Uma articulação entre o quadro dos Paradigmas Geométricos e a Teoria das Situações Didáticas

Cleusiane Vieira Silva
Saddo Ag Almouloud

RESUMO

Este trabalho está fundamentado em uma tese de doutorado defendida em 2015, na qual a primeira autora realizou um estudo acerca da prática docente e sua influência na construção de conceitos geométricos. O artigo apresenta um estudo sobre o quadro dos Paradigmas Geométricos e a Teoria das Situações Didáticas, quando levamos em conta o objeto matemático a simetria ortogonal, o que resultou em uma articulação entre os dois quadros teóricos citados. A proposta de uma articulação entre os quadros teóricos surgiu da necessidade da análise da natureza do trabalho geométrico desenvolvido por professores, nos momentos de resolução e de situações-problema, por alunos nos momentos de interação com tais situações e as interações estabelecidas entre o professor, o aluno e o saber. Como resultado desse estudo, pontuamos que essa articulação pode servir de suporte para análise de dados provenientes de situações de aprendizagem no campo do ensino de geometria, uma vez que propõe a análise dos dados, focando na atividade docente, mas, tendo como referência as fases de aprendizagem.

Palavras-chave: Paradigmas Geométricos. Teoria das Situações Didáticas. Articulação. Simetria Ortogonal.

An articulation between the Frame of the Geometric Paradigms and the Theory of the Situations

ABSTRACT

This work is based on a doctoral thesis defended in 2015, in which the first author carried out a study about the teaching practice and its influence on the construction of geometric concepts. The article presents a study on the framework of Geometrical Paradigms and the Theory of Didactic Situations, when we consider the mathematical object orthogonal symmetry. This resulted in an articulation between the two theoretical frameworks cited. The proposal of an articulation between the theoretical frameworks arose from the need to analyze the nature of the geometric work developed by teachers in the moments of resolution and problem situations, by students in the moments of interaction with these problem situations and, the interactions established between the teacher, the student and the knowledge. As a result of this study, we pointed out that this articulation

---

Cleusiane Vieira Silva – Doutora em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade de São Paulo (PUC/SP); professora adjunta, Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia/UESB, Departamento de Ciências de Tecnologias. Endereço: Av. José Moreira Sobrinho – Jequiezinho, Jequié/BA, 45206-190, Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Campus de Jequié. ORCID ID: 0000-0002-7156-2276. E-mail: cleusianesilva@gmail.com
Saddo Ag Almouloud – Doutor em Didática da Matemática; atualmente, é professor do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUCSP, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia, Endereço: R. Marquês de Paranaguá, 111 – Consolação, São Paulo/SP, 01303-050. E-mail: saddoag@gmail.com
Recebido para publicação em 11 out. 2017. Aceito, após revisão, em 3 nov. 2017.

can serve as support for the analysis of data coming from learning situations in the field of geometry teaching, since it proposes the analysis of the data, focusing on the teaching activity, but, taking as reference the phases of learning.
Keywords: Geometric Paradigms. Theory of Didactic Situations. Articulation. Orthogonal Symmetry.

INTRODUÇÃO

Este artigo é resultado da busca por um quadro teórico que fosse capaz de trazer os elementos essenciais na análise de dados fornecidos em uma pesquisa de doutorado. Tal pesquisa buscava estudar a relação entre a prática docente e sua influência na construção de conceitos geométricos, quando levamos em consideração o objeto matemático simetria ortogonal.

A escolha da Teoria das Situações Didáticas, neste estudo, foi justificada pela problemática envolvida na pesquisa que estava associada, principalmente, às interações estabelecidas entre o professor, o aluno e o saber. O quadro dos Paradigmas Geométricos permitia analisar a natureza do trabalho geométrico desenvolvido tanto por professores quanto por alunos: os docentes, nos momentos de resolução e análise de situações-problema a eles propostos e os discentes nos momentos de interação com essas situações-problema.

A necessidade de estudar a relação entre a atividade do professor e o desenvolvimento dos alunos, no momento em que esses agiam sobre as situações---problema, em fases distintas da investigação, impulsionou a busca pela articulação entre os quadros teóricos acima citados. Tais fases incluíam resolução e análise de situações-problema propostas a professores, aplicação por parte dos professores aos alunos das referidas situações-problema, momento de interação dos alunos com tais situações, análise e reflexão dos professores sobre os registros fornecidos pelos discentes.

O QUADRO TEÓRICO DOS PARADIGMAS GEOMÉTRICOS APRESENTADO POR PARZYSZ

Apoiado em estudos anteriores e em resultados das pesquisas de sua equipe, Parzysy (2006) propõe um quadro teórico que comporta quatro Paradigmas Geométricos, divididos em dois grupos: geometrias não axiomáticas e geometrias axiomáticas. O primeiro grupo compreende os paradigmas G0 (geometria concreta), o qual não é uma geometria propriamente dita e cujos objetos são realizações materiais e, G1 (geometria espaço-gráfica) que se apoia em situações concretas. O segundo engloba os paradigmas G2 (geometrias protoaxiomáticas) em que os objetos em jogo são teóricos (suas existências decorrem de axiomas e definições) e as provas são teóricas (movendo-se do perceptivo para o hipotético-dedutivo) e, por fim, G3 (geometria axiomática) onde a axiomatização é completamente explicitada. Sintetizando sua proposta, o autor apresenta o seguinte esquema (Figura 1):

	Geometrias não axiomáticas		Geometrias axiomáticas	
Tipo de geometria	Geometria concreta (G0)	Geometria espaço-gráfica (G1)	Geometria protoaxiomática (G2)	Geometria axiomática (G3)
Objetos	Físicos		Teóricos	
Validações	Perceptivas		Dedutivas	

Figura 1. Síntese da classificação dos paradigmas apresentados por Parzysz, (Parzysz, 2001, p.101)

Segundo Parzysz (2006, p.102), "no nível do ensino obrigatório, G1 e G2 têm um papel crucial na construção pelo aluno de sua relação com os saberes da geometria" (tradução nossa). Em consonância com esse autor, os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática – PCN (1998) no 3º ciclo do Ensino Fundamental sugerem que "as atividades geométricas centrem-se em procedimentos de observação, representações e construções de figuras, bem como no manuseio de instrumentos de medidas que permitam aos alunos fazer conjecturas sobre algumas propriedades dessas figuras" (BRASIL, 1998, p.68). Por outro lado, ainda de acordo com os PCN (1998), no 4º ciclo, "os problemas de geometria vão fazer com que o aluno tenha seus primeiros contatos com as necessidades e as exigências estabelecidas por um raciocínio dedutivo. Isso não significa fazer um estudo absolutamente formal e axiomático da Geometria." (BRASIL, 1998, p.86).

