

A Engenharia Didática em articulação com a Teoria das Situações Didáticas como percurso metodológico ao estudo e ensino de Matemática

Arlem Atanzio dos Santos
Francisco Régis Vieira Alves

RESUMO

Neste artigo, apresentamos as duas primeiras etapas de organização de nossa pesquisa de Mestrado Acadêmico no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PGECM) do Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE). Assim, referendados pelas orientações da Engenharia Didática (ED) como metodologia de pesquisa, em associação com a Teoria das Situações Didáticas (TSD), como metodologia de ensino, realizamos, inicialmente, uma análise prévia, caracterizada pela análise didática e epistemológica, do objeto histórico-matemático em estudo, a sequência de Fibonacci (SF), caracterizando a identificação e descrição de algumas propriedades do seu processo de generalização e extensão. Fundamentados nas propriedades elencadas, definimos, nas fases de concepção e análise a priori, os contextos, objetivos e as hipóteses didáticas, bem como, orientados pelas etapas da TSD, apresentamos os possíveis comportamentos e resoluções dos alunos das quatro situações problemas, organizadas com fins à experimentação.

Palavras-chave: Engenharia Didática. Teoria das Situações Didáticas. Sequência de Fibonacci.

The Didactic Engineering in articulation with the Theory of Didactic Situations as methodological path to the study and teaching of Mathematics

ABSTRACT

In this article, we present the first two steps of organizing our Master's Degree research in the Graduate Program in Teaching Science and Mathematics (PGECM), Federal Institute of Education Science and Technology of Ceará (IFCE). Thus, supported by the guidelines of didactic engineering (ED) as research methodology, in association with the Theory of Didactic Situations

Arlem Atanzio dos Santos é Especialista em Ensino de Matemática pela UECE/CE. Atualmente, é Mestrando do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará (PGECM/IFCE). Endereço para correspondência, Rua Manoel Bindá, 555, Distrito de Caponga, Cascavel/CE. E-mail: arlem_mat@yahoo.com.br

Francisco Régis Vieira Alves é Doutor em Educação pela Universidade Federal do Ceará/UFC. Atualmente, é Coordenador e Professor do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PGECM/IFCE). Endereço para correspondência, Rua Clóvis Bevilacqua, 100, Bairro Edson Queiroz, Fortaleza/CE. E-mail: fregis@ifce.edu.br

Recebido para publicação em 21/11/2016. Aceito, após revisão, em 10/7/2017.

Acta Scientiae	Canoas	v.19	n.3	p.447-465	maio/jun. 2017
----------------	--------	------	-----	-----------	----------------

(TSD), as teaching methodology, we performed a preliminary analysis, characterized by didactic and epistemological analysis, of the mathematical, historical object under study, the Fibonacci sequence (SF), characterizing the identification and description of some properties of its process of generalization and extension. Based on the properties listed, we define contexts, objectives, and didactic hypotheses in the a priori conception and analysis phases, as well as, guided by the stages of the TSD, we present the possible behaviors and solutions of the students for the four situation-problems, organized with the purpose of experimentation.

Keywords: Didactic Engineering. Theory of Didactic Situations. Fibonacci sequence.

INTRODUÇÃO

Neste estudo, trazemos uma discussão sobre a associação entre duas teorias da didática da matemática, a Engenharia Didática (ED) e a Teoria das Situações Didáticas (TSD), referenciais bastante difundidos como metodologias da pesquisa e ensino em matemática.

Assim, evidenciaremos, durante a discussão, as relações e implicações práticas dessa integração entre a ED e a TSD. No intuito de demonstrar essa conexão, mostraremos o percurso metodológico seguido durante a execução das primeiras etapas de elaboração de nossa pesquisa de Mestrado Acadêmico do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PGECM) do Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE), etapas caracterizadas como de fundamentação teórica e organização da experimentação.

Com isto, iniciaremos apresentando os elementos relativos à problematização da pesquisa, destacando as leituras dos estudos de Alves e Borges Neto (2010) e de Alves, Borges Neto e Maia (2012), referências em que os autores mostram suas concepções relativas a qual abordagem de estudo, com vias ao ensino, de determinado tópico do contexto histórico matemático, podemos seguir e nos orientar.

Sobre tais concepções, Alves, Borges Neto e Maia (2012) exprimem suas concepções relacionadas ao estudo de determinado tópico do contexto histórico matemático, assinalando que este deve ser pautado em seus aspectos históricos, epistemológicos, formais e filosóficos.

Noutro estudo, Alves e Borges Neto (2010) apresentam suas concepções relativas ao ensino de determinado tópico histórico matemático, ressaltando que sua abordagem de ensino deve ser estruturada de maneira a possibilitar suas relações a outros conceitos e contextos matemáticos.

Fundamentados nas orientações anteriores, suscitamos nossa proposta de pesquisa numa perspectiva semelhante às concepções dos estudos de Alves e Borges Neto (2010, 2011) e de Alves (2013, 2015a, 2015b, 2016a, 2016b), trabalhos que discutem um conjunto de propriedades relacionadas ao processo de generalização e extensão da sequência de Fibonacci.

Assim, pretendemos ampliar a discussão dos autores, no sentido de realizarmos um estudo, com vias ao ensino, de outras propriedades relacionadas ao processo

de generalização da sequência de Fibonacci, fundados nos aspectos, históricos, epistemológicos e matemáticos.

