Assessment.

José M. Contreras García é Doctor en Didáctica de la Matemática, Profesor Ayudante Doctor, Universidad de Granada. Endereço para correspondencia: Departamento de Didáctica de la Matemática, Facultad de Educación, Campus de Cartuja, 18071 Granada, España. E-mail: jmcontreras@ugr.es

Carmen Batanero Bernabeu é Doctora en Matemáticas, Catedrática, Universidad de Granada. Endereço para correspondencia: Departamento de Didáctica de la Matemática, Facultad de Educación, Campus de Cartuja, 18071 Granada, España. E-mail: batanero@ugr.es

Carmen Díaz Batanero é Doctora en Metodología de las Ciencias del Comportamiento, Universidad de Huelva, Departamento de Psicología, Facultad de Educación y Psicología, Campus El Carmen. Endereço para correspondencia: Avda. Fuerzas Armadas, 21071 H21071 Huelva, España. E-mail: carmen.diaz@dpsi.uhu.es

Pedro Arteaga é Doctor en Didáctica de la Matemática, Profesor Ayudante Doctor, Universidad de Granada. Endereço para correspondencia: Departamento de Didáctica de la Matemática, Facultad de Educación, Campus de Cartuja, 18071 Granada, España. E-mail: parteaga@ugr.es

1. INTRODUCCIÓN

Aunque la enseñanza de la probabilidad ha estado presente en la educación secundaria en las últimas dos décadas, recientemente las orientaciones curriculares hacen un mayor énfasis en la necesidad de reforzar las intuiciones probabilísticas de los estudiantes mediante una aproximación más experimental (NCTM, 2000; MEC, 2006a, 2006b, 2007; CAMPOS; CAZORLA; KATAOKA, 2011).

En España, por ejemplo, el Decreto de Enseñanzas Mínimas de la Educación Secundaria (alumnos de 12 a 16 años) incluye, entre otros, los siguientes contenidos dentro del Bloque 6, Estadística y Probabilidad: (MEC, 2006b): Formulación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos y diseño de experiencias para su comprobación (Primer curso). Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace y mediante la simulación o experimentación (Segundo curso) Experiencias compuestas. Utilización de tablas de contingencia y diagramas de árbol para el recuento de casos y la asignación de probabilidades. Probabilidad condicionada (Tercer curso). Estos contenidos se amplían en las diferentes especialidades de Bachillerato (17-18 años), con el estudio de la probabilidad compuesta, condicionada, total y a posteriori, y las distribuciones binomial y normal.

Dentro de estos contenidos, un tema particularmente delicado es la probabilidad condicional, que permite incorporar cambios en nuestro grado de creencia sobre los sucesos aleatorios a medida que adquirimos nueva información y es un concepto teórico requerido en la construcción del espacio muestral producto (DÍAZ; DE LA FUENTE, 2007). Por ello, su correcta comprensión es requisito en el estudio de la inferencia estadística, la correlación y regresión. En el terreno profesional e incluso en la vida cotidiana, la toma de decisiones acertadas en situaciones de incertidumbre se basa en gran medida en el razonamiento condicional.

Intuitivamente, la probabilidad condicional $P(A/B)$ de un suceso A dado otro suceso B se define como la probabilidad de que ocurra A sabiendo que B se ha verificado. Igualmente puede definirse intuitivamente la independencia, indicando que dos sucesos son independientes si la probabilidad de uno de ellos no cambia al condicionarlo por el otro. Estas definiciones, no presentan problemas importantes de comprensión; sin embargo, la psicología del razonamiento y la didáctica de la probabilidad muestran sesgos de razonamiento y errores de aplicación de estos conceptos (FALK, 1986; POLLATSEK; WELL; KONOLD; HARDIMAN, 1987; TARR; JONES, 1997; SEDLMEIER, 1999; TARR; LANNING, 2005; DÍAZ; DE LA FUENTE, 2007).

Una condición para asegurar el éxito de las propuestas curriculares sobre la probabilidad condicional es que los mismos profesores muestren un conocimiento suficiente y hayan superado los posibles sesgos asociados al razonamiento probabilístico. Puesto que la preparación de los profesores de matemáticas es esencialmente científica, algunos de ellos pudieran no ser conscientes de los matices psicológicos ligados a la probabilidad condicional y sus intuiciones no corresponder al conocimiento normativo que se trata de transmitir en la clase de matemáticas.

El objetivo de este estudio es evaluar entre los futuros profesores la posible presencia de uno de estos sesgos, conocido como falacia del eje temporal, muy extendido en el estudio de Díaz y de la Fuente (2007) en una muestra de 414 estudiantes de Psicología. Las autoras sugirieron que este sesgo puede repercutir posteriormente en dificultades en la resolución de problemas de Bayes y en la comprensión de conceptos de inferencia, aunque no comprobaron en su estudio esta conjetura, que nosotros trataremos de contrastar, incluyendo en nuestro cuestionario, tanto ítems que evalúan la falacia del eje temporal, como un problema tipo Bayes. En lo que sigue se describen los antecedentes del estudio, material y método y se discuten los resultados.

2. ANTECEDENTES

Dos tipos de antecedentes son relevantes para nuestro estudio: las investigaciones específicamente relacionadas con la falacia que se pretende evaluar y los estudios de evaluación del razonamiento probabilístico de los futuros profesores.