Em termos de recomendações curriculares, observamos que no 3º ciclo é requerida do estudante a compreensão dos objetos geométricos de forma perceptiva, isto é, uma geometria que se apoia em situações "concretas", numa transição de G0 para G1. No 4º ciclo, a sugestão dos PCN (1998) expõe uma fase de transição de G1 para G2, esperando-se que, no final desse último, o aluno já tenha condições de reconhecer a validação de forma dedutiva.

Como a proposta do estudo se restringia aos 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental, o foco se manteve sobre as geometrias G0, G1 e G2 seguindo a proposta de geometria paradigmática, de acordo com Parzysz (2001; 2006). Outro motivo para nos atermos a essas geometrias está relacionado com o objeto matemático escolhido – a simetria ortogonal – que evoca naturalmente a referência ao real de uma forma perceptiva (G0) e, mesmo quando esse conteúdo é referenciado em um sistema lógico--dedutivo (geometria euclidiana), a "figura" toma o papel de alavanca para um raciocínio geométrico heurístico (num movimento duplo $G1 \Leftrightarrow G2$), isto é, ela assume a função de auxiliar na construção de conhecimentos lógico-dedutivos.

Utilizando esse quadro teórico, vejamos como podemos observar as características da proposta de Parzysz (2001), aplicadas ao exemplo proposto a seguir, isto é, o que podemos esperar de um indivíduo que esteja transitando nas geometrias G0, G1 e G2.

Exemplo 1: Construa a figura simétrica ao segmento $\overline{AB}$ com relação à reta *r*. Em seguida descreva a construção.

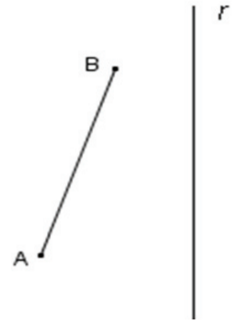
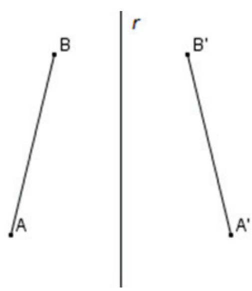
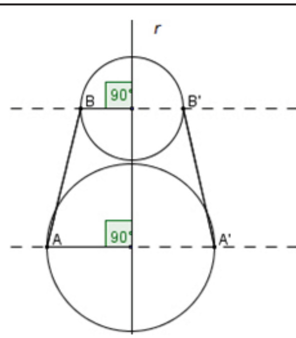


Figura 2. Exemplo ilustrativo da estruturação do *milieu* (Silva, 2015, p.124)

O objetivo da situação-problema é propor ao aluno a construção do segmento simétrico, observando propriedades como ortogonalidade e equidistância com relação ao eixo de simetria *r*. Na Figura 3, apresentamos a caracterização e o tipo de validação dessa situação no quadro dos Paradigmas Geométricos.

Tipo de geometria	Validação	Caracterização da geometria
G0		A ligação com a realidade faz com que o estudante imagine uma folha de papel dobrada ao meio; o uso da régua graduada seria para comparar as medidas da figura objeto $\overline{AB}$ ao eixo e do eixo à figura imagem $\overline{A'B'}$ construída por sobreposição. A posição do eixo de simetria contribui de forma perceptiva para o êxito na execução da tarefa. Aqui fica evidente a percepção global da figura. A validação é feita visualmente.
G1		O estudante poderá utilizar como instrumentos de desenho a régua graduada, o esquadro e compasso para construir a figura imagem, levando em consideração seus conhecimentos de propriedades como equidistância e ortogonalidade com relação ao eixo. A percepção pontual poderá ser notada no ato da construção. A validação tem como base as técnicas de construção apoiadas no uso de instrumentos.

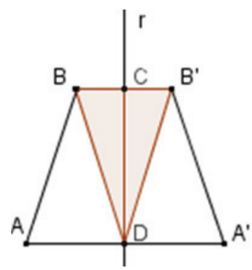
Tipo de geometria	Validação	Caracterização da geometria
G2	Demonstração: Pela definição de simetria ortogonal, temos que a imagem do ponto B com relação à reta *r* é o ponto não pertencente a *r*, tal que *r* é a mediatriz do segmento $\overline{BB'}$, logo $r \perp \overline{BB'}$ e $d(r,B) = d(r,B')$. Da mesma forma, a imagem do ponto A com relação à reta r é ponto A' não pertencente a *r*, tal que, *r* é a mediatriz do segmento $\overline{AA'}$, logo $r \perp \overline{AA'}$ e $d(r,A) = d(r,A')$, portanto $d(\overline{AB},r) = d(\overline{A'B'},r)$. Provemos, agora, que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ são congruentes. Sejam *C* e *D* pontos sobre a reta *r* , tal que *C* está entre B e B' e $\overline{BC} = \overline{CB'}$, *D* está entre A e A' tal que $\overline{AD} = \overline{DA'}$.  Observamos que os triângulos BCD e $B'CD$ são congruentes pelo critério LAL, pois o lado *CD* é comum aos dois e os ângulos $B\hat{C}D$ e $B'\hat{C}D$ são retos. Por outro lado, notemos que os triângulos ABD e $A'B'D$ também são congruentes pelo critério LAL, uma vez que, $\overline{BD} = \overline{B'D'}$ e os ângulos $A\hat{D}B'$ e $A'\hat{D}B$ também são congruentes, pois são opostos pelo vértice. Portanto, os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ são congruentes.	A construção da figura é apenas uma forma de auxiliar na justificativa que vem da utilização, na geometria euclidiana plana, de definições, axiomas, teoremas e propriedades para demonstrar que a figura construída é simétrica à figura-objeto. Nesse caso, a invariância dessas propriedades é observada e a percepção da figura se dá pontualmente.

