

Idoneidad didáctica de procesos de estudios de la integral en la formación de profesores de Matemática

Edson Crisostomo

RESUMEN

En este trabajo se investiga la idoneidad didáctica del proceso de enseñanza y aprendizaje de la integral en el contexto de la formación de profesores de matemáticas en Brasil. El estudio está centrado en la dimensión epistémica de la idoneidad didáctica de dicho proceso. Consiste en una investigación cualitativa, desarrollada por medio de estudio de casos realizado con diez profesores-formadores, *experts* en la enseñanza universitaria del cálculo integral. En las conclusiones se pone de manifiesto las configuraciones epistémicas de la integral que emergen de los relatos de los profesores-formadores sobre el objeto de estudio.

Palabras-clave: Idoneidad Didáctica. Procesos de Estudio de la Integral. Formación de Profesores de Matemática. Profesores-Formadores.

Didactical suitability of the integral studies process in the training of Mathematics teachers

ABSTRACT

In this study we investigated the didactical suitability of the process of teaching and learning of the integral in the context of mathematics teachers training in Brazil. The study is centered on the epistemic component of didactical suitability of referred process. It consists of a qualitative investigation, developed through a case study carried out with ten teacher-educators, experts in the process of university teaching of integral calculus. In the conclusions we highlight the epistemic configurations of the integral that emerge from the reports of the teacher-educators on the object of study.

Keywords: Didactical Suitability. Integral Studies Processes. Training of Mathematics Teachers. Teacher-Educators.

INTRODUCCIÓN

El foco de interés de nuestra investigación es la formación de profesores de Matemáticas de los niveles de educación secundaria en el marco institucional de la Licenciatura en Matemática que se imparte en las universidades brasileñas. Nuestra actuación como formador de profesores nos ha llevado a reconocer la variedad y

Edson Crisostomo é Doutor em Educação Matemática pela Universidade de Granada (Espanha). Atualmente é professor da Universidade Estadual de Montes Claros. Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas. Departamento de Ciências Exatas. Av. Dr. Ruy Braga, s/n, Vila Mauriceia, 39401-089, Montes Claros/MG, Brasil.
E-mail: edson.crisostomo@unimontes.br
Recebido para publicação em 21/3/2017. Aceito, após revisão, em 25/4/2017.

complejidad de elementos que hay que tener en cuenta cuando pretendemos diseñar, implementar y evaluar planes de formación matemática y didáctica de la mayor calidad posible. Es necesario tener en cuenta los diversos planteamientos epistemológicos sobre la propia Matemática, las diversas teorías del aprendizaje (dimensión cognitivo-afectiva), los modelos instruccionales y la necesaria adaptación al contexto socio-profesional en el que tienen lugar los procesos formativos.

En consonancia con las investigaciones recientes realizadas sobre formación de profesores de Matemáticas, como se pone de manifiesto, por ejemplo, en los *Handbooks* dedicados al tema (WOOD, 2008; PONTE; CHAPMAN, 2008), y apoyados también en nuestra propia experiencia como formador, hemos optado por centrar la investigación en el campo del Pensamiento Matemático Avanzado, Didáctica del Cálculo, y más concretamente sobre el objeto matemático *integral*.

La elección de la integral como objeto matemático de investigación didáctica se justifica, además de por nuestra experiencia profesional, por la relevancia del mismo dentro de las Matemáticas y sus aplicaciones en otras áreas de conocimiento. Corroboramos con Koroupatov y Dreyfus al considerar que:

[...] ciertamente, no es posible imaginar la cultura científica moderna sin las integrales. Junto con la derivada, la integral forma el núcleo de un dominio matemático que es un lenguaje, un dispositivo, y una herramienta útil para otros campos como la física, la ingeniería, la economía, y la estadística. Además, el concepto de integral representa una idea filosófica para la comprensión del mundo: la contemplación de la totalidad de las partes pequeñas de un todo aporta conclusiones sobre el todo en su globalidad, así como sobre su estructura interna y propiedades. (2009, p.417)

Teniendo en cuenta la complejidad que suele existir en las investigaciones relacionadas con la formación de profesores de Matemáticas, así como la diversidad de enfoques y paradigmas de investigación, hemos optado por aplicar el *Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática* (EOS) (GODINO; BATANERO, 1998; GODINO, 2002; GODINO, BATANERO; FONT, 2007), más específicamente la noción de *idoneidad didáctica* de los procesos de estudio matemático nos ha atraído la atención por su potencialidad para articular las diversas facetas y componentes que caracterizan la complejidad de los procesos formativos en Educación Matemática. Resaltamos que existe considerable cantidad de investigaciones desarrolladas centradas en la noción de *idoneidad didáctica* en los distintos niveles de enseñanza. Una síntesis de dichas investigaciones ha sido realizada por Breda, Font y Lima (2015).

De este modo, hemos desarrollado una investigación más amplia (CRISOSTOMO, 2012), en la cual utilizamos de manera más operativa las seis dimensiones de la *idoneidad didáctica* que propone el EOS para analizar los procesos de estudio integral en el contexto de la formación de profesores de Matemáticas (epistémica, cognitiva, afectiva,

interaccional, mediacional y ecológica), teniendo en cuenta, además, los indicadores empíricos identificados para cada una de las idoneidades parciales. Sin embargo, este trabajo consiste en un recorte de dicha investigación en el cual realizamos un análisis de la dimensión epistémica de la *idoneidad didáctica* de la integral en el contexto de la formación de profesores de Matemáticas en Brasil. Para ello hemos basado en la experiencia profesional de los propios formadores, *experts* en la enseñanza del Cálculo en el contexto específico investigado.

