Ensino Exploratório de Matemática e Tecnologias Digitais: a elaboração da lei dos senos mediada pelo *software* GeoGebra

Everton José Goldoni Estevam
Maria Ivete Basniak
Celine Maria Paulek
Dirceu Scaldelai
Natali Angela Felipe

RESUMO

Este artigo analisa elementos potenciais que conferem ao software GeoGebra o papel de mediador da aprendizagem em um contexto de desenvolvimento de uma tarefa de natureza exploratória, envolvendo a lei dos senos. Trata-se de uma análise qualitativa de cunho interpretativo que abrange a elaboração da tarefa e relatórios de aula de 15 alunos de um curso de licenciatura em Matemática. Os resultados evidenciam que as construções/representações interativas e dinâmicas estimulam o pensamento reflexivo e a relação entre conceitos, favorecendo reflexões acerca do (des)conhecimento dos alunos e de relações matemáticas. Estas incidiram particularmente na percepção de que a(s) altura(s) do triângulo permite(m) relacionar um triângulo qualquer a um triângulo retângulo, cuja compreensão alicerça a significação da lei dos senos. Contudo, o estudo revela certa dificuldade no reconhecimento da tecnologia como ferramenta de ensino que demanda problematizações assentes em aspectos pedagógicos a ela relacionados.

Palavras-chave: TIC. Trigonometria. Aprendizagem Exploratória.

Exploratory Teaching in Mathematics and Digital Technologies: Law of Sines design mediated by GeoGebra software

ABSTRACT

This paper analyzes potential elements that provide to GeoGebra software the role of learning mediating in context of perform an exploratory task involving the law of sines. It is about

Everton José Goldoni Estevam é Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Atualmente, é Professor Adjunto da Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR), *campus* de União da Vitória. Endereço: Rua Prof. Amazília, 713, ap. 301, Centro, 84600-285. União da Vitória/PR. E-mail: evertonjgestevam@gmail.com
Maria Ivete Basniak é Doutora em Educação (UFPR). Atualmente, é Professora Adjunta da Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR), *campus* de União da Vitória. Endereço: Rua Prof. Amazília, 713, ap. 303, CEP 84600-285, Centro, União da Vitória/PR. E-mail: basniak200@yahoo.com.br
Celine Maria Paulek é Especialista em Ensino da Matemática na Perspectiva da Educação Matemática (FAFIUV). Endereço: Av. Bento Munhoz da Rocha Neto, 3590, Bairro São Bernardo, 84600-420, União da Vitória/PR. E-mail: celemaria03@yahoo.com.br
Dirceu Scaldelai é Doutorando em Métodos Numéricos (UFPR). Atualmente, é Professor Assistente da Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR), *campus* de Campo Mourão. Endereço: Rua Almirante Tamandaré, 60, Centro, 87260-000, Araruna/PR. E-mail: dirceuscaldelai@gmail.com
Natali Angela Felipe é Mestranda em Ensino de Ciência e Tecnologia (UTFPR). Atualmente, é Professora Colaboradora da Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR), *campus* de União da Vitória. Endereço: Praça Alvir Riesemberg, 43, ap. 3, Centro, 84600-000, União da Vitória/PR. E-mail: natthali_felipe@hotmail.com
Recebido para publicação em 07 jul. 2017. Aceito, após revisão, em 09 maio 2018.

a qualitative study of interpretative nature concerning the task structure and reports of class with 15 students of a Mathematics teacher education. The results show that interactive and dynamic constructions/representations stimulate the reflective thinking, and relation between concepts, facilitating reflections about the students' knowledge or lack of it, and about mathematics relations. They have focused particularly on the perception that the heights of the triangle allow to relate any triangle to a triangle rectangle, whose understanding supports the meaning of the law of sines. However, the study reveals some difficulty in recognition of technology as a teaching tool that requires discuss related to pedagogical issues to be related.
Keywords: ICT. Trigonometry. Exploratory Learning.

INTRODUÇÃO

Nos últimos anos, temos desenvolvido investigações, no âmbito do Grupo de Estudos Teóricos e Investigativos em Educação Matemática (GETIEM) a fim de estudar as tecnologias digitais com especial atenção sobre como elas podem favorecer o ensino e a aprendizagem de Matemática, particularmente no contexto do ensino exploratório (Canavarro, 2011; Cyrino & Oliveira, 2016; Paulek & Estevam, 2017). Nossos estudos possibilitaram compreender que as tecnologias digitais, em particular *softwares* computacionais, podem ter diferentes usos (Valente, 1993), os quais estão essencialmente relacionados à compreensão que os professores têm delas (Peraya, 2002). De igual maneira, sua forma de uso está diretamente relacionada ao reconhecimento das relações e interações que as tecnologias digitais têm potencial para mediar (Masetto, 2000), e às características da tarefa que apoia a prática pedagógica (Valente, 1997; Barbosa, 2014).

Neste contexto, analisamos no presente trabalho elementos potenciais que configuram o *software* GeoGebra como mediador da aprendizagem, em um contexto de desenvolvimento de uma tarefa de natureza exploratória envolvendo a lei dos senos.

Para tanto, apresentamos um quadro teórico sobre as tecnologias digitais em meio ao processo pedagógico, o contexto e a metodologia da pesquisa, bem como os resultados emergentes na experiência realizada. A última seção apresenta nossas conclusões e as implicações do trabalho.

TECNOLOGIAS DIGITAIS E MEDIAÇÃO PEDAGÓGICA NO ENSINO EXPLORATÓRIO DE MATEMÁTICA

De acordo com Valente (1993), o computador pode ser usado como uma "máquina de ensinar" ou como "ferramenta de ensino". Como máquina de ensinar, o computador é simplesmente uma "versão computadorizada dos métodos tradicionais de ensino" (p.6), incluindo programas tutoriais, programas de exercício e prática, jogos educacionais e simulação. Quando o computador é entendido como ferramenta de ensino, "não é mais o instrumento que ensina o aprendiz, mas a ferramenta com a qual o aluno desenvolve algo e, portanto, o aprendizado ocorre pelo fato de estar executando uma tarefa por intermédio do computador" (Valente, 1993, p.8).