Desse modo, levantamos a seguinte questão: *como desenvolver um estudo sobre o processo de generalização da sequência de Fibonacci que promova situações didáticas envolvendo a identificação, descrição e exploração de propriedades do seu modelo generalizado?*

A fim de termos condições de apresentar uma resposta, ao menos parcial, à questão levantada, traçamos o seguinte objetivo geral: *descrever elementos de um estudo relativo aos modelos de generalização da sequência de Fibonacci que promovam a identificação, descrição e exploração de propriedades relativas a estes modelos.*

No intuito de alcançarmos o objetivo geral, apresentamos os seguintes objetivos específicos: i) *analisar o desenvolvimento histórico-matemático-epistemológico de generalização da SF*; ii) *analisar o desenvolvimento histórico-matemático-epistemológico da fórmula de Binet*; iii) *descrever situações didáticas envolvendo o modelo de generalização da sequência de Fibonacci.*

Iniciaremos a discussão destacando a Engenharia Didática (ED) como metodologia de pesquisa e, em seguida, discutindo suas orientações, de acordo com cada uma de suas etapas.

A ENGENHARIA DIDÁTICA

Como metodologia de pesquisa, a Engenharia Didática tem por princípio valorizar as práticas e experiências do professor, percebendo-o como um pesquisador em potencial, podendo “ser utilizada em pesquisas que estudam os processos de ensino e aprendizagem de um dado objeto matemático e, em particular, a elaboração de gêneses artificiais para um dado conceito” (ALMOULOU, 2007, p.171).

Desse modo, o professor deve considerar que sua “prática de ensino é articulada como prática de investigação. A teoria da Engenharia Didática pode ser vista como referencial para o desenvolvimento de produtos para o ensino, gerados da junção do conhecimento prático com teórico” (CARNEIRO, 2005, p.3).

Como ressalta Pais (2002), ao planejamento e execução de uma ED, o professor deve seguir quatro fases consecutivas, sendo estas: análises prévias (preliminares); construção das situações (concepção) e análise a priori; experimentação (aplicação da situação didática); análise a posteriori; avaliação (validação). A seguir, destacaremos cada dessas fases, com suas respectivas orientações.

Análises preliminares: consiste da análise de como o conteúdo está sendo ensinado, a fim de propormos intervenções e modificações. Nesta análise, devemos incluir três dimensões: *epistemológica*, relacionada com o saber em estudo, podendo ser observada sua evolução histórica, os obstáculos relativos à sua natureza, dentre outros aspectos; *didática*, relativa à forma como o conteúdo é apresentado nos livros didáticos, como

proposta de ensino ao professor; *cognitiva*, caracterizada pela análise de questões relativas aos conhecimentos dos alunos sobre a temática de estudo.

Análise a priori e concepção: etapa de descrição das escolhas realizadas, onde são definidas algumas variáveis (globais e locais), a fim de direcionar a pesquisa e propor um plano de ação. As variáveis globais têm por finalidade direcionar as escolhas da pesquisa, enquanto que as variáveis locais são direcionadas à previsão dos possíveis comportamentos e entres dos alunos, mediante as situações didáticas.

Experimentação: etapa de aplicação das situações didáticas e coleta dos dados relativos à pesquisa. Nesta coleta, podemos fazer uso de vários instrumentais, tais como relatórios, registros fotográficos, produções dos alunos, entrevistas, dentre outros recursos, a fim de formarmos o *corpus da pesquisa*.

Análise a posteriori: etapa caracterizada pela devida organização do *corpus da pesquisa*, a fim de uma avaliação posterior.

Validação da Engenharia: mediante o confronto das considerações da análise a priori e das observações da experimentação, temos elementos para realizar uma análise sobre a reprodutividade ou não da engenharia proposta, além de levantarmos possíveis questionamentos, voltados a futuras pesquisas.

Dando continuidade, apresentaremos fundamentados na ED, os resultados de nosso levantamento e discussão bibliográfica, de acordo com a primeira etapa da ED, as *análises preliminares*.

ANÁLISES DA DIMENSÃO DIDÁTICA E EPISTEMOLÓGICA

Como assinala a ED, esta etapa consiste na análise de como o conteúdo está sendo ensinado, a fim de detectarmos os problemas e propormos intervenções e/ou modificações. Nesta análise, devemos considerar as seguintes dimensões: didática, epistemológica e cognitiva.

Na *dimensão didática*, observamos a abordagem dada à sequência de Fibonacci nos livros de História da Matemática (HM) como proposta de ensino ao professor. Nesse sentido, preliminarmente, realizamos um levantamento bibliográfico em livros de HM que trouxessem elementos relativos à evolução histórica, epistemológica e matemática dos modelos de generalização da sequência de Fibonacci.