Figura 3. Aplicação do quadro dos Paradigmas Geométricos ao exemplo 1 (Silva, 2015, p.133-134)

Segundo Parzysz (2006), essas geometrias, do ponto de vista didático, diferenciam-se uma da outra na ruptura do contrato didático[1]. Assim, a passagem de G0 para G1 coloca em evidência a materialidade dos objetos em jogo (no exemplo acima, o objeto traçado na folha de papel), a passagem de G1 para G2 deixa evidente a justificativa pela percepção (o uso de compasso e régua graduada para aferir as distâncias), a passagem de G2 para G3 expõe a necessidade dedutiva das propriedades julgadas “evidentes”. O

[1] O contrato didático aqui é entendido no sentido de Brousseau, isto é, “como conjunto de comportamentos específicos do professor esperado pelos alunos, e o conjunto de comportamentos dos alunos esperado pelo professor” (Almouloud, 2007, p.89).

autor ainda pontua que G1 e G2 são susceptíveis de ações de controle uma sobre a outra, e exemplifica:

> G2 controla G1: se uma contradição perceptiva é identificada na “figura” (G1), pode-se investigar em G2 o erro de demonstração que a produziu.
>
> G1 controla G2: se a conclusão de um raciocínio geométrico surpreende, o retorno à figura e às técnicas de G1 pode permitir confirmar ou enfraquecer esse resultado. (Parzysz, 2006, p.133, tradução nossa)

Portanto, para esse autor, a resolução de um problema geométrico pode consistir em uma sucessão de idas e voltas entre as geometrias G1 e G2, nas quais a “figura” é um elemento central. Nesse processo, as figuras têm um papel importante e antagônico, pois elas podem tanto constituir uma ajuda no sentido de propiciar a construção de conjecturas, quanto um obstáculo à demonstração no sentido perceptivo (visual). Observemos um exemplo fornecido pelo autor sobre a alternância entre G1 e G2 na resolução de um problema:

G1 → G2: modelagem de um problema “concreto”

G2 → G1: construção de um desenho com objetivo heurístico

G1 → G2: demonstração de uma conjetura resultante da observação

G2 → G1: “verificação”, sobre um desenho de uma conclusão teórica. (PARZYSZ, 2006, p.137)

Segundo esse autor, coloca-se em funcionamento, nesse caso, o que ele chamou de “dialética sabido/percebido”, a qual foi introduzida com o propósito de representação do espaço em geometria. A dialética sabido/percebido proposta por Parzysz pode ser sintetizada da seguinte forma: “o sabido refere-se a uma leitura da representação gráfica do objeto geométrico tendo em vista suas propriedades. [...] [e o percebido] a percepção apenas dos elementos e de suas relações visíveis na representação gráfica se relaciona com o visto” (Dias, 2009, p.27).

Ainda sobre a dialética sabido/percebido, de acordo com Parzysz (2001), podemos imaginar que não existe dificuldade no caso de figuras planas, pois podemos, em princípio, construí-las tais como elas são, isto é, o sabido coincide com o visto. Levando em consideração a simetria ortogonal, concordamos com Dias (2009), ao afirmar que essa dialética aparece associada “às questões de representação de objetos segundo enunciados, dados de problemas geométricos ou à leitura particular de desenhos que acompanhem tais enunciados” (p.27).

A TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

A Teoria das Situações Didáticas foi desenvolvida por Guy Brousseau, com a finalidade de estudar as situações que são propícias à aquisição de conhecimento e às relações estabelecidas entre aluno, professor e o saber mobilizado em um ambiente de ensino. Segundo Brousseau (1997), situações didáticas são situações usadas para ensinar; implicam, portanto, todo o ambiente que cerca o aluno, incluindo o professor e o sistema educacional em si.

Destaque na Teoria das Situações Didáticas, o conceito de *milieu*[2] foi concebido por Brousseau como um sistema que interage com o aluno de forma antagônica desafiando-o, por intermédio da reflexão sobre suas ações, a encontrar respostas para as situações-problema a ela propostas.

Segundo Almouloud (2007), a Teoria das Situações Didáticas se apoia em três hipóteses: (1) o aluno aprende adaptando-se a um *milieu* que gera dificuldades, contradições e desequilíbrio. O conhecimento, resultado da adaptação do aluno manifesta-se por novas respostas que fornecem evidências de aprendizagem; (2) um *milieu* sem intenção didática não é suficiente para promover a aprendizagem matemática do aluno, isto é, o professor deve criar, organizar um meio no qual serão desenvolvidas as situações (problemas) suscetíveis de provocar essa aprendizagem; (3) o *milieu* e essas situações devem engajar fortemente os saberes matemáticos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem.

Ainda de acordo com esse autor, "uma situação didática é caracterizada pelo *milieu* e este é organizado a partir da escolha das variáveis didáticas, que são aquelas para as quais a mudança de valores provoca modificações nas estratégias ótimas" (Almouloud, 2007, p.37). Por esse motivo, a determinação de variáveis didáticas e seus valores é muito importante na construção, escolha e análise de situações de ensino.

Nos estudos de Grenier (1988) e Lima (2006), são identificadas algumas variáveis didáticas e valores relacionados à simetria ortogonal. Apoiados nesses estudos, distinguimos aqui algumas variáveis e valores (Figura 4) que levaremos em consideração neste trabalho a respeito desse objeto matemático.

Variáveis didáticas	Valores
A interseção da figura-objeto com o eixo de simetria	- toca o eixo - corta o eixo em um ponto - corta o eixo em mais de um ponto
As direções dos elementos que compõem a figura objeto	- horizontais - verticais - oblíquas

[2] Em português, *milieu* pode ser traduzido como "meio", mas concordando com Almouloud (2007), entendemos que esse termo não alcança toda a amplitude da ideia proposta por Brousseau (1997), por isso, mantemos o termo *milieu*.