2.1 La falacia del eje temporal

Este razonamiento incorrecto, descrito por primera vez por Falk (1986), consiste en suponer que, cuando se calcula una probabilidad condicional, el suceso condicionante ha de ocurrir antes que el suceso condicionado. Al contrario de lo supuesto por los que comparten esta creencia, matemáticamente no hay ninguna condición sobre el orden temporal de los sucesos que intervienen en una probabilidad condicional (TVERSKY; KAHNEMAN, 1982). Por otro lado, hay muchas situaciones en que la condición es posterior al suceso condicionado; por ejemplo, cuando en un estudio médico se trata de calcular la probabilidad de que un determinado síntoma sea producido por una enfermedad específica y, en general, siempre que se aplica el Teorema de Bayes.

La falacia del eje temporal ocurre cuando se asume, incorrectamente que el conocimiento de un suceso posterior no afecta la probabilidad de otro que ocurrió previamente. En su estudio, Falk (1986) encontró que, mientras los alumnos no tenían dificultad para resolver problemas de probabilidad condicional si la condición es temporalmente anterior al suceso cuya probabilidad se pide, son, en muchos casos, incapaces de calcularla si la condición es posterior a dicho suceso.

Es claro que un suceso posterior no puede afectar causalmente a otro que ocurre con anterioridad. Por ello Falk (1986) sugiere que la falacia del eje temporal se relaciona con la confusión entre condicionamiento y causación. La causalidad es un concepto complejo, aunque comprendido de forma intuitiva por las personas, ya que construimos nuestro conocimiento del mundo sobre la base de relaciones de causa y efecto (KELLY; ZWIERS, 1986). Una relación de causalidad implica una dependencia entre sucesos, pero no al contrario, pues dos sucesos pueden ser dependientes sin que uno de ellos sea causa del otro (TVERSKY; KAHNEMAN, 1982). Desde el punto de vista psicológico, dependiendo podemos interpretar en dos formas una probabilidad condicional $P(A/ B)$:

- Si B (suceso condicionante) es una causa de A, la persona que calcula la probabilidad condicional establecerá entre A y B una *relación causal*. Un ejemplo sería la probabilidad de que una niña tenga los ojos azules si su padre tiene los ojos azules.
- Si A es una causa de B, A y B tienen una *relación diagnóstica*. Un ejemplo sería evaluar la probabilidad que el padre tenga los ojos azules, si la niña tiene los ojos azules.

Aunque matemáticamente los dos enunciados son equivalentes, las relaciones causales se perciben mejor que las diagnósticas, según Tversky y Kahneman (1982), quienes describen la existencia de un sesgo causal cuando las personas se enfrentan con tareas relacionadas con la probabilidad condicional. Estas conclusiones son confirmadas por Gras y Totohasina (1995), quienes describieron dos concepciones erróneas sobre la probabilidad condicional relacionadas con la falacia del eje temporal:

- En la *concepción causal*, los estudiantes identifican condicionamiento y causalidad, interpretando la probabilidad condicional $P(A/B)$ como una relación causal implícita, donde el suceso condicionante B es la causa y A la consecuencia. No se admitirían las relaciones diagnósticas.
- En la *concepción cronológica* los estudiantes interpretan la probabilidad condicional $P(A/B)$ como una relación temporal, donde el suceso condicionante B siempre precede al suceso A. No se admite que la condición pueda ser posterior al suceso condicionado.

En resumen, la investigación previa nos alerta de la existencia en los sujetos de la falacia del eje temporal, donde se supone que el suceso condicionante precede siempre al condicionado y la relación es de tipo causal. Dicha concepción podría también dificultar, la resolución de los problemas de Bayes y posteriormente los de inferencia estadística (DÍAZ; DE LA FUENTE, 2007).

2.2 Conocimiento de los profesores para enseñar probabilidad

Una investigación extensa describe los componentes del conocimiento de los profesores. Entre ellos, nos basamos en el modelo de Hill, Ball y Schilling (2008, p. 374), quienes describen el conocimiento matemático para la enseñanza como "el conocimiento matemático que utiliza el profesor en el aula para producir instrucción y crecimiento en el alumno." Aunque en la educación secundaria no se enseña una probabilidad muy avanzada (por ejemplo, la teoría de la medida), los profesores precisan una comprensión profunda de la probabilidad básica y sus aplicaciones, para organizar la enseñanza y llevarla a la práctica (MA, 1999).

Dentro del conocimiento del contenido matemático, Hill, Ball y Schilling (2008) diferencian el *conocimiento común del contenido, conocimiento especializado del contenido,* y *conocimiento en el horizonte matemático*. Mientras el conocimiento común del contenido es el puesto en juego para resolver problemas matemáticos por cualquier persona, el conocimiento especializado del contenido incluye aspectos que no necesariamente tiene una persona ordinaria, por ejemplo, identificar las ideas matemáticas trabajadas en un problema. El conocimiento en el horizonte matemático incluye, por ejemplo, conocimiento de la relación con otras materias, como la historia de las matemáticas. Para el conocimiento pedagógico del contenido Hill, Ball y Schilling (2008) proponen tres componentes: (a) El *conocimiento del contenido y los estudiantes* o "conocimiento de cómo los estudiantes piensan, saben, o aprenden este contenido particular" (p. 375); (b) *el conocimiento del contenido y la enseñanza*, que resulta de la integración del contenido matemático con el conocimiento de la enseñanza de dicho contenido; y (c) *el conocimiento del contenido y el currículo* o conocimiento de las orientaciones curriculares relacionadas con dicho contenido.