Este trabajo se orienta hacia la sistematización de la componente epistémica de la idoneidad didáctica de los procesos formativos relacionados con la enseñanza del Cálculo Integral. La cuestión de investigación puede ser enunciada en los siguientes términos: ¿Qué significados de la integral emergen de las prácticas de los profesores-formadores y de las investigaciones didácticas relacionadas con los procesos de estudio de la integral en el contexto de la formación de profesores de Matemáticas de secundaria en Brasil? En la búsqueda de posibles respuestas a dicha cuestión se describen los resultados del análisis de uno de los componentes de dicha idoneidad didáctica realizado por medio de los relatos de diez profesores-formadores, doctores en Matemática o Educación Matemática, *experts* en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la integral en la enseñanza universitaria, que desarrollan sus actividades docentes e investigativas en distintas universidades públicas y privadas en Brasil. A continuación presentamos los fundamentos teóricos y metodológicos del estudio, idoneidad didáctica de procesos de estudio de la integral: componente epistémica, y las consideraciones finales.

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

De acuerdo con Godino, Batanero y Font (2007), los postulados o supuestos básicos del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS) se relacionan principalmente con la antropología, la ontología y la semiótica y articulan coherentemente supuestos socioculturales y psicológicos. En este sentido, la Matemática se concibe como una actividad humana, intencionalmente orientada a la solución de cierta clase de situaciones-problema, realizada en el seno de instituciones o comunidades de prácticas. De los sistemas de prácticas realizadas para resolver las situaciones-problema emergen dos categorías primarias de entidades: institucionales (sociales, relativamente objetivas) y personales (individuales o mentales). En el EOS se asume que la Matemática es un complejo de objetos culturales (institucionales), axiomática y deductivamente organizados y se atribuye un papel esencial al lenguaje (en sus diversas modalidades), que tiene una función no sólo representacional sino también instrumental o constitutiva de los objetos matemáticos.

Para hacer operativos estos principios el EOS propone como herramientas analíticas el par de nociones, “sistema de prácticas operativas y discursivas” y “configuración ontosemiótica”, ambas en la doble versión personal e institucional.

La descripción de los conocimientos matemáticos, en su doble versión, personal e institucional se realiza por medio de las herramientas teóricas sistemas de prácticas y

las configuraciones (didácticas, epistémicas, instruccional y cognitiva). Esas nociones teóricas se complementan con la noción de *idoneidad didáctica* (GODINO; BENCOMO; FONT; WILHELMI, 2007; GODINO; BATANERO; FONT, 2007; GODINO, 2013) de un proceso de instrucción que se define como la articulación coherente y sistémica de las seis componentes siguientes:

- *Idoneidad epistémica*, se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia.

- *Idoneidad cognitiva*, expresa el grado en que los significados pretendidos/ implementados estén en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/ implementados.

- *Idoneidad interaccional*. Un proceso de enseñanza-aprendizaje tendrá mayor idoneidad desde el punto de vista interaccional si las configuraciones y trayectorias didácticas permiten, por una parte, identificar conflictos semióticos potenciales, y por otra parte permitan resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción.

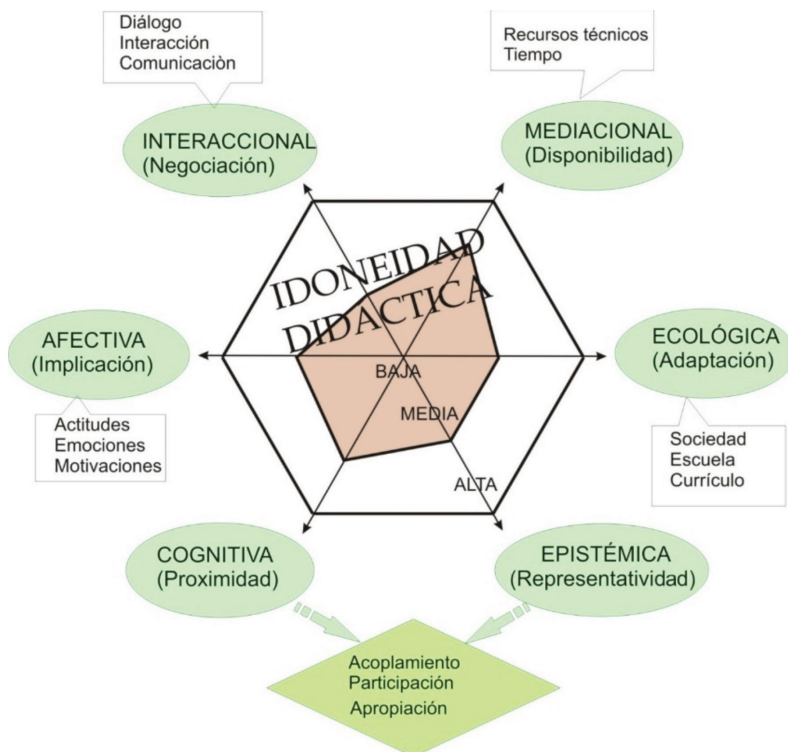
- *Idoneidad mediacional*, grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.

- *Idoneidad afectiva*, grado de implicación (interés, motivación, ...) del alumnado en el proceso de estudio. La idoneidad afectiva está relacionada tanto con factores que dependen de la institución como con factores que dependen básicamente del alumno y de su historia escolar previa.

- *Idoneidad ecológica*, grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla. (GODINO, 2013, p.116)

Estas idoneidades deben ser integradas teniendo en cuenta las interacciones entre las mismas, lo cual requiere hablar de la idoneidad didáctica como criterio sistémico de adecuación y pertinencia respecto del proyecto educativo global. Esta idoneidad se debe interpretar, no obstante, como relativa a unas circunstancias temporales y contextuales cambiantes, lo que requiere una actitud de reflexión e investigación por parte del profesor y demás agentes que comparten la responsabilidad del proyecto educativo. En la Figura 1 se presenta una síntesis de la idoneidad didáctica propuesta por el EOS.

FIGURA 1 – Síntesis de la idoneidad didáctica propuesta por el EOS.



Fuente: Godino (2013, p.116).