Variáveis didáticas	Valores
A direção do eixo de simetria sobre a folha	- horizontais - verticais - oblíquos
O tipo de papel	- branco - quadriculado
O tipo de tarefa	- reconhecimento de figura simétrica - reconhecimento de eixo de simetria - construção de figura simétrica - construção de eixo de simetria - identificação de propriedades
A configuração da figura-objeto	- pontos - segmentos - polígonos - outros tipos de figuras
Distância da figura objeto ao eixo de simetria	- conservada - não conservada

Figura 4. Variáveis didáticas e valores levados em conta na elaboração e escolha das tarefas (Adaptado de Grenier (1988) e Lima (2006))

Segundo Brousseau (1997), as variações de uma situação para o mesmo saber matemático podem apresentar grandes diferenças em termos de complexidade e, portanto, levar a diferentes estratégias ótimas, além de proporcionar formas diferentes de conhecer o mesmo saber. Os termos conhecimento e saber são utilizados por Brousseau de forma diferenciada como podemos conferir a seguir

> Os conhecimentos são meios transmissíveis (por imitação, iniciação, comunicação, etc.) ainda que necessariamente demonstráveis, de controlar uma situação e obter dela um resultado determinado, de acordo com uma expectativa e exigência social. O saber é o produto cultural de uma instituição que tem como objetivo identificar, analisar e organizar os conhecimentos a fim de facilitar sua comunicação. (Brousseau, 2008, p.31-32)

O desafio do professor é, justamente, construir situações cujas intenções de ensinar não são inicialmente reveladas aos alunos – mas que esses aceitam – e conseguir que eles sejam capazes de refletir, agir e evoluir em seus conhecimentos matemáticos por conta própria. De acordo com Brousseau (1997, p.30, tradução nossa), “cada item do conhecimento pode ser caracterizado por uma (ou mais) situação(ões) adidática(s), as quais preservam significados”, situações que ele chamou de *situações fundamentais*.

Uma intervenção didática apoiada na Teoria das Situações Didáticas deve permitir, no momento da aplicação das situações ou problemas em classe, que os professores vivenciem as quatro fases (fases de ação, formulação, validação e institucionalização) no processo de aprendizagem, apresentadas por Brousseau (1997).

De acordo com esse autor, a fase de ação consiste em colocar o aprendiz numa situação de ação, na qual se coloca um problema para o aluno, cuja melhor solução, nas condições propostas, é o conhecimento a ensinar. Na fase de formulação, o aluno troca informações com uma ou várias pessoas, que serão os emissores e receptores trocando mensagens escritas e orais. Esse é um momento em que os estudantes ou grupo de estudantes explicitam, por escrito ou oralmente, as ferramentas que utilizaram e a solução encontrada por eles.

Na fase de validação, o estudante deve mostrar a validade de seus argumentos, submetendo a mensagem matemática ao julgamento de um interlocutor. Segundo Almouloud (2007), o emissor deve justificar a exatidão e a pertinência de seu modelo e fornecer, se possível, uma validação semântica e sintática. Finalmente, na fase de institucionalização, o professor fixa, convencional e explicitamente, o estatuto cognitivo do saber. Uma vez construído e validado, o novo conhecimento vai fazer parte do patrimônio da classe. Depois da institucionalização feita pelo professor, o saber torna-se disponível para sua utilização na resolução de problemas matemáticos.

Nos momentos destinados a uma reflexão sobre a prática, as discussões no grupo pesquisado voltaram-se a um aspecto essencial do contrato didático, isto é, à devolução que, segundo Brousseau (1997, p.41, tradução nossa), "é o ato pelo qual o professor faz o aluno aceitar a responsabilidade por uma situação de aprendizagem ou de um problema e aceita, ele próprio, as consequências dessa transferência".

A pesquisa desenvolvida tinha por objetivo, principalmente, o estudo do processo de ensino focado nas atividades do professor, por meio da criação de condições que provoquem a aquisição de conhecimentos matemáticos pelos alunos. Para alcançar esse propósito, apoiamo-nos em Margolinas (2002) que propôs um modelo de níveis de atividade do professor, os quais apresentamos a seguir.

- O nível (+3) mais geral do modelo, chamado de nível noosferiano ou nível ideológico, caracteriza a atividade do professor que reflete de forma muito ampla sobre o ensino de Matemática. Nesse nível, ocorrem discussões sobre os documentos curriculares e o papel dos conteúdos matemáticos no contexto do ensino em geral.

- O nível (+2) é o da construção, em que a atividade do professor é concebida em grandes linhas de ensino sobre um tema. O professor constrói ou escolhe uma série de situações fundamentais, com o objetivo de analisar as variáveis didáticas envolvidas e os valores dessas variáveis e, também, o repertório de conhecimentos a serem mobilizados pelos alunos durante a experimentação.

- O nível (+1) é o do planejamento, caracterizado pela atividade do professor, que é determinada pelo cenário de uma lição. Nível em que é construída ou escolhida uma sequência de situações nas quais se levam em conta as informações colhidas no nível anterior.

- O nível (0), também chamado de nível didático, caracterizado pela ação do professor na classe. Esse é o nível em que professores e alunos interagem, de fato.

- O nível (-1) de observação é caracterizado pela devolução ou pela observação das atividades dos alunos.

Segundo Margolinas (2002), o professor toma decisões em todos os níveis de sua atividade, mas também pode transformar seus pontos de vista em uma atividade reflexiva, isto é, o professor aprende durante sua atividade profissional. Um dos objetivos de nossa investigação foi estudar como essa transformação afeta os processos de ensino e de aprendizagem.

Baseada nas pesquisas de Brousseau, Margolinas propôs a estruturação do *milieu* que possibilita duas análises: a descendente, caracterizada pela atividade do professor (descrita anteriormente) e a ascendente, caracterizada pela atividade do aluno. Nessa estruturação do *milieu,* apresentada na Figura 5*,* observamos as posições relativas do *milieu* (M), do aluno (E) e do professor (P). Observamos, ainda, que a situação didática S0 é composta pela interação entre M0, E0 e P0.