El modelo descrito sugiere que los conocimientos matemáticos no son suficientes por si solos para que los docentes puedan enseñar probabilidad de una manera efectiva. En concreto, el conocimiento de los sesgos en el razonamiento probabilísticos forma parte tanto del conocimiento del contenido y los estudiantes como del conocimiento especializado del contenido requerido por el profesor. Para asegurar este conocimiento, nuestro trabajo se dirige a evaluar la existencia de un posible sesgo relacionado con la probabilidad condicional en futuros profesores. Además se desea evaluar si dicho sesgo influye en la solución de otros problemas; más específicamente, de problemas de Bayes.

2.3 Razonamiento probabilístico de futuros profesores

La mayoría de investigaciones sobre el razonamiento probabilístico de futuros profesores se centran en los profesores de primaria. Por ejemplo, Azcárate (1996), y Azcárate, Cardeñoso y Porland (2001) analizan a 57 futuros profesores de Educación Primaria, observando que muy pocos comprendían las características de los fenómenos aleatorios, relacionando la aleatoriedad con la causalidad y no comprendiendo la utilidad de la probabilidad para estudiarlos. Ortiz, Nordin, Batanero, Serrano y Rodríguez (2006) evaluaron la capacidad de 102 futuros profesores españoles de educación primaria para comparar probabilidades mostrando el uso de estrategias incorrectas. Batanero, Cañizares y Godino (2005) proponen un cuestionario a 132 futuros profesores españoles de educación primaria, observando sesgos en su razonamiento probabilístico, como la heurística de la representatividad (no tener en cuenta el tamaño de una muestra al analizar la convergencia de la frecuencia a la probabilidad) y el sesgo de equiprobabilidad (considerar que en un experimento aleatorio todos los resultados son equiprobables). Contreras (2011) y Contreras, Estrada, Díaz y Batanero (2010) analizan las respuestas de 183 futuros profesores españoles de educación primaria a tres tareas para evaluar su conocimiento sobre el cálculo de probabilidades en tablas de contingencia 2x2, encontrando errores en el cálculo de probabilidades conjuntas y condicionales en más de la mitad de la muestra.

Carter (2008) analizó las respuestas de 210 futuros profesores de secundaria, a un cuestionario, observando sesgos como la falacia del jugador (considerar que después de una racha de un mismo resultado en un experimento aleatorio aumenta la probabilidad del suceso contrario), el sesgo de equiprobabilidad, errores de cálculo la probabilidad conjunta y heurística de representatividad. Mohr (2008) analizó las respuestas de 122 futuros profesores de secundaria a un cuestionario sobre comprensión de la independencia, observando muchas dificultades entre los participantes. Por último, otros autores también destacan las dificultades de estos profesores con la probabilidad condicional (HUERTA; CERDÁN, 2010). En este trabajo ampliamos los anteriores estudios con una evaluación de las dificultades que los futuros profesores de Educación Secundaria y Bachillerato tienen con la falacia del eje temporal y cómo ésta afecta a su solución de los problemas de Bayes.

3. METODOLOGÍA

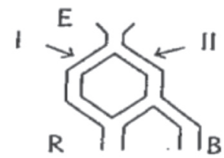
En España el acceso a profesor de matemáticas de secundaria se realiza mediante un concurso, para el que se exige un título específico de Máster Universitario en Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas, en la especialidad de matemáticas (en lo sucesivo Máster de Secundaria). Aproximadamente el 50% de los que acceden a dicho Máster son Licenciados de Matemáticas y el resto tienen diversas titulaciones científicas o técnicas. Por otro lado, dentro de la Licenciatura de Matemáticas, el 90% de los egresados realizan el concurso para profesor de matemáticas de secundaria, al finalizar su formación. En consecuencia, los profesores de matemática en España provienen en la misma proporción de dos tipos de estudios: (a) o bien son licenciados en Matemáticas (el 90% de dichos titulados) o bien son egresados del Máster de Secundaria.

Para conseguir una muestra representativa de futuros profesores de secundaria españoles se decidió tomar estos dos tipos de alumnos, eligiendo varias universidades para lograr un tamaño de muestra adecuado y mejorar la representatividad, puesto que el número de alumnos, tanto en la licenciatura de matemáticas, como en el Máster es pequeño en cada universidad. Con estos criterios, en el estudio participaron 196 futuros profesores de educación secundaria, divididos en 95 alumnos de la Licenciatura de Matemáticas y 101 alumnos del Máster de Secundaria. La submuestra de alumnos de matemáticas ha sido tomada en tres universidades: Granada, La Laguna y Salamanca y la de alumnos del Máster en las Universidades de Alicante, Cádiz, Barcelona, Extremadura, Granada, Navarra, Salamanca, Santiago de Compostela y Valladolid, lo que supone una variedad de comunidades autónomas y situación geográfica. En cada uno de estos grupos participaron entre el 90 y 100% de los estudiantes matriculados.

El cuestionario (Figura 1) estuvo formado por tres ítems de opción múltiple, tomados del cuestionario RPC (Razonamiento sobre Probabilidad Condicional) elaborado por Díaz (2007).

FIGURA 1 – Cuestionario

Ítem 1. Una bola se suelta en E. Si sale por R, ¿Cuál es la probabilidad de que haya pasado por el canal I?



a. 0’50
b. 0’33
c. 0’66
d. No se puede calcular

Ítem 2. Una urna contiene dos bolas blancas y dos bolas negras. Extraemos a ciegas dos bolas de la urna, una detrás de otra, sin reemplazamiento. ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola negra en segundo lugar, habiendo extraído una bola negra en primer lugar? P (N2/ N1)

a. 1/ 2
b. 1/ 6
c. 1/ 3
d. 1/ 4

Ítem 3. ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola negra en primer lugar, sabiendo que hemos extraído una bola negra en segundo lugar? P (N1/ N2)

a. 1/ 3
b. 1/ 4
c. 1/ 6
d. 1/ 2

Ítem 4. Una fábrica dispone de dos máquinas M1 y M2 que fabrican bolas. La máquina M1 fabrica el 40 % de las bolas y la M2 el 60%. El 5% de las bolas fabricadas por M1 y el 1% de las fabricadas por M2 son defectuosas. Tomamos una bola al azar que resulta ser defectuosa. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido fabricada por M1?