En la Figura 1, el hexágono regular representa la idoneidad correspondiente a un proceso de estudio, donde *a priori* se supone un grado máximo de las idoneidades parciales. En lo que se refiere a las idoneidades efectivamente logradas en la realización del proceso de estudio implementado, éstas serían representadas por medio del hexágono irregular interno. Las idoneidades epistémica y cognitiva han sido situadas en la base de la figura al considerar que el proceso de estudio gira alrededor del desarrollo de unos conocimientos específicos (GODINO, 2013).

METODOLOGÍA

El enfoque metodológico general de nuestra investigación es esencialmente cualitativo-interpretativo. Gall, Borg y Gall (1996, p.767) definen la investigación cualitativa como, “indagación que se basa en el supuesto de que los individuos construyen la realidad social en la forma de significados e interpretaciones, y que estas construcciones tienden a ser transitorias y situacionales. La metodología dominante consiste en descubrir estos significados e interpretaciones mediante el estudio de casos en profundidad”.

En este sentido, desarrollamos un estudio de casos centrado en los vínculos que se establecen entre la investigación y los procesos de estudio centrados en la integral, proponiendo una cooperación entre los conocimientos derivados de la investigación académica y los conocimientos derivados de la práctica profesional (RUTHVEN, 2002) de los profesores-formadores sobre la *idoneidad didáctica* de los procesos de estudio del Cálculo en el contexto sócio-profesional de la formación de profesores de Matemáticas en Brasil. Dicho estudio se ha llevado a cabo a través del análisis de las entrevistas semiestructuradas realizadas con los profesores-formadores y analizadas por medio de las herramientas teóricas desarrolladas por el EOS, especialmente en lo que se refiere a la noción de *idoneidad didáctica*.

IDONEIDAD DIDÁCTICA DE PROCESOS DE ESTUDIO DE LA INTEGRAL: COMPONENTE EPISTÉMICA

El análisis de la componente epistémica de la idoneidad didáctica de la integral en el contexto de la formación de profesores de Matemáticas en Brasil ha sido realizado por medio de las configuraciones epistémicas de la integral, sistematizadas a partir de los descriptores siguientes: situaciones-problema, procedimientos, proposiciones, lenguajes, definiciones, argumentaciones. A continuación analizamos cada descriptor y sistematizamos las configuraciones epistémicas de la integral a partir de las informaciones extraídas de los relatos de diez profesores-formadores, identificados en este estudio por P1 ... P10.

Las situaciones-problema asociadas a las distintas nociones de la integral

En consonancia con o EOS e teniendo en cuenta los relatos de los profesores-formadores, corroboramos con la posición de que se debe introducir y desarrollar las nociones de Cálculo en la enseñanza universitaria a partir de situaciones-problema. En este sentido sistematizamos, a continuación, las ocho configuraciones epistémicas de la integral.

La noción intuitiva de integral

En los relatos de los profesores-formadores hemos encontrado referencias a situaciones-problema, en las cuales no se utiliza explícitamente la noción de integral, de manera similar a algunos de los problemas resueltos por Arquímedes para introducir la integral en la enseñanza universitaria de Cálculo. La estrategia de recurrir a la noción intuitiva de la integral ha sido mencionada por P5, al considerar que “el profesor debe empezar con aquellas áreas que el alumno no conseguirá calcular por medio de la geometría euclidiana, sino utilizando el método de la exhaustión”.

En esta misma dirección, P3 defiende la utilización de situaciones-problema asociadas a la noción de área para introducir la integral. Según su afirmación:

Hay que empezar por las aplicaciones, por problemas. Por ejemplo, cómo se calcula un área bajo una curva. Si se tiene un rectángulo es fácil. Sin embargo, se debe analizar también el problema resuelto por Arquímedes referente al cálculo del área de un segmento parabólico, que es un problema de integración, y lo solucionó con una aproximación mediante áreas de triángulos. Él no hace como si fuera un límite. Usa la noción de límite. Lo mismo se puede hacer para hallar el área de un terreno cualquiera, es decir, se puede aproximar a partir de las áreas de los distintos triángulos y esto el estudiante lo entiende.

Las opiniones manifestadas por P3 y P5 son ejemplos de la relevancia que ha sido dada por los profesores-formadores a la noción intuitiva para introducir la integral. Asimismo, hemos encontrado estudios que contemplan la utilización de la idea intuitiva de la integral para desarrollar la integración (SCUCUGLIA, 2006). En nuestro estudio, hemos ubicado las situaciones-problema que se resuelve por medio de los métodos intuitivos de integración en la *configuración epistémica intuitiva* de la integral.

La noción geométrica de la integral

Las situaciones-problema consideradas, por la mayoría de los profesores-formadores, como más apropiadas para la introducción de la integral en la enseñanza universitaria de Cálculo están relacionadas con la noción de área de figuras planas, resaltándose aquellas que no pueden ser determinadas por medio de la utilización de los procedimientos de la Geometría Euclidiana. En este sentido, P6 ha afirmado que siempre ha introducido la integral en la enseñanza universitaria a partir de problemas de área, considerando que “para abordar el área, considero la función positiva. A partir de ello puedo generalizar la integral para una función cualquiera. Sin embargo, la integral se aplica a muchas otras situaciones”.

Por otra parte, P4 ha resaltado la importancia de recurrir a la Historia de las Matemáticas para identificar las situaciones-problema más adecuadas para introducir y desarrollar los distintos temas de Cálculo. En este caso, ha explicitado que los problemas de tangentes y áreas han motivado la construcción del Cálculo y por lo tanto considera que la noción de área es la más utilizada por los estudiantes como significado de la integral.