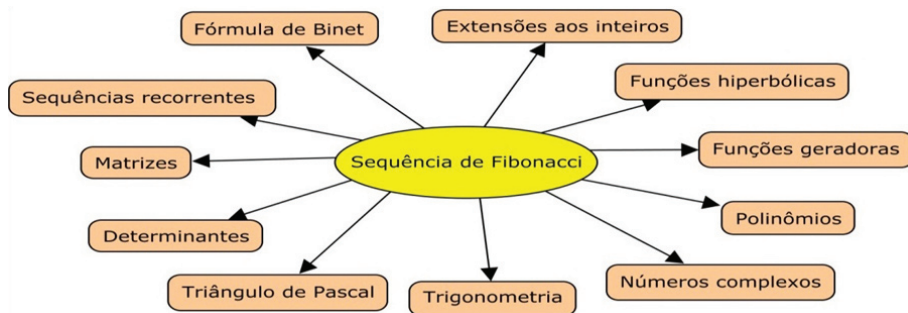
Desse levantamento, destacamos os seguintes estudos: Lívio (2002), Stillwell (1989), Wells (2005), Alfred (1965), Brousseau (1967), Hoggat (1969), Posamantier e Lehmann (2007), Huntley (1985), Koshy (2011), Vorobiov (1974), Grimaldi (2012) e Sthakov (2009).

Sobre a análise realizada das referências histórico-matemáticas anteriores, salientamos que esta nos permitiu a caracterização de aspectos além dos históricos,

relativos à sequência de Fibonacci; ou seja, fomos além da caracterização dos personagens ligados, a sua origem e evolução e tratamos de uma discussão de elementos de caráter mais específico, no caso, a matemática associada à SF.

Na *dimensão epistemológica*, observamos os aspectos relativos à evolução histórica do conteúdo, bem como suas relações em outros contextos matemáticos. Nesse sentido, vale destacar que tratamos de propriedades elementares da sequência de Fibonacci e que tal estudo nos permitiu suscitar uma gama de relações entre a sequência de Fibonacci e outros conteúdos matemáticos. Caracterizamos essas relações na Figura 1.

FIGURA 1 – Relações entre a sequência de Fibonacci e outros conteúdos matemáticos.



Fonte: elaborado pelos autores.

Sobre as relações conceituais observadas na Figura 1, destacamos que estas perpassam por conteúdos, tanto do nível básico quanto superior, sendo estes perfeitamente discutíveis num contexto de graduação. Destacamos, também, que tal processo de generalização e extensão da sequência de Fibonacci a outros contextos matemáticos evidencia sua evolução epistemológica e matemática progressiva.

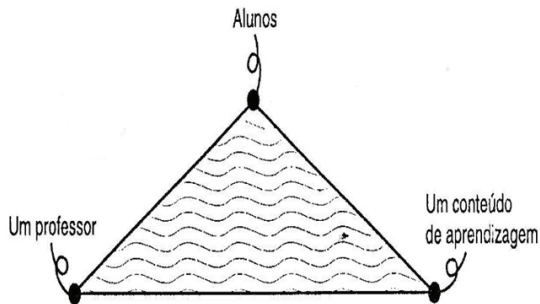
Na etapa seguinte, antes de apresentarmos como a ED e a TSD podem ser integradas, trazemos, a seguir, as orientações da TSD relativas aos momentos de organização e aplicação das situações problemas direcionados à experimentação.

TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

Sobre Teoria das Situações Didáticas, como metodologia de ensino, Teixeira e Passos (2013) ressaltam que esta tem, como objeto principal, a situação didática, sendo esta um conjunto de situações reproduzíveis que permitem a organização do espaço de sala de aula e dos momentos de interação entre o professor, o aluno e o saber, no meio organizado (*milieu*).

Em seu estudo, Souza e Lima (2014) apontam que as relações estabelecidas entre professor-aluno-saber podem ser representadas no que denominam de triângulo didático, como mostramos na Figura 2.

FIGURA 2 – Triângulo didático das relações entre professor-aluno-saber.



Fonte: Joannert (2002 apud SOUZA; LIMA, 2014, p.35).

As relações entre professor-saber, saber-aluno e professor-aluno são estabelecidas no triângulo, a partir de seus vértices, sendo estas assimétricas e conflituosas. Portanto, “docentes e discentes são atores indispensáveis da relação de ensino e aprendizagem, bem como o meio (*milieu*) em que a situação didática se faz presente” (TEIXEIRA; PASSOS, 2013, p.157).

Desse modo, Teixeira e Passos (2013) assinalam que deve existir uma preocupação do professor com as condições de apresentação de determinados conteúdos matemáticos, e uma clara intenção em possibilitar aprendizagem. Sobre as situações didáticas, Brousseau ressalta que:

[...] devem ser concebidas de maneira a provocar o aparecimento dos conhecimentos que os alunos trazem, em respostas, espontâneas ou não, e em condições apropriadas. Elas devem ser, porém, sem nenhuma relação visível para o aluno, com uma intenção didática desejada e sem qualquer intenção complementar. (BROUSSEAU apud TEIXEIRA; PASSOS, 2013 p.162)

Dos destaques anteriores, observamos um conjunto de orientações de cunho metodológico que a TSD nos apresenta. Até mesmo por ser este um dos seus objetivos, o de fornecer “mecanismos que propiciem a melhora nos processos de ensino aprendizagem em matemática e envolvam, em sala de aula e fora dela, o professor, o aluno e o saber – o conhecimento do conteúdo matemático” (TEIXEIRA; PASSOS, 2013, p.164).

Nesse sentido, apresentaremos o que Teixeira e Passos (2013) elencam como as principais atividades específicas voltadas a aprendizagem em matemática, classificando-as

em situações (momentos) de devolução, ação, formulação, validação e institucionalização, que destacaremos, a seguir.