El resultado correcto del ítem 1 (original de Ojeda, 1995) es el (c) ya que el espacio muestral de este experimento sería {(I,R), (II,R), (II,B)} siendo:

$$P(I,R)=\frac{1}{2},\ P(II,R)=\frac{1}{4}\ \text{y}\ P(II,B)=\frac{1}{4}.$$

Por tanto la probabilidad condicionada viene dada por:

$$P(I/R) = P(I,R)/\ P(R) = \frac{1/2}{3/4}= \frac{2}{3}.$$

Si se elige el distractor (b) se está confundiendo el suceso condicionante, ya que se estaría calculando la probabilidad de que, habiendo salido la bola por *R*, hubiese pasado por *II*. Si se elige el distractor (a) no se está teniendo en cuenta las bolas que caen por el orificio *B*, es decir no se tiene en cuenta el condicionamiento por un suceso posterior, haciendo una incorrecta restricción del espacio muestral. Si se elige (d) se piensa que no se puede calcular; en los distractores (a) y (d) el alumno comete la falacia del eje de tiempos.

El ítem 2 evalúa la capacidad de resolver problemas de probabilidad condicional en un contexto de muestreo sin reposición. El alumno ha de tener en cuenta la composición de la urna una vez sacada la bola negra, es decir, el hecho de que *la probabilidad condicional supone una restricción del espacio muestral.* Una vez sacada una bola negra de la urna tenemos una bola negra y dos blancas, por lo que la probabilidad de obtener una bola negra es igual a 1/3.

Si elige el distractor (a) está confundiendo muestreo con y sin reposición, ya que está considerando que la extracción de la bola negra no modifica el espacio muestral y, por tanto, la probabilidad es igual a 1/2. Si elige el distractor (b) está confundiendo la probabilidad condicional con la conjunta ya que está aplicando la regla del producto: (1/2)(1/3)=1/6. En el distractor (d) se confunde probabilidad condicional y probabilidad simple, ya que sólo está considerando la probabilidad de obtener una bola negra en la primera extracción (1/4).

La solución del ítem 3 es matemáticamente la misma que la del ítem 2, pero se ha invertido el orden de la condición para evaluar la falacia del eje de tiempo. Este problema requiere un razonamiento probabilístico que es indiferente al orden temporal (DÍAZ, 2007). Para resolverlo, además de comprender, como en el caso anterior la diferencia entre muestreo con reposición y sin reposición, el alumno ha de darse cuenta de que si en segundo lugar, hay una bola negra, ésta queda eliminada en la primera extracción, por lo que el espacio muestral de la primera extracción queda restringido. Por tanto, como en el caso anterior la solución es 1/3. La explicación de los distractores es semejante a la realizada para el ítem anterior.

El ítem 4 se incluye para comprobar la posible relación de la falacia del eje de tiempo con la competencia en resolución de un problema de Bayes en que potencialmente aparecería dicha falacia. En el apartado de resultados se discute con detalle los pasos para llegar a la solución correcta del problema.

4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Para la recogida de datos se contactó con algunos profesores del último curso de la Licenciatura de Matemáticas y del Máster de Secundaria, quienes se ofrecieron para colaborar en la obtención de datos. Las instrucciones para cumplimentarlo, tiempo disponible e instrucciones fueron iguales en todos los grupos y los datos se recogieron dentro de una de las asignaturas cursadas por los alumnos. Una vez que los alumnos completaron el cuestionario, en otra sesión de la asignatura se discutieron con ellos las soluciones y los posibles fallos y sesgos que se encontrasen. De este modo la actividad de completar el cuestionario, junto con la sesión posterior de corrección y análisis de los sesgos se convirtió en una actividad formativa sobre didáctica de la probabilidad en las universidades y cursos participantes.

4.1 Falacia Temporal

En la Tabla 1 se muestran los resultados del ítem 1, muy semejantes en los dos grupos de nuestro estudio, donde alrededor del 23% en cada uno de los grupos de futuros profesores en nuestro estudio fue capaz de dar una respuesta correcta al problema, aunque los resultados fueron mejores que los de Díaz (2007) con alumnos de Psicología. Destacan el 65,3% y 69,3% de nuestras muestra y el 76,8% de la de Díaz dio como respuesta el distractor (a), no teniendo en cuenta las bolas que caen por B, es decir el condicionamiento por un suceso posterior. Se podría sumar a estos resultados unos pocos sujetos que eligen el distractor (d). El distractor (b) dado por unos pocos sujetos indica que se han considerado equiprobables los tres caminos, consistente con el sesgo de equiprobabilidad (LECOUTRE, 1992).

TABLA 1 – Resultados en el ítem 1.