Por lo que hemos analizado a partir de los relatos de los profesores-formadores, la noción de área está íntimamente ligada al concepto de integral. Esto puede estar relacionado al propio desarrollo histórico del referido concepto y a su utilización tanto por los profesores como para los estudiantes. En la literatura específica hay diversos trabajos referentes al desarrollo de la integración como el área (CABAÑAS; CANTORAL, 2007; CAMACHO; DEPOOL; GARBÍN, 2008). En este sentido, P3 resalta que seguramente

se puede desarrollar la integral a partir del área, pues “la idea de la integración surgió de este tipo de problema”. En su relato P4 resaltó que según el punto de vista de los estudiantes, el significado de integral como área es lo más utilizado en su proceso de estudio, afirmando que “mirar la integral como área, ayuda más a iniciar la parte de integral y ligar al significado que él posee, que simplemente empezar por la abstracción, por la parte numérica”. Las situaciones-problema relacionadas con la determinación de áreas y con otros conceptos geométricos como volúmenes, longitud de curvas etc., las hemos situado en la *configuración epistémica geométrica*.

La noción de integral aplicada a situaciones-problema extramatemáticas

Las situaciones-problema no geométricas, en las cuales se aplica la noción de integral para resolverlas, en nuestro estudio están contempladas en la *configuración epistémica extramatemática* de la integral. Entre las investigaciones relacionadas con la integral de problemas extramatemáticos, destacamos los estudios de Camacho, Depool y Garbín (2008). Así, en la referida configuración se incluye una gama de situaciones-problema tanto del campo específico de las Matemáticas como de otras ramas de las ciencias. Trataremos de sintetizar las principales situaciones-problema de esta configuración mencionadas en los relatos de los profesores-formadores.

Al reflexionar sobre el rol de la noción de área en el desarrollo de la integral, P1 ha considerado que la referida noción contribuye solamente con la visualización geométrica de las distintas situaciones-problema relacionadas con la integral y afirma que posteriormente lo que se utiliza es la integral como el límite de las sumas de Riemann para aplicarla en las situaciones-problema de la Física, Biología, Economía, etc. Según ha relatado P1:

El problema del área es solamente para tener una visualización geométrica de una integral, pero la integral es el límite de una suma de Riemann y esto traerá la noción de trabajo en física – mecánica –, luego puede dar el teorema de conservación de energía, electricidad, magnetismo y las aplicaciones en otras áreas (economía, biología etc.).

P7 resalta la importancia de la interdisciplinaridad en el proceso de estudio del Cálculo. No obstante, P7 opina que lo más importante no es que el profesor de Cálculo domine bien las disciplinas extramatemáticas con las cuales está relacionado el problema, sino que pueda entenderlo matemáticamente. En este sentido, considera la resolución de problemas como una vía adecuada para introducir la integral.

La integral como acumulación

Además de la utilización de proyectos específicos en el proceso de estudio de la integral, la noción de crecimiento acumulado se presenta como una alternativa plausible para superar obstáculos relacionados con la asociación de la noción de integral con la de área por parte de algunos estudiantes universitarios y llegar a su generalización. Dicho planteamiento ha sido llevado a cabo por P2, que ha relatado haber obtenido resultados muy satisfactorios en la enseñanza de la integral en el nivel universitario.

En este sentido, Kouropatov y Dreyfus (2009) postulan que “la idea de integral emergió y se desarrolló a partir de la Física, a través de la búsqueda de una herramienta matemática que posibilitase describir, analizar y explicar fenómenos físicos como movimiento, masa y trabajo” (p.427). Asimismo, los autores consideran que la comprensión mutua de la relación entre la acumulación y su razón de cambio puede ayudar a los estudiantes a interpretar satisfactoriamente la relación entre los conceptos de derivada e integral. De esta manera, considerar la integral como acumulación posibilita entender el área como un caso particular de la integral definida y, consecuentemente, admitir tanto la acumulación de cantidades positivas como negativas. Hay diversos estudios que corroboran esta posición de desarrollar la integración a partir de la idea de acumulación (TALL, 1996; THOMPSON; SILVERMAN, 2007; CONTRERAS, ORDÓÑEZ y WILHELMI, 2010). Consideramos, en el contexto de esta investigación, la *configuración epistémica acumulada* como uno de los significados parciales de la integral.

La integral como primitiva

Podemos encontrar en los relatos de la mayoría de los entrevistados, referencias a la integral como la primitiva (o antiderivada) de una función (P1, P2, P4, P6, P8, P9, P10). Asimismo, P5 y P7 han hecho referencias implícitas a la primitivación. La excepción ha sido P3, que no ha mencionado esta configuración y considera que la resolución específica de las integrales debe realizarse a través de “Sistemas de Computación Algebraica” (CAS). Esta es la noción central del Cálculo, pues permite entender la integración como proceso inverso de la derivación. Consiste en el significado más utilizado para la determinación de primitiva de una función (integral indefinida), así como también en la utilización de dicha primitiva para resolver una diversidad de situaciones-problema matemáticas y extramatemáticas relacionadas con las aplicaciones de la integral definida. Sin embargo, entendemos que esta noción suele desarrollarse en las clases del curso introductorio de Cálculo en la Licenciatura en Matemática en Brasil de manera algorítmica y algebraica (ARTIGUE, 1991) utilizándose tablas y métodos de integración desvinculados de la noción de límite. En este contexto planteamos la *configuración epistémica primitiva* de la integral.

La integral como aproximación

La integral definida de las funciones cuyas primitivas son difíciles de obtener, o cuando éstas no existen han sido abordadas por P1 y P3. En este sentido:

El profesor de matemáticas tiene que trabajar con las aproximaciones. Las figuras existentes en la naturaleza no son perfectas. Es imprescindible hacer las aproximaciones. Una de las maneras de hacerlo es por medio del “trabajo de campo”. Por ejemplo, ¿Cómo el trabajador rural encuentra el área del terreno que él está trabajando para saber cuánto cobrar al propietario?, ¿Cómo él calcula el volumen de la madera? Ellos lo hacen encontrando una media a partir de los trozos de madera. Hay muchas Matemáticas en este proceso. Matemáticas transmitidas de padre a hijo. Es antropológica. Todo esto está ligado a la noción de área y a su vez, puede ser progresivamente elaborada hasta llegar a la noción de integral a partir de aproximaciones. (P3)

Hemos encontrado investigaciones relacionadas con la noción de la integral como aproximación (TALL, 1996). Sin embargo, estamos utilizando la noción de integral aproximada para dos clases de situaciones-problema en las cuales es imposible hallar el valor exacto de una integral definida. La primera se refiere a aquellas situaciones en las que se requiere “conocer” la antiderivada de la función, pero ésta es difícil, o incluso imposible de hallar; la segunda situación está asociada a una función para la cual no se puede encontrar una fórmula para las funciones determinadas a partir de algunos experimentos científicos a través de lectura de instrumentos o recogida de datos.