Situação de Devolução: momento em que o professor cede a responsabilidade ao aluno por sua aprendizagem e este tem que entrar no jogo e assumir os riscos por seus atos. Nesse sentido, o professor propõe o problema ao aluno e este deve ter condições de agir sobre ele; o aluno vê o problema como um desafio.

Situação de Ação: nesta etapa, cabe ao aluno, de posse do problema, buscar em seus conhecimentos, interagindo com o meio, elementos necessários à solução da situação proposta que se processa por meio de reflexões e tentativas, a fim da obtenção de uma estratégia de resolução.

Situação de Formulação: caracterizada pela troca de informações entre o aluno e o meio organizado. Neste momento, já se permite a utilização de uma linguagem adequada, mas sem formalidade obrigatória, ou seja, existe uma organização de informações para torná-las comunicáveis.

Situação de Validação: fase de convencimento dos interlocutores sobre a veracidade, ou não, dos argumentos apresentados à solução do problema, Neste ponto, já se deve utilizar uma linguagem mais formalizada e mecanismos de prova.

Situação de Institucionalização: etapa em que a intenção do professor, tendo com meio o problema proposto, é revelada.

Prosseguindo, apresentaremos a possibilidade de articulação entre a ED e a TSD, destacando, com base no levantamento discutido nas análises preliminares da ED, o estudo de algumas das propriedades elencadas, através da elaboração de situações-problema, de acordo com as orientações da TSD, e direcionadas à futura experimentação.

ORGANIZAÇÃO DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

Segundo as orientações da ED, esta etapa é de descrição das escolhas realizadas, onde são definidas algumas variáveis, a fim de propormos e direcionarmos um plano de ação, de acordo com os objetivos da pesquisa. Desse modo, como tínhamos por interesse a exploração de algumas das propriedades elencadas, elaboramos quatro situações didáticas, referendadas nas relações estabelecidas, anteriormente.

Assim, na elaboração dessas situações realizamos uma ação descritiva e preditiva, no sentido de estabelecermos os possíveis comportamentos e resoluções dos alunos, de acordo com cada fase da TSD, além do levantamento de algumas *hipóteses didáticas* relativas às situações propostas, caracterizando uma análise preliminar da *dimensão cognitiva* dos alunos.

Ainda sobre as situações constituídas, é válido assinalar que estas discutem algumas propriedades do processo de generalização da sequência de Fibonacci, bem como sua relação a outros conteúdos da matemática. Como forma de exemplificarmos as

argumentações relativas à integração da TSD com a ED, mostraremos a seguir as quatro situações didáticas organizadas, com fins à experimentação, a partir das orientações nos momentos de ação, formulação, validação e institucionalização da TSD.

SITUAÇÃO 1 – OS COELHOS DE FIBONACCI

Contexto: a situação trata de dois modelos de generalização da sequência de Fibonacci: o de modelização do problema dos coelhos imortais e o de extensão da sequência de Fibonacci a índices inteiros. **Objetivo da atividade:** apresentar e discutir os modelos de generalização da sequência de Fibonacci relativos ao problema dos coelhos imortais e a sequência estendida de Fibonacci. **Hipótese didática:** os alunos devem ser capazes de estabelecer uma notação recursiva a partir da interpretação do problema dos coelhos, além de perceber a possibilidade de estendermos a sequência a índices inteiros.

CONTEXTO PROPOSTO

Trata-se do seguinte problema, proposto e resolvido por Leonardo de Pisa, em seu livro *Liber Abaci*, de 1202, proposto em latim como *Quot paria coniculorum in uno anno ex uno pario germinentur*. Em outras palavras: *um casal de coelhos recém-nascidos foi posto num lugar cercado. Determinar quantos casais de coelhos ter-se-ão após um ano, supondo que, a cada mês, um casal de coelhos produz outro casal e que um casal começa a procriar dois meses após o seu nascimento* (HEFEZ, 2003, p.26). O esquema da Figura 3 representa a situação.

FIGURA 3 – Esquema de descrição do problema dos coelhos.



Fonte: Alves (2013, p.3).

O esquema mnemônico anterior demonstra a descrição e modelização relacionadas ao problema dos coelhos. Utilizando o esquema proposto, responda:

a) Que sequência você relacionaria com a situação do nascimento de casais de coelhos? Explique suas escolhas, indicando uma simbologia conveniente para o primeiro termo, para o segundo termo, para o terceiro termo e, assim, sucessivamente. Podemos estabelecer uma relação que generalize esses resultados?

b) Com base na relação anterior, podemos avaliar os valores de $f_0 = ?$, $f_{-1} = ?$, $f_{-2} = ?$. Descreva esse conjunto numérico. Quais suas conclusões? Que nome ou terminologia podemos atribuir à sequência obtida?

DESCRIÇÃO DA SITUAÇÃO 1 DE ACORDO COM A TSD

A partir de agora, descreveremos as realizações e discussões previstas na atividade 1, de acordo com as fases da TSD.

Situação de Ação: Como já destacamos, nesta fase da TSD, cabe ao aluno, de posse do problema, buscar em seus conhecimentos, interagindo com o meio, elementos necessários à solução da situação proposta; que se processa por meio de reflexões e tentativas, a fim da obtenção de uma estratégia de resolução.