Em ambas as situações “o uso inteligente do computador não é um atributo inerente ao mesmo, mas está vinculado à maneira como nós concebemos a tarefa na qual ele será utilizado” (Valente, 1997, p.19). Em outras palavras, para que o computador funcione como uma ferramenta de ensino de Matemática, é necessário que a tarefa proposta e a dinâmica de aula possibilitem, e até mesmo exijam que o computador seja utilizado para mediar o conhecimento do aluno por meio da interação deste com aquele. Isto porque

> [...] uma tecnologia não constitui em si uma revolução metodológica, mas reconfigura o campo do possível. E essa oportunidade que evocamos apenas será dada aos aprendizes se, primeiramente, os professores a perceberem, apropriarem-se dela e a dominarem. Em outras palavras, se a compreenderem bem. (Peraya, 2002, p.49)

É apropriado esclarecer, portanto, que concebemos que o aprendizado precisa ser estimulado para os níveis de desenvolvimento que ainda não foram alcançados. Como refere Vigostsky (1991, p.60), “o aprendizado desperta vários processos internos de desenvolvimento, que são capazes de operar somente quando a criança interage com pessoas em seu ambiente e quando em operação com seus companheiros”. Desta forma, corroboramos os argumentos de Vigotsky (1991), para quem a aprendizagem mediada, permeada pela interação, é potencial para que o processo se torne parte das “aquisições do desenvolvimento independente da criança”. Neste sentido, entendemos que o aprendizado de determinados conteúdos de matemática, mediado pelo computador, permite que o aluno formule e verifique hipóteses que não seriam possíveis de serem discutidas e problematizadas sem o auxílio de meio tecnológico digital. Tal aspecto se associa à perspectiva exploratória de ensino e aprendizagem orientada pela inquirição, colaboração, comunicação e reflexão (Cyrino & Oliveira, 2016). Ela pressupõe que a aprendizagem decorre do trabalho sério que os alunos realizam a partir do engajamento em tarefas desafiadoras, para as quais não possuem um método imediato de resolução (Canavarro, 2011). Com ações consonantes do professor, os alunos são conduzidos a comunicar suas ideias e (in)compreensões, questionar ideias de outros, refletir sobre a necessidade ou vantagem de determinadas ideias ou estratégias de resolução, em uma dimensão colaborativa de aprendizagem (Chapman & Heater, 2010).

Assim, as tecnologias digitais podem suportar o desenvolvimento de tarefas exigentes e mediar ações e reflexões dos alunos. Elas oferecem meios para que elaborem, a partir do estabelecimento de relações entre aquilo que já sabem e os “novos” conceitos e ideias em questão, estratégias de resolução em interação com o meio e com o outro (Vigotsky, 1991). Isto refere o potencial das tecnologias vistas como ferramentas de ensino para a promoção do que Dewey (1959) denomina pensamento reflexivo, considerado por ele como a melhor forma de pensar, uma “espécie de pensamento que consiste em examinar mentalmente o assunto e dar-lhe consideração séria e consecutiva” (p.13). Trata-se de um pensamento que impele à inquirição, abrangendo um estado de dúvida e um ato de pesquisa, uma vez que envolve a necessidade de encontrar uma forma de resolver uma determinada questão. Destarte, a tecnologia pode mediar pedagogicamente o processo do pensamento reflexivo, já que, de acordo com Perez e Castillo (1999), citados por Masetto (2000, p.145), "a mediação pedagógica busca abrir um caminho a novas relações do estudante: com os materiais, com o próprio contexto, com outros textos, com seus companheiros de aprendizagem, incluído o professor, consigo mesmo e com seu futuro". Neste sentido, parecem essenciais estudos que problematizem tais caminhos de modo a colaborar com a compreensão, especialmente por parte do professor, das tecnologias digitais associadas a dimensões pedagógicas do ensino de Matemática.

O GeoGebra é um dos *softwares* mais estudados e utilizados no ensino de Matemática atualmente. Graças à possibilidade de manipulação, ele oferece dinamicidade ao ensino, por meio da interação do usuário com o *software.* Ao manipulá-lo, é possível observar e relacionar variações geométricas e algébricas, que seriam inviáveis utilizando apenas lápis, papel e ferramentas de desenho.

Nos últimos anos, muitos trabalhos vêm enfatizando as potencialidades do uso do GeoGebra no processo de ensino de Matemática. Cyrino e Baldini (2012), a partir de um levantamento no Banco de Teses e Dissertações da Capes (BTD-Capes), identificaram 35 trabalhos publicados, no período de 2008 a 2010, envolvendo o *software* GeoGebra e a formação de professores, sendo uma tese de Doutorado, 8 dissertações de Mestrado Acadêmico e 27 dissertações de Mestrado Profissional. Igualmente, Lemke, Silveira e Siple (2016), a partir de um levantamento no BTD-Capes e no *site* Domínio Público, identificaram 308 trabalhos envolvendo a temática no período de 2013 a 2016, sendo 9 teses, 8 dissertações de Mestrado Acadêmico e 291 dissertações de Mestrado Profissional. Dentre os conteúdos matemáticos abordados nesses trabalhos, prepondera o estudo de funções e de geometria. Contudo, considerando o foco de nosso estudo, destacamos alguns trabalhos que utilizam o *software* GeoGebra no ensino de trigonometria, sendo eles: Batista (2015), Urdaneta, Gonzalez e Castillo (2017), Lopes (2011), Oliveira e Fernandes (2010).

Batista (2015) propôs atividades de exploração e investigação, incluindo a modelagem matemática, permeadas pelo *software* GeoGebra para o ensino de funções trigonométricas. Seu objetivo foi norteado pela questão: "Que intervenções poderão ser realizadas de modo a promover a aprendizagem das funções trigonométricas seno e cosseno no contexto de tarefas exploratório-investigativas em aulas de matemática?". A autora enfatiza a dinamicidade do uso do *software* no processo de compressão das transformações provocadas pela variação dos parâmetros da função descrita por $f(x) = a + b \cdot sen(c \cdot x + d)$.