M+3: *milieu* construção		P+3: professor noosferiano	S+3: Situação noosferiana	Níveis sobredidáticos
M+2: *milieu* de planejamento		P+2: professor construtor	S+2: Situação de construção	
M+1: *milieu* didático	E+1: Aluno reflexivo	P+1: professor planejando	S+1: situação de planejamento	
M0; *milieu* de aprendizagem	E0: Aluno	P0: Professor	S0: Situação Didática	
M-1: *milieu* de referência	E-1: Aluno aprendendo	P-1: professor observador	S-1: Situação adidática de aprendizagem	Situação sub didática
M-2: *milieu* objetivo	E-2: Aluno em ação		S-2: Situação de referência	
M-3: *milieu* material	E-3: Aluno objetivo		S-3: Situação objetiva	

Figura 5. Estruturação do *milieu* (Margolinas, 2004, p.52)

Com o objetivo de observar o papel do professor e as posições do aluno numa situação de ensino e de aprendizagem, analisaremos, a seguir, a situação-problema exposta no Exemplo 1, segundo a estruturação do *milieu,* de acordo com Margolinas (2004).

A SITUAÇÃO OBJETIVA OU MATERIAL S-3

É uma situação que, segundo Margolinas (2002), não está finalizada, na qual o *milieu* material (M-3) é formado pelos seguintes objetos: simetria ortogonal (reflexão), construções geométricas, mediatriz de um segmento, distância entre ponto e reta que são os objetos mínimos disponíveis para que E-3 possa iniciar a construção da figura simétrica com relação à reta *r*. Por outro lado, os conhecimentos que permitirão a E-3 interagir com o *milieu* M-3 são: a definição de transformação geométrica, a noção de simetria ortogonal (reflexão), o domínio de instrumentos de desenho na construção de retas perpendiculares dados um ponto e uma reta, construção de pontos simétricos e as propriedades relativas à simetria ortogonal.

Na situação S-3, a figura simétrica ao segmento $\overline{AB}$ com relação à reta *r* é construída de forma intuitiva pelo aluno E-3.

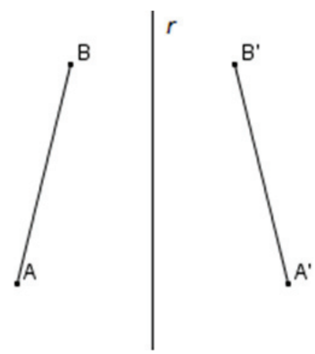


Figura 6. Construção intuitiva do segmento simétrico (Silva, 2015, p.123)

A experiência de vida do sujeito leva-o a visualizar a figura simétrica de forma global, fazendo uma relação direta com o espelhamento.

A SITUAÇÃO DE REFERÊNCIA S-2

Na situação S-2, uma finalidade do problema é introduzida; assim S-2 é uma situação de referência em que o aluno E-2 está agindo. O *milieu* M-2 compreende a situação S-3 que, às vezes, de acordo com Margolinas (2004), é o objeto da ação de E-2 e fonte da retroação. Sendo assim, o aluno E-2 utiliza-se das propriedades de simetria ortogonal (ortogonalidade e equidistância entre pontos da figura e o eixo de simetria, etc.) como estratégia na construção por meio de instrumentos de desenho dos pontos simétricos a A e B com relação à reta *r*.

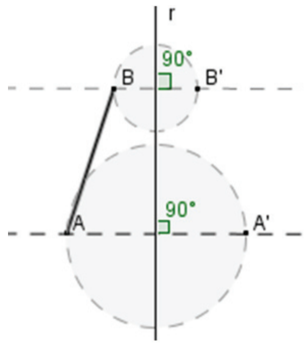


Figura 7. Desenho de pontos simétricos a A e B (Silva, 2015, p.125)

O *milieu* M-1 é formado a partir da afirmação "a figura simétrica do segmento $\overline{AB}$ é a figura formada pelos simétricos de seus pontos".

A SITUAÇÃO ADIDÁTICA DE APRENDIZAGEM S-1

A situação S-1 é uma situação de aprendizagem que compreende os componentes de antecipação, de formulação e validação. O *milieu* M-1 é formado pelos pontos simétricos dos pontos A e B da figura objeto. O aluno, por meio da construção de pontos, deve buscar justificar matematicamente a construção do segmento $\overline{A'B'}$, por meio da definição de simetria ortogonal e de suas propriedades.

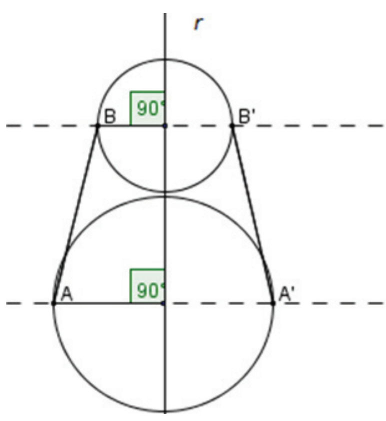


Figura 8. Construção do segmento $\overline{A'B'}$ (Silva, 2015, p.126)

A simetria ortogonal transforma o segmento $\overline{AB}$ em um segmento $\overline{A'B'}$ de mesmo comprimento.

A SITUAÇÃO DIDÁTICA S0

Na situação S0, encontram-se as intenções de ensinar do professor P0 e a de aprender do aluno E0; num contrato didático, nas fases de institucionalização e conclusão, são reunidos e atualizados os pontos de vista de alunos e professor. Nesse nível, o aluno busca justificativas matemáticas para a construção da figura simétrica, e o professor P0 intervém com o objetivo de institucionalizar. A institucionalização poderá ser feita, dependendo do ano escolar, por meio de uma demonstração (como a proposta na seção 4.2) ou da verificação de propriedades por intermédio de instrumentos de medida. O aluno E0 elabora numa conjectura o que aprendeu na situação S-1 e o professor P0 intervém para fazer a seguinte institucionalização: "A simetria ortogonal transforma o segmento $\overline{A'B'}$ em um segmento $\overline{AB}$ de mesmo comprimento, porém com a orientação invertida". Em resumo, apresentamos a Figura 9.