Dessa maneira, a partir da análise do esquema mnemônico proposto, o aluno deve procurar estabelecer uma relação entre o período (meses) e a filiações (quantidade de casais), caracterizando a seguinte situação: no primeiro mês, teremos apenas um casal de coelhos jovem, que ainda não atingiu a maturidade; no segundo mês, ainda teremos um único casal, sendo este agora maduro, e capaz de se reproduzir; no terceiro mês, o casal maduro do mês anterior, se reproduz e gera um casal jovem, obtendo-se neste período dois casais, um jovem e um maduro; no quarto mês, enquanto o casal jovem do mês anterior atinge a maturidade, o casal maduro se reproduz, obtendo-se neste período três casais. O aluno deve ser capaz de perceber esta dinâmica a partir do esquema proposto.

Situação de Formulação: como destaca Alves (2016b), os alunos devem ser estimulados à identificação das variáveis necessárias e pertinentes, elementos invariantes na situação. Tal fase também é caracterizada pela troca de informações entre o aluno e o meio organizado; neste momento, já se permite a utilização de uma linguagem adequada, mas sem formalidade obrigatória, ou seja, existe uma organização de informações para torná-las comunicáveis.

Nesse sentido, o aluno deve ter compreendido a dinâmica de maturação e reprodução dos casais de coelhos e que este processo ocorre de maneira contínua, com padrão de recorrência definido. Ao final, desta fase, o aluno deve ser capaz de expressar a seguinte sequência: $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} : (1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; 89; 144; 233; 377; \dots)$.

Situação de Validação: é o momento de convencimento dos interlocutores sobre a veracidade ou não dos argumentos apresentados à solução do problema. Neste caso, já se deve utilizar uma linguagem mais formalizada e mecanismos de prova.

Desse modo, posteriormente à obtenção da sequência, o aluno deve ser instigado a expressar seus resultados em notação matemática. Este deve obter a relação a seguir, que vincula a unidade temporal n (meses) com f_n (filiações possíveis), a cada mês.

$$\left\{ \begin{array}{l} n = 1 \rightarrow f_1 = 1 \\ n = 2 \rightarrow f_2 = 1 \\ n = 3 \rightarrow f_3 = 2 = f_1 + f_2 \\ n = 4 \rightarrow f_4 = 3 = f_2 + f_3 \\ n = 5 \rightarrow f_5 = 5 = f_3 + f_4 \\ \dots\dots\dots \\ n = n \rightarrow f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \end{array} \right.$$

Ao final, deve ser capaz de obter um resultado mais geral que modelize a situação, no caso, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, para $n > 2$, modelo recorrente da SF.

Situação de Institucionalização: momento em que a intenção do professor, tendo como meio o problema proposto, é revelada. Segundo Alves (2016b), este é o momento da mediação do professor, em que este deve explicitar e indicar as propriedades formais, construídas a partir das discussões nas fases anteriores. Desta maneira, ao retomarmos as discussões, evidenciaremos o estudo realizado, o modelo de recorrência e formalização da SF, a partir do problema dos coelhos.

Dando prosseguimento, apresentamos as realizações e discussões previstas no item (b), da atividade 1.

Situação de Ação: Como já ressaltamos, nesta fase da TSD, cabe ao aluno, de posse do problema, buscar em seus conhecimentos, interagindo com o meio, elementos necessários à solução da situação proposta, que se processa por meio de reflexões e tentativas, a fim da obtenção de uma estratégia de resolução. Assim, o aluno, tendo como referência, o modelo obtido no item b, deve avaliar a possibilidade de termos $f_0 = ?$, $f_{-1} = ?$, $f_{-2} = ?$.

Situação de Formulação: como destaca Alves (2016b), os alunos devem ser estimulados à identificação das variáveis necessárias e pertinentes elementos invariantes na situação. Tal fase também é caracterizada pela troca de informações entre o aluno e o meio organizado. Neste momento, já se permite a utilização de uma linguagem adequada, mas sem formalidade obrigatória; ou seja, existe uma organização de informações para torná-las comunicáveis.

Com isto, o aluno deve avaliar, na relação $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, $n > 2$, o valor de $n = 2$: $f_2 = f_1 + f_0$. Daí, este pode obter $f_0 = f_2 - f_1$. Agora, com origem nos valores indicados em $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} : (1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; 89; 144; 233; 377; \dots)$, pode escrever $f_0 = f_2 - f_1 = 1 - 1 = 0$, como já destacamos, o que nos parece natural numa situação em que os coelhos ainda não existem.

Entretanto, continuando o processo anterior, este deve escrever $n = 1$: $f_1 = f_0 + f_{-1}$, o que o conduz ao valor $f_{-1} = f_1 - f_0 = 1 - 0 = 1$. Também, como já destacamos, este é o

momento em que assinalamos a possibilidade de um distanciamento do modelo empírico da produção dos coelhos. É, de fato, o momento de nos questionarmos qual significado cognoscível podemos relacionar ao termo $f_{-1} = 1$? Dando continuidade, este deve escrever $n = 0$: $f_0 = f_{-1} + f_{-2}$, o que os conduz ao valor $f_{-2} = f_0 + f_{-1} = -1$.

Situação de Validação: é o momento de convencimento dos interlocutores sobre a veracidade ou não dos argumentos apresentados à solução do problema. Neste caso, já se deve utilizar uma linguagem mais formalizada e mecanismos de prova.