Urdaneta, Gonzalez e Castillo (2017) descrevem em seu trabalho a construção de um objeto elaborado no GeoGebra, e sua aplicação em uma sequência didática sobre um modelo TPACK,[1] para analisar e dotar sentido aos signos que representam o seno, cosseno e tangente de um ângulo. Os autores defendem que a aprendizagem de conteúdos

[1] A sigla TPACK, em inglês, significa *Technological Pedagogical Content Knowledge* e refere-se ao Conhecimento Tecnológico e Pedagógico do Conteúdo em Matemática.

que dependem de interpretações geométricas é mais significativa aos estudantes, quando são utilizados recursos tecnológicos no processo de ensino. Os autores ainda destacam que, na aplicação da sequência didática, as conjecturas que foram levantadas e discutidas ocorreram graças aos atributos do *software* GeoGebra.

Lopez (2011) faz uma análise das potencialidades e limitações do *software* GeoGebra no ensino e aprendizagem de trigonometria, permeada por um conjunto de atividades investigativas. Segundo a autora, o uso do GeoGebra foi um facilitador para os alunos formularem conjecturas, testá-las e prová-las. A autora acrescenta, ainda, que o GeoGebra encorajou o aluno no processo de descobertas e ampliou sua argumentação sobre o conteúdo estudado.

Oliveira e Fernandes (2010) investigaram, em seu trabalho, a eficiência de estratégias pedagógicas com tecnologias na construção significativa do conhecimento sobre conceitos iniciais de trigonometria, permeada por dois instrumentos distintos: um pautado em tecnologias consideradas "tradicionais" e outro em tecnologia digital. Ao fim da pesquisa, os autores consideraram significativa a aprendizagem dos alunos que utilizaram o *software* GeoGebra, não apenas por resolverem corretamente as questões propostas, mas porque conseguiram construir um conhecimento sólido, pautado em uma estratégia pedagógica da qual participaram ativamente, e não apenas como receptáculos de informações.

Assim, na perspectiva de Valente (1993) e de acordo com indícios das pesquisas, compreendemos o GeoGebra como uma ferramenta de ensino que pode mediar o desenvolvimento de uma aula assente em uma tarefa de natureza exploratória.

O ENSINO EXPLORATÓRIO DE MATEMÁTICA

O ensino exploratório de Matemática constitui uma perspectiva que, situada em uma compreensão alargada de *inquiry-based teaching*, contrapõe-se ao modelo de transmissão de conhecimento/informação associado a práticas expositivas e diretivas (Oliveira & Cyrino, 2013). Este ensino distingue-se do ensino direto pelos papéis desempenhados pelo professor e pelos alunos, pelas tarefas que são propostas e a forma como são geridas, e pela comunicação que é originada na aula (Oliveira, Menezes & Canavarro, 2013; Ponte, 2005).

O ensino exploratório de Matemática coloca os alunos no centro do processo didático, os quais são conduzidos a comunicar suas ideias e (in)compreensões, questionar ideias de outros, refletir sobre a necessidade ou vantagem de determinadas ideias ou estratégias de resolução, em uma dimensão colaborativa de aprendizagem (Paulek & Estevam, 2017; Cyrino & Oliveira, 2016). A ênfase deve ser colocada no aluno e nas condições que favoreçam a participação, individual e coletiva, em uma atividade de inquirição, em que o conhecimento matemático é construído a partir de situações práticas específicas. Nelas, os alunos levantam questões, formulam conjecturas e exploram possíveis caminhos, apoiando-se nas suas experiências anteriores (Oliveira & Carvalho, 2013).

O ensino exploratório da Matemática defende que os alunos aprendem a partir do trabalho sério que realizam com tarefas valiosas que fazem emergir a necessidade ou vantagem das ideias matemáticas que são sistematizadas em discussão coletiva. Os alunos têm a possibilidade de ver conhecimentos e procedimentos matemáticos surgirem com significado e, simultaneamente, de desenvolver capacidades matemáticas, como a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática (Canavarro, 2011; Ponte, 2005).

Em um estudo sobre características das tarefas de natureza exploratória e da dinâmica da aula, Paulek e Estevam (2017) sublinham a importância de as tarefas preservarem contextos significativos aos alunos, com itens encadeados intencionalmente, de acordo com o objetivo de aula e priorizando o raciocínio indutivo. Elas devem possibilitar a mobilização de formas de pensamento com diferentes níveis de complexidade, apoiadas em representações diversas assentes em desenhos, na aritmética e na álgebra. Deste modo,

> [...] é preciso que a tarefa deixe para os alunos parte importante do trabalho de exploração e elaboração do conhecimento, de forma a configurar, em alguma medida, um desafio e instigar seu engajamento na resolução. É esperado, portanto, algum nível de abertura que favoreça o emprego de estratégias e registros de resolução diversos, com diferentes níveis de sofisticação matemática. (Paulek & Estevam, 2017, p.419-420)

Contudo, salienta-se que a tarefa por si só não garante a efetividade da atividade matemática intentada, o que confere relevância à dinâmica da aula e, sobretudo, ao papel e à ação do professor. Estes abrangem desde a escolha criteriosa da tarefa até o delineamento da respectiva exploração matemática, com vista ao cumprimento de seu propósito matemático, considerando o currículo (Oliveira e Cyrino, 2013; Oliveira, Menezes & Canavarro, 2013). No decurso da aula, para além de gerir o trabalho dos alunos, o professor precisa interpretar e compreender como eles resolvem a tarefa, bem como explorar suas respostas e ideias, de modo a articulá-las àquilo que é esperado que aprendam.