	Matemáticas (n=95)		Máster (n=101)		Psicología (n=414)	
	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
a. 0,50	62	65,3	70	69,3	318	76,8
b. 0,33	9	9,5	6	5,9	37	8,9
c. 0,66	22	23,1	24	23,8	41	9,9
d. No se puede calcular	2	2,1	0	0	7	1,7
En blanco	0	0	1	1,0	11	2,7
Total	95	100,0	101	100,0	414	100,0

Los resultados en el ítem 2 (Tabla 2) muestran que el porcentaje mayoritario de sujetos de nuestra muestra en cada grupo de futuro profesores fue capaz de contestar correctamente al problema de muestreo con reposición, cuando el suceso condicionante antecede al condicionado. Comparando estos datos con los de Díaz, vemos que se asemeja el porcentaje de respuestas correctas, aunque es un poco mayor en este último estudio. Entre el 28,7% y 16,9%, según grupo, confundieron la probabilidad condicional y la conjunta (distractor b) aplicando la regla del producto (1/2)(1/3)=1/6.

TABLA 2 – Resultados en el ítem 2

	Matemáticas (n=95)		Máster (n=101)		Psicología (n=414)	
	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
a. 1/ 2	4	4,2	3	3,0	23	5,6
b. 1/ 6	23	24,2	29	28,7	70	16,9
c. 1/ 3	62	65,3	64	63,3	285	68,8
d. 1/ 4	4	4,2	4	4,0	30	7,3
En blanco.	2	2,1	1	1,0	6	1,4
Total	95	100,0	101	100,0	414	100,0

Son pocos los sujetos que confundieron muestreo con y sin reposición (distractor a), considerando que la extracción de la bola negra no modifica el espacio muestral y, por tanto, identificaban la probabilidad como 1/2. Por último entre un 4% y un 7,3%, confunden probabilidad condicional y simple (distractor d) ya que consideran únicamente la probabilidad simple de obtener una bola negra en la primera extracción (1/4). La comparación de los dos grupos de futuros profesores, indican una homogeneidad entre ambos grupos, con algunas pequeñas diferencias.

En la Tabla 3 se presentan los resultados del ítem 3, donde se pretendía conocer como los futuros profesores resuelven problemas de probabilidad condicional cuando se invierte el eje de tiempo en contexto de muestreo sin reposición. Observamos que solamente lo resuelve correctamente un 23,2% de los licenciados en matemáticas, un 23,9% de los alumnos de la muestra de Díaz, y un 35,6% de los estudiantes del Máster, confirmando la hipótesis de Falk (1986), de que la dificultad de los problemas de probabilidad condicional crece cuando se invierte el eje temporal, pues formalmente, el ítem es similar al ítem 2 donde la respuesta mayoritaria fue correcta en ambos grupos. La mejor preparación matemática en nuestro estudio, en comparación con los estudiantes de Psicología no sirvió para superar este sesgo.

TABLA 3 – Resultados en el ítem 3 en dos grupos de futuros profesores

	Matemáticas (n=95)		Máster (n=101)		Psicología (n=414)	
	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
a. 1/3	22	23,2	36	35,6	99	23,9
b. 1/4	24	25,3	17	16,8	103	24,9
c. 1/6	12	12,6	13	12,9	38	9,2
d. 1/2	32	33,7	32	31,7	151	36,5
En blanco.	5	5,2	3	3,0	23	5,5
Total	95	100,0	101	100,0	414	100,0

Un 33,7% y 31,7% de los futuros profesores y un 36,5% de la de Díaz no entendieron que se puede condicionar un suceso con otro que ocurra posteriormente, ya que eligieron el distractor (d). Entre el 12,9% y el 9,2% de sujetos, según grupo, se decantaron por el distractor (c) confundiendo probabilidad condicional y simple. El resto (entre el 16 y el 25%) eligieron la opción (b) confundiendo la probabilidad condicional y conjunta, error señalado por Falk (1986). Al comparar los licenciados en matemáticas y alumnos del Máster, los resultados son algo mejores por parte de los alumnos del Máster, aunque el porcentaje de alumnos que incurrió en la falacia del eje de tiempos, distractor (d), fue similar en ambos grupos.

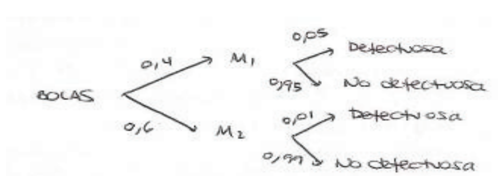
4.2 Resolución de un Problema de Bayes

Para evaluar la solución del ítem 4, siguiendo a Díaz (2007), se han definido cinco categorías: (C0) No llega a identificar correctamente los datos del problema; (C1) identifica los datos o realiza un diagrama en árbol correcto pero no llega a resolver el problema; (C2) construye un diagrama en árbol adecuado o identifica los datos e identifica el problema como de probabilidad condicional; (C3) calcula correctamente la probabilidad total; y (C4) resuelve el problema correctamente. A continuación describimos estas categorías:

C0. *No llega a la identificación correcta de los datos del problema.* Un ejemplo lo tenemos en la siguiente respuesta, donde el sujeto comete la falacia de la condicional transpuesta, consistente en intercambiar condición y condicionado ya señalada por Falk (1986). Además no utiliza el resto de los datos del problema; por tanto consideramos que ni ha identificado los datos correctamente, ni tampoco la pregunta planteada.

> *"La probabilidad de que haya sido fabricadas por M1 es* 5/40, *ya que como M1 fabrica el 40% de las bolas y el 5% de las bolas fabricadas por M1 son defectuosas"* (Sujeto 23).

C1. *Identifica los datos o construye un diagrama en árbol adecuado, completando los datos faltantes,* pero no se identifica la probabilidad pedida y por tanto no se progresa en la solución del problema. Un ejemplo se reproduce a continuación, donde el estudiante completa los primeros pasos para resolver un problema de Bayes, que según Díaz y de la Fuente (2007) es diferenciar entre probabilidad simple *P(M1), P(M2)* y probabilidad condicional *P(D/M1);* diferenciar una probabilidad condicional *P(D/M1)* y su inversa *P(M1/D);* y determinar las probabilidades de sucesos contrarios *P(C/M1)*, etc. Con estos datos el sujeto 91 construye el diagrama de árbol del experimento correctamente pero no continúa el problema, pues, aparentemente no identifica la probabilidad pedida en el enunciado.