Nesse sentido, ao continuar o processo para $n = -1, -2, -3, -4, \dots$, o aluno deve obter a seguinte sequência ($\dots, 8, -5, 3, -2, 1, -1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$), além de perceber e expressar a possibilidade de “alongarmos”, “ampliarmos”, “estendarmos” a sequência de Fibonacci para números inteiros, contrapondo a abordagem tradicional de apresentação e discussão da sequência de Fibonacci.

Situação de Institucionalização: momento em que a intenção do professor, tendo como meio o problema proposto, é revelada. Segundo Alves (2016b), este é o momento da mediação do professor, em que este deve explicitar e indicar as propriedades formais, construídas a partir das discussões nas fases anteriores. Assim, ao retomarmos, temos condições de discutir uma abordagem não corriqueira da sequência de Fibonacci, a qual trata de sua extensão a índices inteiros, abordagem discutida por Alves e Borges Neto (2011).

SITUAÇÃO 2 – A FÓRMULA DE BINET COMO MODELO DE GENERALIZAÇÃO DA SF

Contexto: a situação trata da modelização do problema dos coelhos imortais, numa discussão não recursiva. *Objetivo da atividade:* apresentar a fórmula de Binet como modelo de generalização da Sequência de Fibonacci. *Hipótese didática:* os alunos devem caracterizar a fórmula de Binet como modelo de obtenção da sequência de Fibonacci, não mais recursiva.

CONTEXTO PROPOSTO

Huntley (1985, p.63) relata que a “ligação entre a divisão áurea e a série de Fibonacci pode ser vista de um novo ângulo considerando o termo geral da série”. Nesse sentido, dada α a raiz positiva da equação $x^2 - x - 1 = 0$ e sua raiz negativa β , teremos que $f_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$, onde $n \geq 1$. Com base nos valores de α e β , como podemos reescrever $f_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$? Ao verificar alguns resultados com $f_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$, quais suas conclusões? Que nome ou terminologia podemos dar ao modelo?

DESCRIÇÃO DA SITUAÇÃO 2 DE ACORDO COM A TSD

A partir de agora, descreveremos as realizações e discussões previstas na atividade 2, de acordo com as fases da TSD.

Situação de Ação: Como já destacamos, nesta fase da TSD, cabe ao aluno, de posse do problema, buscar em seus conhecimentos, interagindo com o meio, elementos necessários à solução da situação proposta, que se processa por meio de reflexões e tentativas, a fim da obtenção de uma estratégia de resolução. Desta forma, o aluno tomando por base o contexto apresentado por Huntley (1985), deve perceber a possibilidade de obtenção do termo geral da sequência de Fibonacci, tornando-a não mais recursiva, diferentemente dos argumentos discutidos na atividade 1, estruturados na recursividade da SF.

Situação de Formulação: como destaca Alves (2016), os alunos devem ser estimulados à identificação das variáveis necessárias e dos pertinentes elementos invariantes na situação. Tal fase também é caracterizada pela troca de informações entre o aluno e o meio organizado. Neste momento, já se permite a utilização de uma linguagem adequada, mas sem formalidade obrigatória; ou seja, existe uma organização de informações para torná-las comunicáveis.

Nessa perspectiva, a partir da resolução da equação $x^2 - x - 1 = 0$, o aluno terá como resultados $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ como raiz positiva e $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ como raiz negativa. Dando prosseguimento, o aluno deve reescrever a relação $f_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ e, com base nos resultados, obter a formulação: $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n, n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Situação de Validação: é o momento de convencimento dos interlocutores sobre a veracidade ou não dos argumentos apresentados à solução do problema. Neste caso, o aluno deve realizar alguns cálculos com a formulação anterior e obter os seguintes resultados:

$$\text{Para } n=1, \text{ em } f_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}, \text{ temos } f_1 = \frac{\alpha^1 - \beta^1}{\alpha - \beta} = 1;$$

$$\text{para } n=2, \text{ em } f_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}, \text{ temos}$$

$$f_2 = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha - \beta} = \frac{(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)}{\alpha - \beta} = 1;$$

$$\text{para } n=3, \text{ em } f_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}, \text{ temos}$$

$$f_3 = \frac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha - \beta} = \frac{(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)}{\alpha - \beta} \stackrel{\alpha\beta=-1}{\alpha^2+\beta^2=3} = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 3 - 1 = 2, \text{ e}$$

para $n=4$, temos:

$$f_4 = \frac{\alpha^4 - \beta^4}{\alpha - \beta} = \frac{(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^2 - \beta^2)}{\alpha - \beta} = \frac{(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)}{\alpha - \beta} \stackrel{\alpha+\beta=1}{\alpha^2+\beta^2=3} = (\alpha^2 + \beta^2)(\alpha + \beta) = 3$$

Ao final, o aluno deve perceber que o teste realizado para alguns valores de n , na formulação, determina, como resultados, a sequência de Fibonacci.

Situação de Institucionalização: momento em que a intenção do professor, tendo como meio o problema proposto, é revelada. Segundo Alves (2016b), este é o momento da mediação do professor, em que este deve explicitar e indicar as propriedades formais construídas a partir das discussões nas fases anteriores. Ao retomarmos as discussões relativas às fases anteriores, temos elementos que permitem a caracterização do modelo matemático de obtenção da sequência de Fibonacci, não mais recursiva, e sim explícita, a fórmula de Binet.