> A ação do professor é fundamental, tanto no que se refere à provocação para justificações, clarificações e ampliações de ideias, quanto para a colaboração e negociação de significados nos processos de estabelecimento de estratégias resolutivas e generalização de ideias, procedimentos e conceitos. (Paulek & Estevam, 2017, p.420)

O ensino exploratório da Matemática é, desta forma, uma atividade complexa e considerada difícil por muitos professores (Stein et al., 2008). Como forma de orientar as ações do professor, propõe-se a dinâmica de aulas em fases, as quais são associadas às práticas componentes da ação do professor, referidas por Stein et al. (2008) e destacadas por Paulek e Estevam (2017), nomeadamente: i) proposição e apresentação da tarefa, apoiada na prática de propor a tarefa aos alunos; ii) desenvolvimento da tarefa, associada à prática de monitorar a resolução dos alunos, apoiá-los e identificar resoluções interessantes para discussão com toda a turma; iii) discussão coletiva da tarefa, relacionada à apresentação das resoluções selecionadas, contraposição de diferentes ideias e estratégias, bem como discussão de suas potencialidades e limitações; e iv) sistematização das aprendizagens, com a formalização das ideias discutidas no decorrer da aula, aproximando-as daquelas prescritas nos currículos.

Stein et al. (2008), assim como Canavarro (2011), ainda salientam que a efetivação dessas práticas exige planejamento, o qual envolve a prática de "antecipar" as ações de professor e alunos no desenvolver das atividades previstas para a aula.

CONTEXTO E PRESSUPOSTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA

O presente estudo consiste em uma análise qualitativa de cunho interpretativo, a partir do trabalho realizado por 15 (quinze) alunos do segundo ano de um curso de licenciatura em Matemática, ao desenvolverem uma tarefa envolvendo a lei dos senos (Quadro 1). Ela apoiou-se no *software* GeoGebra e é assente no ensino exploratório de Matemática. Essa tarefa foi desenvolvida no contexto de uma disciplina obrigatória do curso, cujo objetivo é que o aluno vivencie situações de aprendizagem de conteúdos matemáticos do Ensino Médio, por meio de diferentes alternativas de ensino da Matemática.

Quadro 1. *Tarefa "Alturas" utilizada para a elaboração da lei dos senos com auxílio do software GeoGebra*

Tarefa: Alturas Crie três pontos (A, B e C), não colineares. Trace as retas definidas por esses pontos. Delimite o polígono ABC e trace suas alturas. a) Mova os pontos A, B e C de modo a obter triângulos acutângulos, obtusângulos e retângulos e verifique se a construção elaborada apresenta as três alturas dos triângulos, em todos os casos. Caso contrário, reveja a construção e faça as alterações necessárias. Registre as ideias utilizadas e as possíveis causas dos problemas identificados. b) Qual a posição das alturas em relação ao triângulo quando este é acutângulo, obtusângulo e retângulo? c) Tendo por base o triângulo ABC representado, determine a relação existente entre os senos dos ângulos e as medidas dos lados do triângulo ABC. d) A relação encontrada é válida para os triângulos acutângulos, obtusângulos e retângulos? Justifique.

Fonte: a pesquisa.

Para o desenvolvimento da tarefa "Alturas", foram utilizadas seis aulas com duração de 50 minutos cada uma, distribuídas em duas aulas ininterruptas semanalmente. As aulas foram realizadas no Laboratório de Ensino de Matemática da instituição de ensino, onde alunos puderam utilizar o *software* GeoGebra em *tablets* e *notebooks*. Foram necessárias quatro aulas para apresentação da tarefa aos alunos e seu desenvolvimento nos grupos (duplas e um trio), e a discussão coletiva e a sistematização ocorreram em outras duas aulas. Esta última consistiu na sistematização da lei dos senos, tendo por base as resoluções e ideias apresentadas pelos alunos.

Assim, as análises deste artigo envolvem o processo de elaboração da tarefa por um grupo de pesquisadores[2] e as produções escritas dos alunos na resolução da tarefa. Na análise do processo de elaboração da tarefa são apresentadas as ideias que foram antecipadas em termos de atividades que ela poderia desencadear e o papel que o *software* GeoGebra poderia desempenhar neste contexto. As atividades dos alunos envolveram suas produções escritas na resolução da tarefa, a partir de Relatórios de Aula (RA) em que foi solicitada uma descrição pormenorizada dos processos e estratégias de resolução, bem como observações sobre o uso da tecnologia na tarefa, pontuadas no final do relatório. Por fim, também recorreremos a registros do Caderno de Campo (CC) da professora-pesquisadora para complementar os dados. As resoluções foram realizadas, inicialmente, em duplas (e um trio, em virtude do número ímpar de alunos) e, posteriormente, algumas foram selecionadas para discussão coletiva, no grande grupo. Para garantir o anonimato da identidade dos alunos, utilizamos neste trabalho as siglas AA, CD, CM, EI, IJ, LT e LME para identificar os grupos.

As análises partem do processo de elaboração da tarefa pelo grupo de pesquisadores, no qual foram consideradas as possíveis ações de professor e alunos no decurso da aula, os conhecimentos prévios relevantes para a compreensão e significação da lei dos senos, aspectos-chave para os quais deveria ser chamada a atenção dos alunos e as possibilidades emergentes na(s) construção(ões) e exploração do *software* GeoGebra. Esses elementos constituíram a fase de antecipação da aula, de acordo com o ensino exploratório de Matemática, e servem de base para a análise das ideias efetivamente emergentes no RA dos alunos, realizada na sequência.

ELABORAÇÃO DA TAREFA NO CONTEXTO DO GRUPO DE PESQUISA

A tarefa "Alturas" foi pensada com o objetivo de provocar a dedução e compreensão da lei dos senos, a partir de conjecturas que conferissem significado a essa relação matemática. Como consideramos a necessidade de validação desta lei para todos os triângulos, as construções no GeoGebra que permeiam a tarefa provocam o estabelecimento e o teste de conjecturas que atendam às particularidades dos diferentes tipos de triângulos em relação aos ângulos, bem como sublinham as alturas de um triângulo como aspecto-chave do processo dedutivo. Neste sentido, os itens *a)* e *b)* solicitam que os alunos determinassem as alturas de um triângulo construído e analisem, com recorrência

[2] O presente estudo tem origem no Projeto de Pesquisa "Ensino e Aprendizagem Exploratória de Matemática", financiado pela Fundação Araucária e desenvolvido por pesquisadores do GETIEM.