La integral como el límite de las sumas de Riemann

Por tratarse de la definición más usual de la integral (Integral de Cauchy-Riemann) para los cursos introductorios de Cálculo en la enseñanza universitaria, esta noción ha sido referida por todos los profesores-formadores entrevistados, con excepción de P5. Las situaciones-problema que se presentan en esta configuración son bastante diversificadas y están relacionadas con situaciones matemáticas o extramatemáticas. Sin embargo, se suele introducir la integral por medio de las sumas de Riemann, pero luego se prescinde de esta definición en las aplicaciones de la integral en la resolución de situaciones-problema. En la opinión de P1, se utiliza la noción de área como motivación para introducir la integral en los cursos introductorios de Cálculo, pero el abordaje de la integral a partir de su definición como el límite de las sumas de Riemann debe ser contemplada en el posterior curso de Análisis Matemático.

Hemos encontrado diversos estudios relacionados con la integral definida en el sentido de la integral de Cauchy-Riemann (SCUCUGLIA, 2006; CONTRERAS; ORDÓÑEZ, 2006). Esta noción de la integral como el límite de una suma de Riemann consiste, en nuestra investigación, en la *configuración epistémica sumatoria* de la integral.

La noción de integral aplicada a situaciones-problema que requieren la utilización de tecnologías

La utilización de los recursos tecnológicos, especialmente de los *softwares* específicos en las situaciones-problema relacionadas con la integración ha sido defendida por los profesores-formadores P2, P3, P4, P7, P8 y P9. Según la afirmación de P3 el estudiante “deberá saber cuál será el resultado aproximado, si su resultado es coherente. No se debe perder mucho tiempo con las técnicas; es suficiente abordarlas más superficialmente; los cálculos de la integral deben ser realizados por el ordenador”.

Una reflexión interesante sobre el rol del ordenador en el desarrollo del proceso de estudio de la integral ha sido realizada por P2. Encontramos, además, en los relatos de las experiencias de éxito de los profesores-formadores la convergencia de prácticas realizadas con la utilización de las tecnologías. La literatura específica también revela una gran cantidad de estudios relacionados con la utilización de las tecnologías en el proceso de estudio de la integral (TALL, 1996, 2009; SCUCUGLIA, 2006; CAMACHO; DEPOOL; GARBÍN, 2008), centradas especialmente en la utilización de los sistemas algebraicos computacionales (CAS). Cabe al docente analizar las potencialidades de los *softwares* de Geometría Dinámica en el desarrollo del proceso de estudio de la integral, así como la visualización, considerando que “cuando una figura dinámica es arrastrada, los estudiantes pueden verla cambiando y ver lo que sucede, por lo que las propiedades se tornarán evidente y luego pueden ser vistas inmediatamente por los estudiantes” (RUTHVEN, 2007, p.56).

Lo anterior nos ha llevado a plantear la *configuración epistémica tecnológica* de la integral como uno de los significados actualmente atribuidos para esta noción matemática en el contexto de la enseñanza universitaria del Cálculo. Es muy frecuente la proposición de cuestiones en los libros de Cálculo con la indicación de que se debe utilizar los recursos tecnológicos para solucionarlas o el abordaje de los contenidos por medio de proyectos que requieren recursos tecnológicos. En este sentido, las situaciones-problemas suelen cambiar como consecuencia de la utilización de las herramientas disponibles en los recursos tecnológicos pueden posibilitar abordar con los estudiantes “[...] problemas más complejos, menos usuales, más interesantes y ricos desde la perspectiva del aprendizaje [...]” (ALLEVATO; ONUCHIC, 2010, p.206).

Sintetizamos, a continuación, los principales aspectos relatados por los profesores-formadores sobre los procedimientos, proposiciones, definiciones, lenguajes, y argumentos relacionados al proceso de estudio de la integral.

Los procedimientos en el proceso de estudio de la integral

Entre los procedimientos más utilizados en la enseñanza de la integral está la primitivación, en los casos en que se conoce la primitiva de la función o en los que se trata de una función cuya primitiva puede ser obtenida de manera relativamente sencilla (P1, P2, P3, P4, P6, P7).

Los métodos numéricos (Sumas de Riemann, Regla de Simpson, etc.) e intuitivos también han sido mencionados por P1 y P3 como relevante para la determinación de la integral definida de las funciones cuyas primitivas son difíciles de obtener, o éstas no existen. En procedimiento general consiste en la utilización de aproximaciones.

La utilización de la estrategia general de resolución de problemas intramatemáticos y extramatemáticos para las situaciones relacionadas con la integral ha sido resaltada por P3 y P7, mientras P2 ha declarado su opción por la idea de crecimiento acumulado para dicha finalidad. Además, P3 ha resaltado que la necesidad de adecuación de ciertos problemas a los distintos niveles de enseñanza se produce por medio del cambio del procedimiento que se utiliza en su resolución. Según su afirmación: “se puede proponer un mismo problema para los distintos niveles de enseñanza, cambiando los procedimientos para su solución”. En este sentido, hay diversos procedimientos que pueden ser utilizados para la resolución de las situaciones-problemas que requieren la utilización de la integración, tales como aproximaciones, primitivación y regla de Barrow, el límite de las sumas de Riemann, y otros que serán sintetizados a continuación.