Milieu	Aluno	Professor	Situação	Fases de aprendizagem
M0; M-aprendizagem	E0: Aluno	P0: Professor agindo.	S0: Situação didática. A visão de alunos e professores produzindo um saber sobre o conceito de simetria ortogonal.	Institucionalização
M-1: M-referência Busca nas propriedades da simetria ortogonal de argumentos justificativos	E-1: Aluno justificando e validando conjecturas a respeito da figura simétrica.	P-1: Professor observando as estratégias dos alunos ou fazendo a devolução do problema.	S-1: Situação adidática de aprendizagem. Construção da figura simétrica.	Validação
M-2: M-Objetivo. Formado pelo *milieu* M-3 e a situação S-3	E-2: Aluno em ação – propostas de conjecturas.		S-2: Situação de referência. Construção de pontos simétricos da figura.	Formulação
M-3: M-material Formado pelos conhecimentos geométricos e a experiência de vida dos sujeitos.	E-3: Aluno objetivo		S-3: Situação objetiva. Construção da figura simétrica de forma global.	Antecipação/ação

Figura 9. Estruturação do *milieu* ascendente para o exemplo ilustrativo (Elaborado pela autora, fundamentada em Margolinas (2004))

Apresentaremos, a seguir, nossa articulação entre o quadro teórico dos Paradigmas geométricos, segundo Parzysz (2001, 2006) e a Teoria das Situações Didáticas proposta por Margolinas (2004) apoiada nos estudos de Brousseau (1997).

A ARTICULAÇÃO ENTRE O QUADRO DOS PARADIGMAS GEOMÉTRICOS E A TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

Nas seções anteriores, apresentamos, de forma independente, o quadro dos Paradigmas Geométricos e parte da Teoria das Situações Didáticas, evidenciando como ambos os modelos teóricos podem ser relevantes para investigações, tanto no âmbito de ensino quanto no de aprendizagem. O objetivo dessa seção é apresentar um ensaio de uma possível articulação entre esses modelos teóricos, cuja finalidade é servir de suporte para análise de dados.

Um aspecto em que os dois quadros se encontram é a noção de contrato didático estabelecido entre professores e alunos, já que a diferenciação entre os tipos de geometrias é caracterizada por rupturas de contrato, que são produzidas entre uma e outra geometria. Então, podemos afirmar que o tipo de situações-problema e os procedimentos de sua resolução vão depender do contrato didático estabelecido, que dita regras ou estratégias de resolução requeridas do aluno e aceitas pelo professor como meio de validação.

Essa afirmação pode ser observada no exemplo 1, que propõe a construção de figura simétrica apresentado nas seções anteriores, em que a diferenciação dos tipos de geometria (G0, G1 e G2) está relacionada aos objetos e ao tipo validação. Por outro lado, como as geometrias são suscetíveis de controle uma sobre a outra, observamos que, durante uma mesma atividade (ou uma sequência de atividades), a interação entre sujeitos e *milieu* pode ocorrer na passagem de uma geometria para outra.

No caso de situações-problema envolvendo a simetria ortogonal, podemos comparar a situação S-3 à geometria G0. Nessa situação, o *milieu* M-3 é formado por objetos "concretos": físicos (papel quadriculado, papel decalque, espelho, uma figura desenhada no papel) ou não (transformação geométrica, simetria ortogonal, construção geométrica, mediatriz, distância entre ponto e reta, etc.), objetos mínimos disponíveis para que o aluno E-3 possa começar a agir numa situação adidática. A validação local é feita de forma perceptiva, por meio de medições, comparações e sobreposições.

Na situação S-2, o *milieu* M-3 e a situação S-3 constituem o *milieu* M-2, sobre o qual o aluno E-2 age, comparando com G1, os objetos ainda são concretos (forte ligação com o real) e a validação local perceptiva. As conjecturas formuladas são baseadas nas figuras construídas e sua validação local se dá por meio da verificação de propriedades, utilizando instrumentos de medida.

Tecendo um paralelo entre S-1 e G2 identificamos os objetos como teóricos, mas com referência ao real, e à validação do tipo perceptivo-dedutiva. Nesse caso, o aluno E-1 age sobre o *milieu* M-1, formado pelo *milieu* M-2 e a situação S-2, buscando justificativas matemáticas por meio de definições, teoremas e propriedades. Ainda em G2, temos a institucionalização, momento em que o professor P0 em interação com os alunos E0 age sobre o *milieu* M0, no qual estão validadas localmente as conjecturas elaboradas pelos alunos. Nessa institucionalização é feita uma validação global, o saber construído fica disponível para a turma. O Esquema (Figura 10) a seguir ilustra esta articulação entre os quadros teóricos.

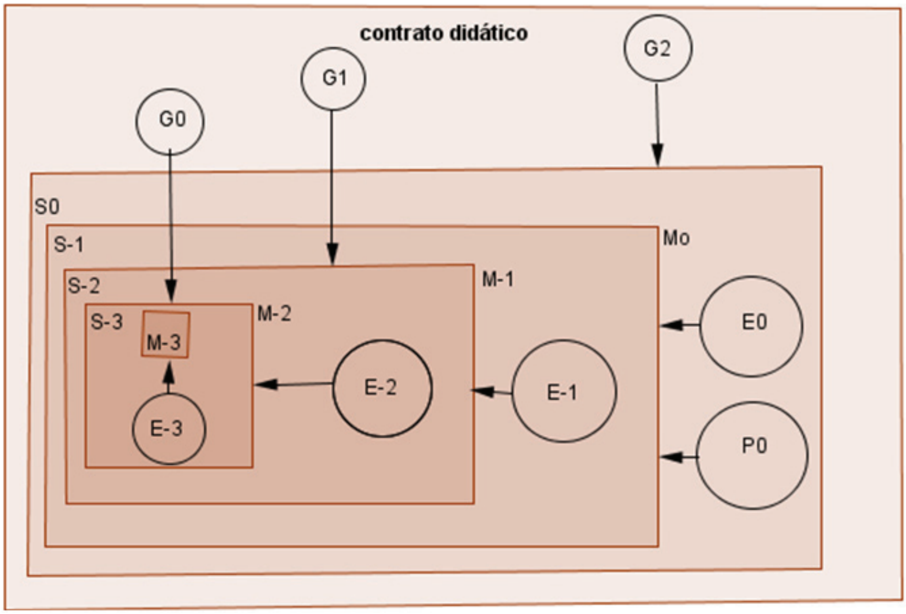


Figura 10. Articulação entre os quadros teóricos (Silva, 2015, p.138)