à dinamicidade do *software,* suas posições nos casos em que o triângulo é retângulo, acutângulo e obtusângulo. Estes aspectos foram incluídos para chamar a atenção para conhecimentos anteriores (e essenciais) que poderiam auxiliar no desenvolvimento da tarefa. Ao mesmo tempo, exigiam que os alunos percebessem aspectos comuns e diversos das alturas e considerem que as relações estabelecidas necessitam ser preservadas e válidas para os diferentes triângulos. Trata-se do que Wood, Bruner e Ross (1976) denominam andaimes (*scaffoldings*), os quais consistem essencialmente em elementos que podem ser oferecidos pelo professor, por colegas ou, no caso, pela construção no GeoGebra, que suportam a aprendizagem dos alunos, à medida que provocam e apoiam sua ação em meio ao processo de construção do conhecimento.

O item *c)* permite que o aluno busque a relação abrangente entre os senos dos ângulos e as medidas dos lados de um triângulo, enfatizando que existe uma relação entre seus lados e ângulos que deve ser investigada. Embora este item possa ser considerado por muitos como a solução final da tarefa, destacamos que, em uma tarefa de natureza exploratória, os meios são, muitas vezes, mais interessantes, importantes e produtivos do que os fins, já que evidenciam raciocínios, relações, conhecimentos e desconhecimentos, por vezes não evidentes em uma solução final. Desta forma, mais do que identificar ou estruturar a relação existente, este item da tarefa visa a evidenciar ideias, conceitos, estratégias e procedimentos (corretos e incorretos) utilizados para conjecturar e validar a lei dos senos.

Finalmente, o item *d)* da tarefa foi pensado a fim de inquirir explicitamente o aluno quanto à validade da relação estabelecida no item anterior para os diferentes tipos de triângulo e, em caso negativo, provocar a apresentação de argumentos que esclarecessem as condições para sua validação. Cabe salientar, contudo que, ao admitir que a aprendizagem resulta da atividade desenvolvida a partir daquilo que é proposto, não das tarefas em si, a dinâmica da aula é essencial para a efetividade das atividades emergentes dessas tarefas. Torna-se, deste modo, essencial que o professor promova o engajamento dos alunos nas tarefas, bem como provoque e estimule suas ações e raciocínios. Igualmente, é fundamental que sua prática seja alicerçada na "capacidade de ouvir com atenção o que dizem os alunos quando lhe explicam as suas ideias, estratégias e soluções, ainda que imprecisas ou incorretas, e os encoraje a partilharem-nas com os outros na sala de aula" (Guerreiro, 2014, p.238).

DESENVOLVIMENTO DA TAREFA COM OS ALUNOS

No início da tarefa, pudemos observar a falta de habilidade dos alunos com o *software*, que fez com que vários grupos reiniciassem a construção, quando se depararam com equívocos:

> Percebemos que pulamos um passo, o de delimitar o polígono ABC, nisso, iniciamos novamente a construção do arquivo, refazendo os passos, agora formando o polígono antes de traçar as alturas. (EI – RA)

> Nos equivocamos na hora de delimitar as alturas, clicamos em dois pontos, porém percebemos que algo estava errado; então, começamos a construção desde o início. (AA – RA)

Nos dois casos, não era necessário reiniciar a construção, mas os alunos não pensaram nisso e, ao perceberem que algo não foi feito corretamente, preferiram recomeçar o trabalho, ao invés de identificar o(s) equívoco(s) e corrigi-lo(s). Para tanto, poderiam, por exemplo, utilizar o comando "desfazer" ou inverter a ordem dos procedimentos que não interferiam na construção final. Neste sentido, problematizar esses aspectos no momento da discussão coletiva pode colaborar para a compreensão/admissão do potencial que o dinamismo do *software* tem para a construção de relações entre diferentes conceitos, ideias e procedimentos matemáticos, com vistas à compreensão desta tecnologia.

As resoluções do item *a)* da tarefa evidenciaram deficiências conceituais acerca das alturas de um triângulo, que parecem ter sido suscitadas pela integração interativa que a construção (e o *software*) possibilitou. Observamos isso no excerto citado anteriormente em AA-RA, quando, para traçar a altura, os alunos clicam em dois pontos, percebem problemas na construção e decidem reiniciá-la afirmando: *"quando chegamos novamente na parte da altura, clicamos em reta perpendicular"*. De acordo com registro do CC, outras duas duplas fizeram algo semelhante, recorrendo à ferramenta "reta" do *software* para delimitar a altura. Utilizando tal recurso, ao mover os vértices do triângulo, perceberam que a "perpendicularidade" não se mantinha, o que os levou a refletir sobre o conceito em questão. Acreditamos que a dinamicidade do *software*, que permite mover pontos e retas, possibilitou que os alunos revelassem equívocos conceituais em relação à altura de um triângulo, a partir de dimensões do pensamento reflexivo. Isto provavelmente não seria evidenciado em uma construção no papel, em que provavelmente refeririam a elaboração/representação da altura sem, necessariamente, pensar na perpendicularidade e nas suas implicações em diferentes triângulos.

Em outro relatório, também verificamos problemas conceituais em relação às alturas:

> No triângulo acutângulo, a altura fica no interior do triângulo ABC; no triângulo obtusângulo, a altura fica no exterior do triângulo ABC; e no triângulo retângulo, a altura fica coincidente com a reta AC ou CB. (IJ – RA)

É possível verificar que os alunos não consideram a existência de três alturas em cada triângulo, apenas avaliam uma base e a altura relativa àquela base. Isto pode decorrer dos exemplos didáticos comumente apresentados, nos quais a base do triângulo é horizontal e, quase sempre, a altura está dentro do polígono. Contudo, a construção no GeoGebra possibilita explorar de forma dinâmica e integrada as três alturas em triângulos acutângulos, obtusângulos e retângulos, considerando bases diversas. Identificamos isso quando os alunos exploraram a movimentação dos diversos vértices do triângulo, dando origem a diferentes tipos de triângulo, e observaram “o que acontecia com suas alturas”. A Figura 1 representa algumas possibilidades.