El trabajo con proyectos fue destacado por P3, P8 y P9, los cuales consideran fundamental que los profesores pongan el énfasis en la modelización de los problemas generales que pueden ser resueltos por medio de la integración. Sin embargo, consideramos que dicha modelización se convierte en una de las principales dificultades que presentan los estudiantes cuando se les requiere la aplicación de la integral en la resolución de problemas. Es decir, pensar en una situación-problema y proponer un modelo para solucionarla a partir de una integral puede ser más complejo para los estudiantes que aplicar los procedimientos (o técnicas) necesarias para calcular la integral específica.

Otros procedimientos han sido mencionados por los profesores-formadores, entre los cuales se resaltan aquellos relacionados con: (a) la utilización de las técnicas de integración (P4, P5 y P6); (b) la utilización de la tabla de integral (P8 y P9); (c) la visualización a partir del conocimiento de propiedades de las funciones que se desea integrar (P2 y P10); y (d) la utilización de recursos computacionales (P2, P4, P7, P8 y P9). No obstante, P3 considera que el estudiante no necesita “no se debe perder mucho tiempo con las técnicas; es suficiente abordarlas más superficialmente; los cálculos de la integral deben ser realizados por el ordenador”.

Las proposiciones en el proceso de estudio de la integral

La proposición que ha sido citada por prácticamente todos los profesores-formadores ha sido *el Teorema Fundamental del Cálculo* (P1, P3, P4, P5, P6, P7, P8, P9 y P10). En lo que se refiere al *Teorema del Valor Medio*, éste ha sido resaltado solamente por P2 y P5. Entre las propiedades mencionadas por los entrevistados se encuentran: integral de una suma (P1, P2 y P4); producto de una constante por una integral (P2); desigualdades (P1); módulo de una integral (P1); propiedad distributiva (P3); propiedad relacionada con la simetría (P4 y P10) y la propiedad relacionada con la integral definida de cierta función en el intervalo cerrado $[a, a]$ que es igual a cero (P4).

Las definiciones relacionadas con la integral

Al abordar los conceptos o definiciones que se relacionan con la noción de integral, hemos obtenido contestaciones muy diversas por parte de los profesores-formadores. Inicialmente, los conocimientos algebraicos básicos (productos notables, fracciones algebraicas etc.) han sido mencionados por P1, P4 y P5 y otras nociones matemáticas elementales, tales como la geometría analítica y la trigonometría, han sido consideradas necesarias para el proceso de estudio de la integral por P1 y P5.

En la opinión de P2, las nociones de derivada y de tasa de acumulación son las principales en el proceso de estudio del Cálculo. Según ha expresado:

Curvas cuyas tangentes son dadas por determinadas expresiones que podemos obtenerlas por medio de las integrales indefinidas; en el caso de la integral definida tenemos áreas, volúmenes, etc., o sea, se refiere a las tasas de acumulación de manera general.

El concepto de derivada también fue considerado importante en el proceso de estudio de la integral por los profesores-formadores P3, P4, P5, P6 y P10; mientras el concepto de límite fue resaltado por P6, P8, P9 y P10; y, el de función por P3, P8, P9 y P10. Además, P3 ha hecho referencia a las nociones geométricas relacionadas con la medida. Y P4 consideró importante, entre otros conceptos, la noción de infinito.

Asimismo, una de las secuencias bastante utilizada en el proceso de enseñanza de la integral, la cual involucra los conceptos de derivadas, límites y de infinitesimal ha sido explicitada por P4 de la siguiente manera:

El primero y más inmediato es el concepto de la derivada, pues; si el estudiante va a aprender la integral, lo que generalmente se empieza con la antiderivada, seguramente tendrá dificultad si no sabe derivada, si no entiende el proceso de derivación difícilmente va a entender el de integración. Otro sería la propia “cuestión de infinitesimal”, que ya empieza un poco en el estudio de la derivada y que se convierte en algo más complejo cuando se plantea el paso al límite en el proceso de estudio de la integral, el alumno se “traga” todo pero no entiende bien esta cuestión. Él cree que es una cierta magia.

Sin embargo, P7 considera innecesario que los estudiantes sean dotados de otros conceptos matemáticos previos para que pueda desarrollar satisfactoriamente el estudio de la integral. En este sentido, ha opinado lo siguiente:

Tu pregunta me recuerda prerrequisitos, a mí no me gusta mucho. Podría decirte que el alumno necesita del concepto de función, de límite, etc. Yo creo que puedo

introducir el concepto de integral al alumno que nunca ha escuchado hablar de función.

Los lenguajes utilizados en la enseñanza de la integral

Al analizar los distintos lenguajes que se utilizan en la enseñanza universitaria del Cálculo Integral, encontramos que la mayoría de los profesores-formadores han hecho referencia al lenguaje algebraico (P1, P2, P4, P5, P6 y P7), geométrico (P1, P2, P3, P4, P5, P6 y P10) y gráfico (P1, P2, P4, P6, P7, P8 y P9). También han sido bastante resaltados los lenguajes tecnológico (P2, P3, P6, P8 y P9) y simbólico (P4, P6, P8, P9 y P10). Entretanto, las menciones a los lenguajes numérico (P3 y P10), natural (P6), analítico (P2) y tabular (P7) han sido menos frecuentes en los relatos de los entrevistados.

Los profesores-formadores han destacado la importancia de que los estudiantes realicen la transición entre los diferentes lenguajes durante el proceso de estudio de la integral. No obstante, ellos reconocen que dicha transición se convierte en uno de los obstáculos cognitivos que se presentan en el referido proceso.

Las distintas formas de lenguaje son utilizadas de manera explícita o implícita a lo largo del proceso de estudio de la integral, tanto por los docentes como por los estudiantes. Sin embargo, los profesores-formadores han resaltado la tendencia observada en sus estudiantes, relacionada a la subjetividad con la cual ellos eligen los lenguajes que usan con más frecuencia en su proceso de estudio de la integral. De esta manera, los entrevistados consideran apropiado que los estudiantes utilicen los lenguajes con los cuales poseen mejor desenvoltura.