O conflito sabido/percebido tende a aparecer entre as fases de formulação e validação (no sentido de Brousseau), isto é, entre as situações S-2 e S-1, quando os sujeitos colocam em julgamento seus argumentos, isto é, as conjecturas formuladas, momento em que as dificuldades podem tornar-se aparentes e resolvidas na interação do grupo. A seção a seguir tem por objetivo esclarecer como a articulação entre os quadros teóricos nos auxiliou durante a pesquisa.

UM EXEMPLO DA ARTICULAÇÃO ENTRE OS QUADROS TEÓRICOS APLICADA À ANÁLISE DE DADOS OBTIDOS NA PESQUISA

Durante a realização da pesquisa, foi aplicada uma sequência didática sobre a simetria ortogonal a quatro professores de Matemática e alguns de seus alunos que cursavam o 8º ano do Ensino Fundamental em uma escola pública no interior da Bahia. A sequência constava de 3 situações-problema subdivididas em itens. Para a confecção das situações-problema foram levadas em consideração as variáveis didáticas e os valores relacionados na Figura 4. A situação-problema apresentada neste artigo refere--se ao item *l* da situação-problema 3, da referida sequência didática.

A experimentação no ambiente escolar teve duração de três anos e seguiu alguns dos princípios de uma Engenharia Didática. Inicialmente, os professores construíram um mapa conceitual em que relacionavam a simetria ortogonal com outros objetos matemáticos; em seguida, eles solucionaram e analisaram do ponto de vista matemático e didático três situações-problema que compunham a sequência didática. Os docentes ainda participaram da aplicação da sequência didática a alguns de seus alunos; analisaram, com base nas fases anteriores, os registros desses mesmos alunos e, por fim, compartilharam reflexões sobre todas as fases da experimentação. Cada uma dessas fases era seguida de encontros presenciais, na forma de debates coletivos, cuja finalidade era a de que as reflexões afloradas fornecessem subsídios para a fase seguinte.

A classificação de Parzysz (2001, 2006) em quatro paradigmas geométricos (G0, G1, G2, G3), subdivididos em dois grupos (geometria axiomática e geometria não axiomática), possibilitou-nos a análise dos procedimentos e respostas de professores e alunos do ponto de vista geométrico, em que levamos em consideração os tipos de objetos (físicos ou teóricos) e os tipos de validações (perceptivas ou dedutivas).

Analisando os dados obtidos por meio dos registros de parte dos professores (nem todos participaram dessa fase da experimentação), com relação à situação--problema aqui analisada, ressaltaremos como a articulação dos quadros teóricos proposta auxiliou na análise dos dados obtidos durante a experimentação 1 da pesquisa. A Figura 11, a seguir, apresenta os registros desses professores, para garantir o anonimato dos participantes utilizamos nomes fictícios.

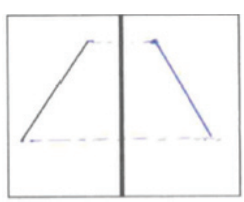
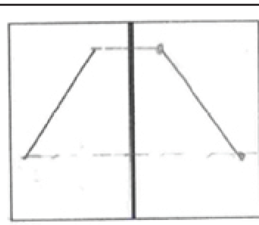
<table>
<tr><th>Sujeito</th><th>Construção</th><th>Estratégia de construção</th></tr>
<tr><td>Profª. Margarida</td><td></td><td rowspan="2">-Escolha de direções perceptivamente ortogonais ao eixo de simetria.
-Utilização da régua e esquadro como instrumento de medição e construção.
-Preocupação com a conservação da distância.</td></tr>
<tr><td>Prof Narciso</td><td></td></tr>
</table>

Figura 11. Respostas dos professores ao item *I* da situação-problema 3 e estratégia de construção de figura simétrica identificadas

O esquema apresentado na Figura 10 propõe que as situações S-3, S-2, S-1 e S0 apresentadas na Figura 9 estão associadas aos tipos de geometria G0, G1 e G2 apresentados na Figura 3.

Pela Figura 11, percebemos que os procedimentos de construção de figura simétrica são marcados pelo uso da percepção e dos conhecimentos prévios dos docentes, no que diz respeito à referência, à dobradura e ao espelhamento. Esses procedimentos foram usados em detrimento da utilização de instrumentos de desenho geométricos (régua, compasso e esquadro) na construção das figuras simétricas. Como consequência dessas escolhas, observamos que a validação dos procedimentos fica restrita à percepção visual, com a ausência de justificativas matemáticas. Observamos ainda, que as respostas dos professores ficam restritas à geometria G0 ou situação S-3.

Após identificar, para cada uma das situações-problema propostas na sequência didática, em quais tipos de geometria os procedimentos e respostas de parte dos docentes se classificavam, a etapa seguinte da experimentação teve por objetivo discutir, do ponto de vista geométrico e didático, as situações-problema a eles aplicadas.

A partir desse momento, os professores passaram a vivenciar as outras fases no processo de aprendizagem, segundo Brousseau (1997), inicialmente tendo como referência as próprias dificuldades e as dificuldades que acreditavam que seus alunos poderiam apresentar e, posteriormente, as dificuldades apresentadas por parte de seus alunos no momento da aplicação da mesma sequência didática, e na analise dos registros desses discentes. Essa investigação trouxe à tona a importância da avaliação das varáveis didáticas por parte dos professores, uma vez que as respostas deles às situações-problema estavam relacionadas às respostas de alguns dos seus alunos, além de proporcionar a reflexão desses mesmos professores sobre os valores dessas variáveis didáticas.