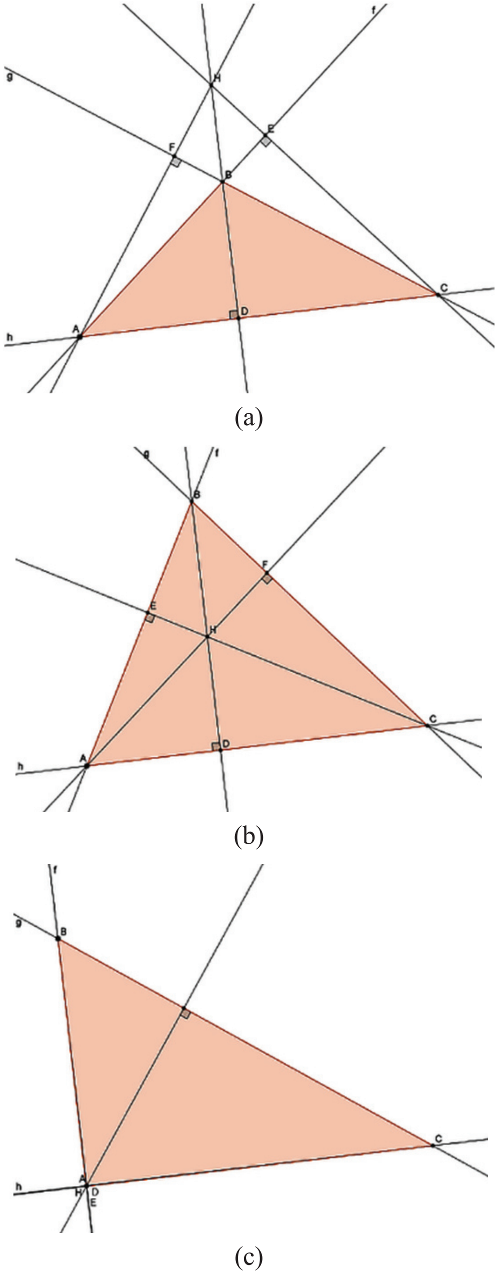

Figura 1. Alturas no triângulo obtusângulo (a), acutângulo (b) e retângulo (c)

Fonte: a pesquisa.

Os registros da professora (CC) também ressaltam que algumas duplas tiveram dificuldade em visualizar as alturas no triângulo retângulo, e só conseguiram identificar a coincidência delas com os catetos quando inquiridas sobre o que aconteceria se um ângulo convergisse para 90º. Isso pôde ser investigado a partir da observação simultânea do ângulo convergindo para o ângulo reto, e a posição das alturas quando desta convergência, conforme sugere o seguinte excerto.

> Foi produtivo o uso do GeoGebra na tarefa, pois possibilitou uma melhor visualização e manipulação dos triângulos relativas aos seus lados e ângulos. (AA-RA)

Outros alunos reiteraram a importância do *software* na visualização de propriedades dos triângulos, na percepção de aspectos relevantes para o desenvolvimento da tarefa, na identificação daquilo que se altera e do modo como se altera, nos diferentes tipos de triângulo, bem como na compreensão inicial do que era solicitado na tarefa:

> O GeoGebra foi fundamental, principalmente no início da tarefa, onde precisávamos movimentar o triângulo de diferentes maneiras para obter triângulos retângulos, acutângulos e obtusângulos, e também para observar o que acontecia com as alturas dos triângulos nos três casos. (CD-RA)
>
> A visualização da figura pronta auxilia na identificação dos elementos que precisam ser observados (retas, ângulos, triângulos). (CM-RA)

A estrutura interativa possibilitou, ao mesmo tempo, alterar as representações e verificar, de maneira integrada, as “mudanças” consequentes em diferentes aspectos, o que favorece a manifestação de dúvidas e questões, e a elaboração de conjecturas, no decurso de um processo exploratório-investigativo. Também foi sublinhado pelos alunos que:

> Uma das vantagens observadas foi a seguinte: uma construção foi possível ser utilizada para todos os casos de triângulos, devido às ferramentas que o programa possui. (LME-RA)

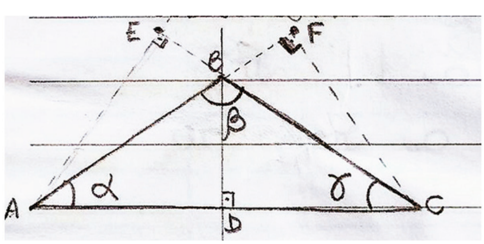

Figura 2. Representação das alturas (LME-RA)

Fonte: a pesquisa.

A Figura 2 sugere que os alunos movimentaram os vértices (de triângulos retângulos e acutângulos) para obter um triângulo obtusângulo e, assim, justificaram que a relação dos senos encontrada era válida, também, para este último tipo de triângulo.

A representação no GeoGebra mediou, portanto, a elaboração de conjecturas para a estruturação de relações algébricas que sustentam a lei do senos, bem como sua validação para diferentes triângulos. A Figura 3 ilustra como os elementos geométricos da construção do GeoGebra apoiaram a elaboração de conjecturas, a identificação de relações (algébricas) e a dedução do padrão que permeia essas relações, consistindo na lei dos senos (trigonometria). Contudo, as inconsistências nas deduções relacionadas ao triângulo obtusângulo evidenciaram um aspecto que permeou as práticas do grupo: embora as análises realizadas sublinhem o papel fundamental desempenhado pelo GeoGebra, tanto para a compreensão da tarefa e engajamento em sua resolução, quanto para o estabelecimento e teste de conjecturas, validação delas e significação das relações algébricas estabelecidas, a necessidade de representação dos triângulos no papel sugere que os alunos não reconhecem esta tecnologia como mediadora de pensamentos e reflexões, os quais apoiam suas aprendizagens. Isto é patente, por exemplo, quando, no papel, cometem o erro de não relacionar a denominação do lado do triângulo ao ângulo oposto, o que faz com que a relação identificada (para o triângulo obtusângulo) não guarde correspondência à representação pictórica do triângulo. A presença constante de frases como *"o software auxiliou na visualização"* corrobora esse aspecto e sugere que as perspectivas dos alunos referem uma compreensão da tecnologia como máquina de ensinar, ao mesmo tempo em que revelam certa dificuldade em reconhecê-la como ferramenta de ensino.