(Sujeto 91)

C2. *Identificación correcta de datos y del problema como de probabilidad condicional, pero comete error en el cálculo de la probabilidad total.* Un ejemplo es el siguiente donde el sujeto, a la hora de calcular las probabilidades, comete un error en el cálculo de la probabilidad total, pues no tiene en cuenta la proporción de bolas producidas en cada fábrica.

$$\text{“} P\left(M1/\,defectuosa\right)=\frac{P\left(M1\cap defec\right)}{P(defec)}=\frac{0,5\cdot 100}{0,5\cdot 100+0,1\cdot 100}=\frac{0,5}{0,6}\cong 1\text{”}$$

(Sujeto 63).

C3. *Calcular correctamente la probabilidad total.* Después de identificar el problema como el cálculo de una probabilidad condicional y recordar la fórmula de Bayes, el futuro profesor debe calcular el numerador y denominador. El denominador debe ser calculado con la regla de la probabilidad total. Debe entender que se trata de sucesos dependientes, para aplicar correctamente la regla del producto en este caso. Un ejemplo (sujeto 80) es el siguiente donde calcula correctamente la probabilidad total de ser defectuoso, pero erra en el cálculo de la probabilidad condicionada que calcula como si fuese una probabilidad conjunta en caso de sucesos dependientes.

M1 → 40% → 5% defect.

M2 → 60% → 1% def.

Probabilidad de ser defectuosa es:

$$\frac{5}{100}\cdot\frac{40}{100}+\frac{1}{100}\cdot\frac{60}{100}=\frac{2}{100}+\frac{0'6}{100}=2'6\%$$

$$P(\text{fabricada por } M_1 \mid \text{sea defectuosa})=\frac{40}{100}\cdot\frac{2'6}{100}=\frac{104}{1000}=10'4\%$$

(Sujeto 80).

C4. *Resuelve correctamente el problema utilizando el teorema de Bayes*. Serían los futuros profesores que identifican los datos y la pregunta del problema, aplicando correctamente el teorema de Bayes, calculando la probabilidad conjunta para sucesos dependientes y la probabilidad total. Por ejemplo el sujeto 1 utiliza el teorema de Bayes, calculando anteriormente todas las probabilidades que proporciona el enunciado.

$$\begin{cases} P(M_1)=0{,}4 \\ P(M_2)=0{,}6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} P(\text{Defect.}\mid M_1)=0{,}05 \\ P(\text{Defect.}\mid M_2)=0{,}01 \end{cases}$$

$$P(M_1\mid \text{Defectuosa})=\frac{P(M_1).P(\text{Defect.}\mid M_1)}{P(M_1).P(\text{Defect.}\mid M_1)+P(M_2).P(\text{Defect.}\mid M_2)}$$

$$=\frac{0{,}4\cdot 0{,}05}{0{,}4\cdot 0{,}05+0{,}6\cdot 0{,}01}\simeq 0{,}77$$

(Sujeto 1).

En la Tabla 4 se presentan los resultados del ítem 4. Vemos una alta proporción de alumnos del máster, con resultados muy similares a los de Díaz que resuelve correctamente todos los pasos del problema; algo menor en los licenciados de matemáticas (25,3%). Además 10% y 17% según grupo llega hasta el cálculo de la probabilidad total. No obstante es alto el porcentaje que no llega hasta este paso e incluso falla en los anteriores y no identifica correctamente todos los datos o no identifica correctamente la pregunta del enunciado. En consecuencia, los problemas de probabilidad condicional donde se invierte el eje de tiempo siguen siendo difíciles, incluso cuando se presenten con un formato más conocido para los estudiantes.

TABLA 4 – Resultados en el ítem 4 en dos grupos de futuros profesores

	Matemáticas (n=95)		Máster (n=101)		Psicología (n=414)	
	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%
C0. No identifica datos	15	15,8	16	15,8	57	13,8
C1. No identifica pregunta	18	18,9	18	17,8	50	12,1
C2. No calcula probabilidad total	21	22,1	5	5,0	78	18,8
C3. Calcula probabilidad total	17	17,9	12	11,9	42	10,1
C4. Finaliza el problema	24	25,3	50	49,5	187	45,2
Total	95	100,0	101	100,0	414	100,0

Al comparar los dos grupos en nuestro estudio vemos que el porcentaje de soluciones totalmente correctas (categoría C4), fue mayor en los alumnos del Máster de secundaria. En consecuencia la alta preparación de los estudiantes de la licenciatura de matemáticas no parece influir en la resolución de los problemas de Bayes, en comparación con otros estudiantes.

4.3 Relación entre la Falacia Temporal y la Solución del Problema Bayes

Por último, se decidió estudiar la relación entre las respuestas correctas a los ítems 1 y 3 (en que aparece la falacia temporal) y la solución al problema Bayes (item 4) en la muestra de futuros profesores (n=196), sin diferenciar subgrupos, para tener un mayor tamaño de muestra. Este punto no fue analizado por Díaz (2007), con lo cual constituye una aportación original de nuestro trabajo.