Voltando ao exemplo tratado neste artigo, pontuamos que os professores, do ponto de vista geométrico, avançaram a G1 ou S-2 ao perceberem que haviam ignorado a propriedade de ortogonalidade na construção de suas figuras simétricas (Figura 11) e pontuaram a necessidade da utilização de instrumentos geométricos.

Nesse sentido, podemos notar que a articulação entre quadros teóricos foi necessária para dar continuidade ao estudo. Essa investigação foi focada na atividade do professor (Margolinas, 2004), mas teve como referência o objeto simetria ortogonal do ponto de vista geométrico, isto é, levando em consideração a forma como seus objetos podem ser tratados (físicos ou teóricos) e dos tipos de validações apresentadas.

Sendo assim, um resultado dessa articulação faz referência à situação S+3 (noosferiana) na estruturação descendente do *milieu* em que as discussões com os professores os levaram a concluir que, no Ensino Fundamental, é trabalhada a simetria no objeto, em que a percepção por meio da visualização e manipulação de objetos físicos é reforçada, em detrimento da dedução. Em decorrência disso, o objeto matemático simetria ortogonal pode continuar a ser desconhecido pelo aluno e, muitas vezes, ignorado pelo professor.

CONCLUSÃO

Observamos que, apesar de os quadros teóricos poderem ser articulados em determinadas fases, em nossa pesquisa eles foram utilizados de forma que um complementasse o outro. A Teoria das Situações Didáticas auxiliou na compreensão dos processos de ensino e de aprendizagem, por um lado no estudo e na análise das várias etapas da atividade do professor e por outro, da atividade do aluno caracterizada, principalmente, pela interação com o *milieu*. Esse processo é finalizado com a interação entre alunos e professores que produzem conhecimentos de diferentes aspectos pelas ambas as partes.

O quadro dos Paradigmas Geométricos orientou de forma específica o estudo do desenvolvimento do pensamento geométrico dos sujeitos, em que se buscou compreender a influência da ação do professor por meio da proposta adequada de situações-problema no estabelecimento da relação entre percepção e dedução. Assim, esse quadro teórico permitiu realizar um estudo, do ponto de vista geométrico, sobre os procedimentos e respostas de professores e alunos, sujeitos da pesquisa, à sequência didática a eles aplicada. Observamos, por meio dos registros desses mesmos sujeitos, que a maioria se apoiava em experiências concretas, visualizando a figura de forma global, fazendo validações perceptivas. Por esse motivo, seus procedimentos e respostas foram classificados na geometria concreta (G0), segundo Parzysz (2001, 2006). Além disso, por não conseguirem mobilizar os conhecimentos que lhes permitiriam formular conjecturas e argumentar sobre elas, acreditamos não ter sido possível que seus procedimentos e respostas avançassem para o nível seguinte espaço-gráfica (G1).

A articulação aqui apresentada tornou possível a análise da atividade do professor, desde o momento em que esse planeja situações-problema de um tópico a ser ensinado até o momento em que recebe a devolutiva de seus alunos e reflete sobre ela.

Nesse contexto, a articulação entre os dois quadros teóricos tornou mais compreensível a análise dos dados, pois, por um lado, a Teoria das Situações Didáticas nos permitia fazer relações entre os papéis do professor e do aluno, em cada uma das situações nas fases de aprendizagem, segundo Brousseau (1997) e, por outro lado o quadro dos Paradigmas Geométricos nos proporcionava um estudo sobre os registros dos sujeitos sob uma visão geométrica.

Consideramos que essa articulação é uma possibilidade de lançar luz para as análises das situações de aprendizagem no campo do ensino de geometria, uma vez que propõe a análise dos dados, focando na atividade docente, mas, tendo como referência as fases de aprendizagem. Portanto, a discussão, a todo o momento, requer uma articulação entre os processos de ensino e de aprendizagem e, a maneira como um interfere no outro.

REFERÊNCIAS

Almouloud, S. Ag (2007). *Fundamentos da didática da matemática*. Curitiba. UFPR.

Brasil, Ministério da Educação (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Matemática – 5ª a 8ª série do Ensino Fundamental. Brasília, DF.

Brousseau, G (1997). *La théorie des situations didactiques Le cours de Montréal.* Recuperado de www.guy-brousseau.com.

Brousseau, G (2008). *Introdução ao estudo da Teoria das Situações Didáticas*: conteúdos e métodos de ensino. São Paulo. Ática.

Dias, M. S. S (2009). *Um estudo da demonstração no contexto da licenciatura em Matemática*: uma articulação entre os tipos de prova e os níveis de raciocínio geométrico (214 f). Tese de doutorado, Educação Matemática, Pontifícia Universidade de São Paulo. São Paulo.

Grenier, D.(1998). *Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement sur la symétrie orthogonale en sixiême* (420 f.). Tese de doutorado, Didática da Matemática, Universidade Joseph Fourier Grenoble I. França.

Lima, I (2006). *De la modélisation de connaissances des élèves aux décisions didactiques des professeurs:* étude didactique dans le cas de la symétrie orthogonale. (390 f.). Tese de doutorado, Didática da Matemática, Universidade Joseph Fourier Grenoble I. França.

Margolinas, C (2002). Situations, milieux, connaissances : analyse de l'activité du professeur. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (Eds.), *Actes de la 11ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques* (p.141-156). Recuperado de http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/42/18/48/PDF/2002_T2-Cours2-Margolinas.pdf

Margolinas, C (2004). *Points de vue de l'élève et du professeur: essai de développement de la théorie des situations didactiques*. Recuperado de http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/42/96/95/PDF/HDR_Margolinas.pdf.

Parzsyz, B (2001). Articulation et dedution dans une démarche géometrique em PE1. *Actes du 28eme colloque COPIREM (tours)*. Université d'Orléans, 99-110

Parzsyz, B (2006). La géométrie dans l'enseignement secondaire et em formation de professeurs des écoles: de quoi s'agit-il? *Quaderni di Ricerca in Didática*, Itália, *17*, 128-151.

Silva, C. V (2015). *A prática docente e sua influência na construção de conceitos geométricos:* um estudo sobre o ensino e a aprendizagem da simetria ortogonal. **(**322 f.) Tese de doutorado, Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.