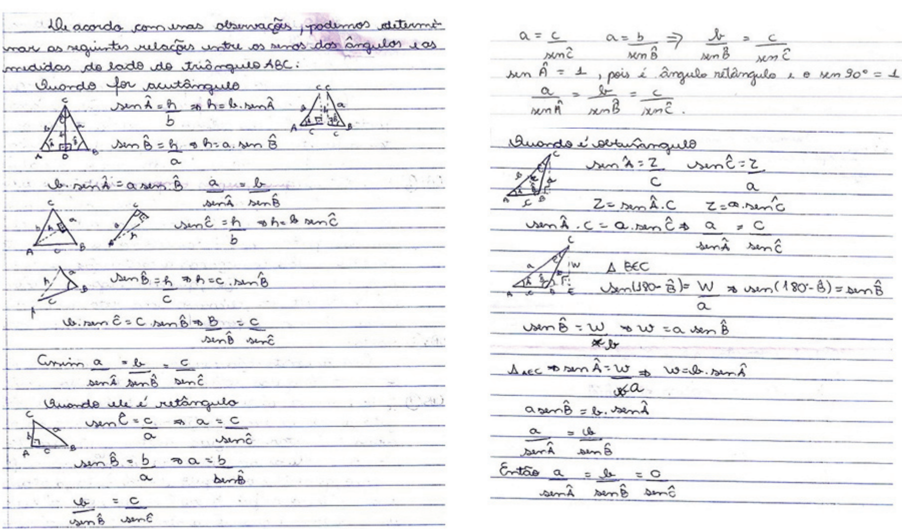

Figura 3. Resolução de AA-RA com o processo de dedução da lei dos senos

Fonte: a pesquisa.

Apesar disso, dos sete grupos, apenas um não foi capaz de estruturar a relação e só conseguiu estabelecê-la no momento de discussão coletiva.

> O que falhamos, em nosso trabalho, para que pudéssemos chegar à conclusão [lei dos senos], foi que comparamos os senos dos mesmos ângulos em triângulos diferentes, ao invés de compararmos dois ou mais ângulos do mesmo triângulo. Mas, depois das explicações dos colegas [fase de discussão coletiva], ficou clara a equivalência [igualdade] de cada seno [do ângulo] dividido por seu lado oposto. (IJ-RA)

Neste sentido, o estudo revela que a associação da perspectiva do ensino exploratório de Matemática às tecnologias digitais mostra-se proeminente, sendo o *software* considerado uma ferramenta interessante para o engajamento e explicitação de ideias, (des) conhecimentos e estratégias de resolução. Desta forma, ele configura um recurso promissor para sustentar a atitude inquiridora dos alunos no decurso do processo de resolução, suscitando questões ao mesmo tempo em que oferece elementos que apoiam a elaboração de conjecturas, justificações e demonstrações, desde a apresentação da tarefa até a sistematização das aprendizagens. Por exemplo, o CC da professora destaca que o *software* também mediou a problematização de algumas ideias nas fases de discussão coletiva e sistematização, como: i) as alturas serem sempre perpendiculares; ii) sempre existirem três alturas; e iii) as alturas sempre se encontrarem em um único ponto (mesmo que fora e distante do triângulo). Enfatizamos que alguns alunos não exploraram devidamente o *software* para buscar conjecturas ou justificativas em relação a estes aspectos. Contudo, com o auxílio da professora, isto pôde ser feito no momento da discussão, esclarecendo até mesmo aqueles que não haviam pensado sobre tais aspectos.

CONCLUSÃO

A tarefa mediada pelo *software* GeoGebra foi pensada para chamar a atenção para aspectos-chave que suportam a lei dos senos, nomeadamente, a existência e as características das alturas de diferentes triângulos, considerados como conhecimentos prévios que poderiam ser utilizados para elaborar conjecturas e validar as relações algébricas estabelecidas, em consonância com o ensino exploratório de Matemática. Ao favorecer os aspectos relacionais dos conceitos envolvidos, isto é, considerar a(s) altura(s) do triângulo como ente matemático que possibilita utilizar as relações trigonométricas no triângulo retângulo para elaborar a lei dos senos, válida para um triângulo qualquer, a tarefa promoveu reflexões fundamentais para a superação de dificuldades e compreensão da referida relação para além da "fórmula". Destarte, em uma dimensão integradora das ideias matemáticas, evidenciaram-se equívocos conceituais ao mesmo tempo em que se ofereceram condições para sua problematização e superação, seja no momento de resolução nos grupos, de discussão coletiva ou de sistematização. Neste sentido, um dos elementos potenciais do *software* como mediador das aprendizagens consiste na provocação e sustentação de reflexões, a partir da manifestação de ideias promissoras e erros dos alunos, nas diferentes fases da aula[3].

Os resultados mostraram que a dimensão dinâmica e integradora do *software*, associada à natureza da tarefa e à dinâmica da aula, possibilita acesso aos (des) conhecimentos do(s) aluno(s), ao mesmo tempo em que funciona como andaime para os processos de refletir, conjecturar, relacionar, negociar significados e validá-los. A análise de construções/representações interativas e dinâmicas estimula o pensamento reflexivo em termos de conceitos e ideias matemáticas, o que seria infactível com recorrência ao lápis e papel, por exemplo. Neste sentido, as possibilidades criadas pelo *software*, em associação com a tarefa e a dinâmica de uma aula exploratória, possibilitaram a atribuição de significado a uma relação, por vezes, tratada com recorrência exclusiva à Álgebra e apenas memorizada pelos alunos. Assim, outro elemento que confere papel mediador ao *software* significa sua capacidade para articular e contrapor, dinamicamente, aspectos matemáticos de natureza diversa. A possibilidade de associar as representações dinâmicas dos triângulos e suas alturas a relações algébricas, além de facilitar a identificação inicial destas últimas, fomenta a elaboração de conjecturas e testes. Assim, possibilita a compreensão e justificação de expressões, conceitos e procedimentos matemáticos complexos e abstratos, como, por exemplo, a lei dos senos.