SITUAÇÃO 3 – A FÓRMULA DE BINET ESTENDIDA A ÍNDICES INTEIROS

Contexto: a situação discute a modelo de extensão da sequência de Fibonacci a índices inteiros, bem como sua relação com a fórmula de Binet. *Objetivo da atividade:* apresentar o modelo de generalização da sequência de Fibonacci para índices inteiros. *Hipótese didática:* os alunos caracterizem $f_{-n} = (-1)^{n+1} f_n$ como a fórmula de Binet de extensão da sequência de Fibonacci a índices inteiros, bem como utilizem o modelo de Binet, constituído na atividade 2, como elemento de prova/demonstração de propriedades da sequência de Fibonacci.

CONTEXTO PROPOSTO

Nos compêndios de História da Matemática (HM), a fórmula atribuída a Binet proporciona a obtenção explícita dos termos da sequência de Fibonacci, sendo esta indicada por $f_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$, onde $n \geq 1$ (KOSHY, 2011), tendo esta fórmula sido descoberta 500 anos depois, em 1730, por De Moivre (STILLWELL, 1989). Com base nos argumentos, que resultados podemos estabelecer ao utilizarmos $f_{-n} = (-1)^{n+1} f_n$? Quais suas conclusões? Que nome ou terminologia podemos atribuir ao modelo? Podemos estabelecer uma demonstração para $f_{-n} = (-1)^{n+1} f_n$?

DESCRIÇÃO DA SITUAÇÃO 3 DE ACORDO COM A TSD

A partir de agora, descreveremos as realizações e discussões previstas na atividade 3, de acordo com as fases da TSD.

Situação de Ação: Como já destacamos, nesta fase da TSD, cabe ao aluno de posse do problema, buscar em seus conhecimentos, interagindo com o meio, elementos necessários à solução da situação proposta, que se processa por meio de reflexões e tentativas, a fim da obtenção de uma estratégia de resolução. Dessa forma, o aluno deve perceber que, a

partir da propriedade apresentada e ao atribuir valores para n , os resultados obtidos são a extensão da sequência de Fibonacci a índices inteiros.

Situação de Formulação: como destaca Alves (2016b), os alunos devem ser estimulados à identificação das variáveis necessárias e dos pertinentes elementos invariantes na situação. Tal fase também é caracterizada pela troca de informações entre o aluno e o meio organizado. Neste momento, já se permite a utilização de uma linguagem adequada, mas sem formalidade obrigatória; ou seja, existe uma organização de informações para torná-las comunicáveis.

Assim, o aluno, ao fazer uso da relação $f_{-n} = (-1)^{n+1} f_n$, obterá alguns resultados, como os descritos a seguir:

$$\begin{cases} f_{-1} = 1 = (-1)^{1+1} f_1 \text{ para } n=1 \\ f_{-2} = -1 = (-1)^{2+1} f_2 \text{ para } n=2 \\ f_{-3} = 2 = (-1)^{3+1} f_3 \text{ para } n=3 \\ f_{-4} = -3 = (-1)^{4+1} f_4 \text{ para } n=4 \\ f_{-5} = 5 = (-1)^{5+1} f_5 \text{ para } n=5 \\ \dots \end{cases}$$

Ao final do procedimento, o aluno deve encontrar os seguintes resultados $(\dots, 13, -8, 5, -3, 2, -1, 1, 0)$, estabelecendo novamente a seguinte sequência $(\dots, 8, -5, 3, -2, 1, -1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots)$, fato já conhecido da atividade 1.

Situação de Validação: é o momento de convencimento dos interlocutores sobre a veracidade ou não dos argumentos apresentados à solução do problema. Neste caso, já se deve utilizar uma linguagem mais formalizada e mecanismos de prova.

Desse modo, o aluno deve determinar matematicamente a relação $f_{-n} = (-1)^{n+1} f_n$ como modelo que permite a obtenção dos números de Fibonacci estendidos a índices inteiros e que esta formulação possui conexão direta com a fórmula de Binet. Do ponto de vista matemático, este deve realizar o seguinte procedimento, a partir da fórmula de Binet:

$$f_{-n} = \frac{\alpha^{-n} - \beta^{-n}}{\alpha - \beta} = \frac{(1/\alpha)^n - (1/\beta)^n}{\alpha - \beta}$$

Em seguida, observar que

$$\alpha\beta = -1 \therefore f_{-n} = \frac{(-\beta)^n - (-\alpha)^n}{\alpha - \beta} = (-1)^{n+1} \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \right),$$

concluindo que $f_{-n} = (-1)^{n+1} f_n$.

Situação de Institucionalização: momento em que a intenção do professor, tendo como meio o problema proposto, é revelada. Segundo Alves (2016b), este é o momento

da mediação do professor, em que este deve explicitar e indicar as propriedades formais, construídas a partir das discussões nas fases anteriores. Com isto, ao retomarmos as discussões das fases anteriores, temos condições de determinarmos $f_{-n} = (-1)^{n+1} f_n$ como a fórmula de Binet de extensão dos números de Fibonacci a índices inteiros, e de a utilizarmos como elemento de prova/demonstração de propriedades da SF.