En la Tabla 5 se cruzan las respuestas correctas e incorrectas en los ítems 1 y 4. Observamos que el porcentaje de estudiantes con solución correcta en el problema Bayes crece del 33,3% entre los que responden incorrectamente al ítem 1 al 52,2% entre los que responden correctamente. Es mayor, en consecuencia la probabilidad de resolver correctamente el problema Bayes entre estos sujetos y también mayor que en la muestra global (si no se tiene información sobre el problema 1).

TABLA 5 – Relación entre respuestas a los ítems 1 y 4 en los futuros profesores

	Solución item 4 (Problema)					
Solución item 1	Incorrecta	% fila	Correcta	% fila	Total	% muestra
Incorrecta	100	66,7	50	33,3	150	76,5
Correcta	22	46,8	24	52.2	46	23,5
Total	122	62,3	74	37,7	196	100

Los resultados fueron estadísticamente significativos en un contraste Chi cuadrado de asociación entre filas y columnas en la Tabla 1, donde se cumplen las condiciones de aplicación del método, debido a que todas las frecuencias son mayores que 5. Se obtuvo un valor Chi=5,31, que con 1 grado de libertad corresponde a una significación exacta bilateral de p=0,025.

Igualmente se analizó la relación entre las respuestas a los ítems 3 y 4 (Tabla 6) donde se observa que la proporción de respuestas correctas en el problema Bayes sube desde el 28% en los futuros profesores que responden incorrectamente al problema 3, a un 60,3% en los que responden correctamente; de nuevo mucho mayor proporción que en el global de la muestra. En este caso, el contraste de asociación entre las filas y columnas de la Tabla 10 dio un valor Chi=17,88, que, con 1 grado de libertad corresponde a una significación bilateral p= 0,0001.

En consecuencia, los análisis de los resultados cruzados en los ítems que evalúan la falacia temporal y la resolución del problema Bayes en los futuros profesores apoya fuertemente nuestra conjetura inicial que esta falacia puede influir en la competencia de resolución de estos problemas. Ello es particularmente importante en futuros profesores, quienes podrían no ser conscientes de este sesgo y transmitirlo a sus alumnos en la enseñanza del tema.

TABLA 6 – Relación entre respuestas a los ítems 3 y 4 en los futuros profesores

	Solución ítem 4 (Problema)					
Solución ítem 3	Incorrecta	% fila	Correcta	% fila	Total	% muestra
Incorrecta	99	82,0	39	28,3	138	70,4
Correcta	23	39,7	35	60,3	58	29,6
Total	122	62,3	74	37,8	196	100

5. IMPLICACIONES PARA LA FORMACIÓN DE PROFESORES

Los resultados de nuestro estudio muestran que la falacia del eje temporal afecta a una proporción importante de futuros profesores de secundaria, tanto de aquellos que se preparan en el Máster de secundaria, como los licenciados de matemáticas en su último año de estudio. Los resultados no son mejores que los de los licenciados en Psicología en su primer año de estudio, a pesar de la diferencia de formación matemática de ambos colectivos.

Estos resultados son visibles en las respuestas el ítem 1, pero especialmente al comparar los resultados de los ítems 2 y 3. Los participantes resuelven con facilidad un problema de probabilidad condicional en contexto de muestreo sin reposición si se les da el resultado de la primera extracción (ítem 2), pero no cuando se les da el de la segunda (ítem 3) aunque ambos problemas son formalmente equivalentes desde el punto de vista matemático (Falk, 1986). La explicación es que en el ítem 2 la inferencia causal es natural y compatible con el eje temporal, pero la segunda situación donde se nos pide hacer una inferencia inversa, requiere un razonamiento probabilístico que es indiferente al orden temporal, lo causa dificultades psicológicas a los participantes.

Sin embargo, estas son las situaciones a que tienen que enfrentarse en contenidos como el Teorema de Bayes. Los resultados de nuestro estudio también apoyaron nuestra conjetura del efecto de la falacia respecto a la competencia en la resolución de un problema donde se aplica dicho teorema. Es entonces previsible que influya en la correcta aplicación de otras nociones estadísticas donde se invierte el orden temporal en una probabilidad condicional, por ejemplo el contraste de hipótesis (nivel de significación, tipos de error), o intervalos de confianza.

Más aún estos temas han de ser explicados en el Bachillerato de Ciencias Sociales por los futuros profesores de educación secundaria y Bachillerato. Precisamente el objetivo de nuestro estudio fue evaluar y hacer superar este sesgo a los futuros profesores de modo que lleguen a entender que la probabilidad de un suceso puede ser revisada a la luz de resultados posteriores y la importancia de la actualización de probabilidades en inferencia.

La compleja relación descrita por Borovcnik y Peard (1996) entre los conceptos probabilísticos y la intuición se muestra en nuestro estudio, puesto que la alta preparación matemática no fue suficiente para evitar sesgos de razonamiento. Coincidimos con Aguilar, Navarro, López y Alcalde (2002) en la necesidad de prestar más atención en la enseñanza a las heurísticas y sesgos y la importancia que en la resolución de los problemas matemáticos tienen los procesos psicológicos. Los ítems presentados en este trabajo podrían constituir un apoyo en este sentido en los procesos de formación de profesores de matemáticas.

Agradecimientos: este trabajo forma parte del proyecto: EDU2010-14947, MICINN-FEDER y Grupo FQM-126 (Junta de Andalucía).

REFERENCIAS

AGUILAR, M.; NAVARRO, J.I.; LÓPEZ, J.M.; ALCALDE, C. Pensamiento formal y resolución de problemas matemáticos. *Psicothema,* v. 14, n. 2, 2002, p. 382-386.