Por sua vez, a dificuldade evidenciada pelos alunos em reconhecer a tecnologia como ferramenta de ensino pode decorrer dos modos como ela é inserida no processo pedagógico, inclusive em termos do processo avaliativo. Apesar de os alunos utilizarem o *software* para desenvolver a tarefa, explorar, conjecturar e buscar justificativas, a necessidade de elaborar um relatório de aula explicando o que fizeram, por exemplo, pode limitar a integração da tecnologia no seu processo de construção de conhecimento. Isto pode influenciar ou até mesmo justificar a dificuldade de reconhecimento daquele como mediador de suas aprendizagens. Neste sentido, parecem ser necessárias, além de experiências diversas evidenciando tal potencial, problematizações pedagógicas assentes nessas experiências, com vista a evidenciar as necessidades de mudanças das crenças sobre o ensino e a aprendizagem, as quais podem refletir alterações da prática do ensino de Matemática. Referimos a necessidade de desenvolvimento e cultivo de uma cultura de integração da tecnologia no ensino e na aprendizagem da Matemática, como mediadora pedagógica, em detrimento de práticas que se limitam a inseri-la, por vezes, disseminando uma compreensão dela como máquina de ensinar. A continuidade de pesquisas nesta linha pode auxiliar no esclarecimento dessas questões.

AGRADECIMENTO

Agradecemos à Fundação Araucária e à Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação da UNESPAR pelo financiamento para realização da pesquisa.

[3] Considerado o enfoque do presente trabalho, não discutiremos limitações estruturais e conceituais do *software* GeoGebra. Contudo, dependendo do conteúdo a ser abordado, este é um aspecto a ser considerado.

REFERÊNCIAS

Barbosa, S. M. (2014). Tecnologias de Informação e Comunicação e tarefas investigativas: possibilidades. *Acta Scientiae, 16*(3), 489-504.

Batista, V. N. (2015). *Uma proposta metodológica para o ensino das funções trigonométricas* (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, Brasil.

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática, 115*, 11-17.

Chapman, O., & Heater, B. (2010). Understanding change through a high school mathematics teacher's journey to inquiry-based teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education 13*(6), 445-458.

Cyrino, M. C. C. T., & Baldini, L. A. F. (2012). O software geogebra na formação de professores de matemática – uma visão a partir de dissertações e teses. *Revista Paranaense de Educação Matemática*, *1*(1), 42-61.

Cyrino, M. C. C. T., & Oliveira, H. M. (2016). Ensino exploratório e casos multimídia na formação de professores que ensinam matemática. In M. C. C. T. Cyrino (Ed.), *Recurso multimídia para a formação de professores que ensinam matemática*: *elaboração e perspectivas* (pp.19-32). Londrina, Brasil: EDUEL.

Dewey, J. (1959). *Como pensamos*. São Paulo: Editora Nacional, 1959.

Guerreiro, A. (2014). Comunicação matemática na sala de aula: conexões entre questionamento, padrões de interação, negociação de significados e normas sociais e sociomatemáticas. In J. P. Ponte (Ed.), *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (pp.237-257). Lisboa: IEUL.

Lemke, R., Silveira, R. F., & Siple, I. Z. (2016). GeoGebra: uma tendência no e.nsino de Matemática. *Anais do Colóquio Brasileiro de Educação,* 2, Joinville, Brasil, 607-619.

Lopes, M. M. (2011). Contribuições do Software GeoGebra no ensino e aprendizagem de Trigonometria. *Anais da Conferência Interamericana de Educação Matemática,* 13, Recife, Brasil, 1-12.

Masetto, M. T. (2000). Mediação pedagógica e o uso da tecnologia. In J. M. Moran, M. T. Masetto, & M. A. Behrens (Eds.), *Novas tecnologias e mediação pedagógica* (pp.133-173). Campinas, Brasil: Papirus.

Oliveira, G. P., & Fernandes, R. U. (2010). O uso de tecnologias para ensino de trigonometria: estratégias pedagógicas para a construção significativa da aprendizagem. *Educação Matemática Pesquisa*, *12*(3), 548-577.

Oliveira, H., & Carvalho, R. (2014). Uma experiência de formação, com casos multimédia, em torno do ensino exploratório. In J. P. Ponte (Ed.), *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (pp.465-490). Lisboa: IEUL.

Oliveira, H., & Cyrino, M. (2013). Developing knowledge of inquiry-based teaching by analysing a multimedia case: one study with prospective mathematics teachers. *SISYPHUS – Journal of Education, 1*(3), 214-245.

Oliveira, H., Menezes, L., & Canavarro, A. P. (2013). Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: Contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a elaboração de um quadro de referência. *Quadrante, 22*(2), 19-53.

Paulek, C. M., Estevam, E. J. G. (2017). Ensino exploratório de matemática: uma discussão sobre tarefas e a dinâmica da aula. *Libro de Actas do Congresso Iberoamericano de Educación Matemática*, 7, Madrid, España, 412-421.

Peraya, D. (2002). O ciberespaço: um dispositivo de comunicação e de formação midiatizada. In S. Alava (Org.), *Ciberespaço e formações abertas: rumo a novas práticas educacionais?* (pp.25-52). Porto Alegre: ArtMed.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp.11-34). Lisboa: APM.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, *10*(4), 313-340.

Urdaneta, S. C. D., González, J. L. P., & Castillo, A. D. V. D. (2017). Interpretação geométrica dos signos das razões trigonométricas com GeoGebra. *Amazônia (UFPA)*, *13*(28), 78-89.

Valente, A. (1993). Diferentes usos do computado na educação. *Em Aberto*, 12(57), 1-16.

Valente, A. (1997). O uso inteligente do computador na educação. *Pátio – revista pedagógica*, *1*(1), 19-21.

Vigotsky, L. S. (1991). *A formação social da mente*. São Paulo: Livraria Martins Fontes Editora Ltda.

Wood, D., Bruner, J. S. & Ross, G. The role of tutoring in problem solving. *Journal of child psychology & psychiatry & allied disciplines, 17*(2), 89–100.