La argumentación en el proceso de estudio del Cálculo Integral

El papel y los tipos de argumentación en el proceso de estudio de la integral, no ha sido consensual en la opinión de los profesores-formadores, los cuales han aclarado primeramente qué entienden por demostración para posteriormente manifestar su posición relativa a la demostración de las proposiciones relativas a la integral en el curso introductorio de Cálculo (Cálculo I) en la enseñanza universitaria (Licenciatura en Matemáticas). En este sentido, P10 ha resaltado la importancia de determinar:

Qué demostrar y para qué y también qué no demostrar y qué tipo de demostración. Para un alumno de la Licenciatura en Matemáticas, las ideas de una demostración en un primer momento, serían de aquella demostración menos rigurosa, más intuitiva, más informal. Esto es lo que a mí me parece importante [...]. Entonces, defendiendo que se realice demostraciones con el ordenador.

La mayoría de los profesores-formadores han coincidido en que la demostración de los teoremas y propiedades relativas a la integral, en el curso introductorio de Cálculo para

futuros profesores de matemáticas de la secundaria, debe realizarse de manera intuitiva, basada en la visualización (P1, P2, P5, P6, P8 y P10).

No obstante, también encontramos opiniones contrarias por parte de P3, P4 y P7. Para ellos, las referidas demostraciones deben ser axiomáticas, al menos en lo que se refiere al Teorema Fundamental del Cálculo. Por otra parte, P9 considera que debe haber una mezcla entre las dos posiciones. Así, las demostraciones deben ser axiomáticas en algunas de las etapas del proceso de estudio de la integral e intuitivas en otros.

Al contestar si las demostraciones de las proposiciones sobre la integral deben quedarse a cargo de los estudiantes de Cálculo I, P3 ha afirmado que:

Si fuesen capaces sería lo ideal (risa), pero ellos, generalmente no lo saben hacer. Sin embargo, pienso que sería bueno que los estudiantes demostrasen en la práctica, algunas propiedades más sencillas. Se debe tomar algunos casos particulares, utilizando una función elemental y comprobar algunos resultados (propiedades). Posteriormente, deben intentar generalizar tales resultados y pensar en las maneras de demostrarlas.

Por lo tanto, aunque algunos de los profesores-formadores hayan considerado que las demostraciones de las proposiciones relacionadas con la integral deben realizarse de manera axiomática, ellos deben tener en cuenta que posiblemente sus estudiantes no hayan desarrollado las competencias necesarias para esto. Quizás sea más apropiado formalizar las demostraciones en el curso de Análisis Matemático, como han sugerido algunos de los profesores-formadores.

CONSIDERACIONES FINALES

La noción de *idoneidad didáctica* desarrollada en el EOS está conformada por seis componentes o dimensiones: epistémica, cognitiva, mediacional, afectiva, interaccional y ecológica. En consonancia con la metodología cualitativa-interpretativa utilizada en esta investigación hemos desarrollado un estudio de casos en profundidad (GALL, BORG; GALL, 1996, p.767) con los profesores-formadores. El análisis de los casos, basada en dichas dimensiones, ha puesto de manifiesto los conocimientos que han emergido de los relatos de los entrevistados sobre los procesos de estudio de la integral.

Aunque en este artículo hemos desarrollado un abordaje parcial de la *idoneidad didáctica*, consideramos que la componente epistémica de la *idoneidad didáctica* de los procesos de estudio de la integral en el contexto especificado ha aportado resultados interesantes y se convierte en una herramienta potente para la caracterización del significado global de la integral a través de las configuraciones epistémicas. Dicho significado ha sido extraído tanto de los conocimientos profesionales puestos de manifiesto por medio de los relatos de los profesores-formadores (RUTHVEN, 2002; ZASLAVSKY; CHAPMAN; LEIKIN, 2003; JAWORSKI, 2008; CRISOSTOMO; GODINO, 2017)

como de las investigaciones académicas desarrolladas sobre o objeto de estudio de esta investigación. Esto nos permite considerar dichas configuraciones como el significado institucional de la integral puesto en juego en el proceso de estudio de la integral en el contexto socio-profesional de la formación de profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria en Brasil. La competencia para establecer las conexiones entre las distintas configuraciones epistémicas de la integral y utilizarlas en diferentes prácticas contribuye con la comprensión del concepto de integral por los estudiantes universitarios, lo que conlleva a tenerlas en cuenta en la planificación e implementación de un proceso de enseñanza significativa de la integral.

Corroboramos con Chapman (2008) en lo que se refiere a considerar que la propia práctica “puede constituirse en la base para el aprendizaje del profesor-formador” (p.117). Los conocimientos profesionales de los profesores-formadores que participaron de nuestra investigación relativos al objeto de estudio corresponden, en alto grado, con los resultados de los estudios realizados en Didáctica del Cálculo relacionados con la integral. Dichos conocimientos profesionales de los profesores-formadores son extremadamente relevantes para la identificación de criterios que posibiliten un coherente y adecuado análisis de la *idoneidad didáctica* del proceso de estudio de la integral en el contexto socio-profesional de la Licenciatura en Matemáticas en Brasil.