AZCÁRATE, P. *Estudio de las concepciones disciplinares de futuros profesores de primaria en torno a las nociones de aleatoriedad y probabilidad*. Granada, España, Editorial Comares, 1996.

AZCÁRATE, P.; CARDEÑOSO, J.M.; PORLAND, R. Concepciones de futuros profesores de primaria sobre la noción de aleatoriedad. *Enseñanza de las Ciencias*, v. 16, n. 1, 2001, p. 85-97.

BATANERO, C.; CAÑIZARES, M.J.; GODINO, J. Simulation as a tool to train preservice school teachers. In: ICMI FIRST AFRICAN REGIONAL CONFERENCE, Johannesburgo, Sudáfrica, 2005. *Proceedings*… International Commission on Mathematical Instruction. CD-ROM.

BOROVCNIK, M.; PEARD, R. Probability. In: BISHOP, A; et al. (Eds). *International handbook of mathematics education.* Dordrecht: Kluwer, p. 239-288, 1996.
CAMPOS, T.; CAZORLA, I.; KATAOKA, V. Statistics school curricula in Brazil. In: BATANERO, C.; BURRILL, G.; READING, C. (Eds). *Teaching statistics in school mathematics-Challenges for teaching and teacher education.* New York: Springer, p. 5-8, 2011.
CARTER, T.A. Preservice teacher knowledge and understanding of probability and statistics. In: KULM, G. (Ed.). *Teacher knowledge and practice in middle grades mathematics,* Rotterdam: Sense Publishers, p. 19-43, 2008.
CONTRERAS, J.M. *Evaluación de conocimientos y recursos didácticos en la formación de profesores sobre probabilidad condicional*. Tesis doctoral. Granada, España, 2011.
CONTRERAS, J.M.; ESTRADA, A.; DÍAZ, C.; BATANERO, C. Dificultades de futuros profesores en la lectura y cálculo de probabilidades en tablas de doble entrada. In: SIMPOSIO DE LA SOCIEDAD DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XIV. Lleida, España, 2010. Actas... Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. p. 271-280.
DÍAZ, C. *Viabilidad de la inferencia bayesiana en el análisis de datos en Psicología*. Tesis doctoral, Granada, España, 2007.
DÍAZ, C.; DE LA FUENTE, I. Assessing students' difficulties with conditional probability and bayesian reasoning. *International Electronic Journal of Mathematics Education,* v. 2, n. 3, 2007, p. 128-148.
FALK, R. Conditional probabilities: insights and difficulties. In: SECOND INTERNATIONAL CONFERENCE ON TEACHING STATISTICS. Victoria, Canada, 1986. *Proceedings…* International Statistical Institute, p. 292-297.
GRAS, R.; TOTOHASINA, A. Chronologie et causalité, conceptions sources d'obstacles épistémologiques à la notion de probabilité conditionnelle. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* v. 15, n. 1, p. 49-95, 1995.
HILL, H.C.; BALL, D.L.; SCHILLING, S.G. Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education,* v. 39, p. 372-400, 2008.
HUERTA, M.P.; CERDÁN, F. El cálculo de probabilidades en la formación del profesorado de matemáticas de secundaria. In: SIMPOSIO DE LA SOCIEDAD DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XIV. Lleida, España, 2010. Actas… Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. p. 353-364.
KELLY, I.W.; ZWIERS, F.W. Mutually exclusive and independence: Unravelling basic misconceptions in probability theory. *Teaching Statistics*, v. 8, p. 96-100, 1986.
LECOUTRE, M.P. Cognitive models and problem spaces in "purely random" situations. *Educational Studies in Mathematics,* v. 23, p. 557-568, 1992.
MA, L.P. *Knowing and teaching elementary mathematics*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum, 1999.
MEC. *Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria,* 2006a.
MEC. *Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria,* 2006b.
MEC. *Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura*

del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas, 2007.
MOHR, M.J. Mathematics knowledge for teaching: The case of preservice teachers. In: KULM, G. (Ed.), *Teacher knowledge and practice in middle grades mathematics* Rotterdam: Sense Publishers, p. 19-43, 2008.
NCTM. *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: Autor, 2000.
OJEDA, A.M. Dificultades del alumnado respecto a la probabilidad condicional. *UNO,* v. 5, p.37-55, 1995.
ORTIZ, J.J.; NORDIN, M.; BATANERO, C.; SERRANO, L.; RODRÍGUEZ, J. Comparación de probabilidades en maestros en formación. In: SIMPOSIO DE LA SOCIEDAD DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA X. Huesca, España, 2006. Actas… Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. p. 268-276.
POLLATSEK, A.; WELL, A.D.; KONOLD, C.; HARDIMAN, P. Understanding conditional probabilities. *Organitation, Behavior and Human Decision Processes,* v. 40, p. 255–269, 1987.
SEDLMEIER, P. *Improving statistical reasoning. Theoretical models and practical implications.* Mahwah, NJ: Erlbaum, 1999.
TARR, J.E.; JONES, G.A. A framework for assessing middle school students' thinking in conditional probability and independence. *Mathematics Education Research Journal*, v. 9, p. 39-59, 1997.
TARR, J.E.; LANNING, J.K. How can teachers build notions of conditional probability and independence? IN JONES, G. A. (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning*. Nueva York: Springer. p. 216-238, 2005.
TVERSKY, A.; KAHNEMAN, D. Causal schemas in judgment under uncertainty. In: KAHNEMAN, D.; SLOVIC, P.; TVERSKY, A. (Eds.), *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases*. Cambridge, MA: Cambridge University Press, p. 117-128, 1982.

Recebido em: set. 2012 **Aceito em**: dez. 2012