REFERENCIAS

- ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R.; JANH, A. P. O computador no ensino-aprendizagem-avaliação de matemática: reflexões sob a perspectiva de resolução de problemas. In: JHAN; A. P.; ALLEVATO, N. S. G. (Org.). *Tecnologia e educação matemática: ensino, aprendizagem e formação de professores*. Recife: SBEM, 2010, p.187-208.
- ARTIGUE, M. Analysis. In: TALL, D. (Ed.). *Advanced mathematical thinking*. Netherlands: Kluwer, A., 1991, p.167-198.
- BREDA, A.; FONT, V.; LIMA, V. M. R. A noção de idoneidade didática e seu uso na formação de professores de matemática. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*. São Paulo. v.8, n.2, 2015, p.1-41. DOI : 10.17921/2176-5634.2015v8n2p%25p.
- CABAÑAS, G.; CANTORAL, R. La integral definida: un enfoque socioepistemológico. In: DOLORES, C. et al. (Ed). *Matemática educativa: algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula*. México: Días de Santos, 2007, p.3-26.
- CAMACHO, M.; DEPOOL, R.; GARBÍN, S. Integral definida en diversos contextos: un estudio de casos. *Educación Matemática*, v.20, n.3, p.33-57, dez. 2008.
- CHAPMAN, O. Narratives in mathematics teacher education. In: TIROSCHE, D.; WOOD, T. (Ed.). *Tools and processes in mathematics teacher education*. Rotterdam: Sense Publishers, 2008, p.15-38.
- CONTRERAS, A.; ORDÓÑEZ, L. Complejidad ontosemiótica de un texto sobre la introducción a la integral definida. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa*, v.9, n.1, p.65-84, 2006.

CONTRERAS, A.; ORDÓÑEZ, L.; WILHELMI, M. Influencia de las pruebas de acceso a la universidad en la enseñanza de la integral definida en el bachillerato. *Enseñanza de las ciencias*, Institut de Ciències de l'Educació de la Universitat Autònoma de Barcelona. v.28, n.3, p.367-384, 2010.

CRISOSTOMO, E. *Idoneidad de procesos de estudio del cálculo integral en la formación de profesores de matemática: una aproximación desde la investigación didáctica del cálculo y el conocimiento profesional*. 2012. 546 f. Tese (Doctorado en Didáctica de la Matemática) – Programa de Doctorado en Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Granada, 2012.

CRISOSTOMO, E.; GODINO, J. D. Conhecimento profissional manifestado por professores-formadores sobre a idoneidade didática do processo de estudo do cálculo integral. In: CONTRERAS, J. M. *et al.* (Ed.). SEGUNDO CONGRESO INTERNACIONAL VIRTUAL SOBRE EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO DEL CONOCIMIENTO Y LA INSTRUCCIÓN MATEMÁTICOS. Univeridad de Granada. Granada, 2017. *Actas...* Disponible en: <enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html>.

GALL, M. D.; BORG, R. W.; GALL, M. P. *Educational Research*. 6.ed. White Plains, NY: Longman Publishers, 1996.

GODINO, J. D. Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuaderno de Investigación de las Matemáticas*. Costa Rica. Año 8, n.11, p.111-132, 2013.

GODINO, J. D. Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. v.22, n.2/3, p.237-284, 2002.

GODINO, J. D. ; BATANERO, C. Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. In: SIERPINSKA, A.; KILPATRICK, J. (Ed.). *Mathematics Education as a research domain: A search for identity*. Dordrecht: Kluwer, 1998, p.177-195.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*. v.39, n.1-2, p.127-135, 2007. DOI: 10.1007/s11858-006-0004-1.

GODINO, J. D.; BENCOMO, D.; FONT, V.; WILHELMI, M. R. Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*. v.27, n.2, p.221-252, 2007.

JAWORSKI, B. Development of the mathematics teacher educator and its relation to teaching development. In: JAWORSKI, B.; WOOD, T. (Ed.). *International handbook of mathematics teacher education*. The Mathematics Teacher Educator as a Development Professional Rotterdam. The Netherlands: Sense Publishers. v.4, p.335-361, 2008.

KOUROPATOV, A.; DREYFUS, T. Integrals as accumulation: a didactical perspective for school mathematics. In TZEKAKI, M.; KALDRIMIDOU, M.; SAKONIDIS, H. (Ed.). 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Thessaloniki, Greece. *Proceedings...* PME.v.3, 2009, p.417-424.

PONTE, J. P.; CHAPMAN, O. Preservice mathematics teachers' knowledge and development. In: ENGLISH, L. D. (Ed.). *Handbook of international research in mathematics education*. New York: Routledge, 2008, p.223-261.

- RUTHVEN, K. Linking researching with teaching: Towards synergy of scholarly and craft knowledge. In: ENGLISH, L. D.; BARTOLINI-BUSI, M.; JONES, G. A.; LESH, R.; TIROSHM, D. *Handbook of International research in mathematics education*. London: Lawrence Erlbaum Ass., 2002, p.581-598.
- RUTHVEN, K. Teachers, technologies and the structures of schooling. In: PITTA-PANTAZI, D.; PHILIPPOU, G. (Ed.). THE FIFTH CONGRESS OF THE EUROPEAN SOCIETY FOR RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION. CERME 5, Larnaca, Cyprus, 2007. *Proceedings...* p.52-67.
- SCUCUGLIA, R. *A investigação do Teorema Fundamental do Cálculo com calculadora gráfica*. 2006. 146f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Universidade Estadual Paulista. Rio Claro.
- TALL, D. *Dynamic mathematics and the blending of knowledge structures in the calculus*. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*. v.41, n.4, p.481-292, 2009. DOI: 10.1007/s11858-009-0192-6
- TALL, D. Functions and calculus. In BISHOP, A. et al. (Ed.). *International Handbook of Mathematics Education*. Netherland: Kluwer, 1996, p.289-325.
- THOMPSON, P. W.; SILVERMAN, J. The Concept of accumulation in calculus. In: CARLSON, M.; RASMUSSEN, C. (Ed.). *Making the connection: research and teaching in undergraduate mathematics*. Washington: Mathematical Association of America, 2007, p.117-131.
- WOOD, T. (Ed.). *The international handbook of mathematics teacher education*. Rotterdam: Sense Publishers, 2008.
- ZASLAVSKY, O.; CHAPMAN, O.; LEIKIN, R. Professional development of mathematics educators: Trends and tasks. In: BISHOP, A. et al. (Ed.). *Second International Handbook of Mathematics Education*. Dordrecht, the Netherlands: Kluwer, 2003, p.877-917.