SITUAÇÃO 4 – FUNÇÕES GERADORAS E A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Contexto: a situação apresenta a possibilidade de obtenção da sequência de Fibonacci com índices inteiros, a partir do desenvolvimento de funções geradoras. *Objetivo da atividade:* apresentar e discutir os modelos de generalização da sequência de Fibonacci relativos a outros contextos matemáticos. *Hipótese didática:* os alunos caracterizam a sequência de Fibonacci a partir de outros contextos matemáticos que não sejam somente a modelização do problema dos coelhos.

CONTEXTO PROPOSTO

Como destaca Huntley (1985, p.144-145), “os números de Fibonacci aparecem de novo em um contexto totalmente diverso”. Nesse sentido, o autor argumenta que, ao determinarmos alguns dos primeiros coeficientes do desenvolvimento de $x/(1-x-x^2)$ através de divisão direta, forma-se a série de Fibonacci. Com base no que sugere Huntley (1985), o que obteremos em $\frac{x}{1-x-x^2} = ?$. Quais suas conclusões? Que nome ou terminologia podemos atribuir aos resultados obtidos? Que conclusões podemos estabelecer para $\frac{x}{1+x-x^2} = ?$.

DESCRIÇÃO DA SITUAÇÃO 4 DE ACORDO COM A TSD

A partir de agora, descreveremos as realizações e discussões previstas na atividade 4, de acordo com as fases da TSD.

Situação de Ação: Como já destacamos, nesta fase da TSD, cabe ao aluno, de posse do problema, buscar em seus conhecimentos, interagindo com o meio, elementos necessários à solução da situação proposta, que se processa por meio de reflexões e tentativas, a fim da obtenção de uma estratégia de resolução. Nesse sentido, o aluno deve iniciar a resolução através da divisão dos polinômios $\frac{x}{1-x-x^2} = ?$ e $\frac{x}{1+x-x^2} = ?$.

Situação de Formulação: como destaca Alves (2016b), os alunos devem ser estimulados à identificação das variáveis necessárias e dos pertinentes elementos

invariantes na situação. Tal fase também é caracterizada pela troca de informações entre o aluno e o meio organizado, neste momento, já se permite a utilização de uma linguagem adequada, mas sem formalidade obrigatória; ou seja, existe uma organização de informações para torná-las comunicáveis. Desse modo, o aluno deve realizar as divisões das funções racionais, de acordo com os procedimentos que apresentamos a seguir, iniciando com os relativos a $\frac{x}{1-x-x^2}=?$.

$$\begin{array}{r|l}
 x & 1-x-x^2 \\
 -x+x^2+x^3 & x+x^2+2x^3+3x^4+\dots \\
 \hline
 x^2+x^3 & \\
 -x^2+x^3+x^4 & \\
 \hline
 2x^3+x^4 & \\
 -2x^3+2x^4+2x^5 & \\
 \hline
 3x^4+2x^5 & \\
 \dots\dots &
 \end{array}$$

Dando continuidade, apresentamos os procedimentos relativos à divisão de $\frac{x}{1+x-x^2}=?$

$$\begin{array}{r|l}
 x & 1+x-x^2 \\
 -x-x^2+x^3 & x-x^2+2x^3-3x^4+\dots \\
 \hline
 -x^2+x^3 & \\
 x^2+x^3-x^4 & \\
 \hline
 2x^3-x^4 & \\
 -2x^3-2x^4+2x^5 & \\
 \hline
 -3x^4+2x^5 & \\
 \dots\dots &
 \end{array}$$

Situação de Validação: é o momento de convencimento dos interlocutores sobre a veracidade ou não dos argumentos apresentados à solução do problema. Neste caso, já se deve utilizar uma linguagem mais formalizada e mecanismos de prova. Ao realizar as divisões anteriores, este deve encontrar como resultados $\frac{x}{1-x-x^2}=1x+1x^2+2x^3+3x^4+\dots$ e $\frac{x}{1+x-x^2}=1x-1x^2+2x^3-3x^4+\dots$, resultados que não são polinômios, e sim, séries de potência que tem por coeficientes os números de Fibonacci, em sua forma normal e estendida, respectivamente.

Situação de Institucionalização: momento em que a intenção do professor, tendo como meio o problema proposto, é revelada. Segundo Alves (2016b), este é o momento da mediação do professor, em que este deve explicitar e indicar as propriedades formais construídas a partir das discussões nas fases anteriores. Assim, ao retomarmos as discussões podemos evidenciar a possibilidade de obtenção da sequência de Fibonacci, a partir de outros contextos matemáticos que não sejam somente a modelização do problema dos coelhos, no caso, o estudo das funções geradoras de obtenção da sequência de Fibonacci na forma normal e estendida.

Abordamos, nesta seção, os procedimentos seguidos com as orientações da TSD necessários à elaboração das situações-problema que seriam utilizadas na fase de experimentação da pesquisa e que tinham, por finalidade, a exploração de algumas das propriedades relacionadas ao processo de generalização e extensão da SF.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Do percurso seguido, destacamos que a utilização da ED em associação com a TSD nos permitiu a organização da pesquisa em etapas condizentes com nossos objetivos. Dessa forma, ao realizarmos as análises preliminares, construímos a fundamentação teórica do objeto matemático de estudo, a SF. Esta etapa nos permitiu identificarmos e descrevermos outras propriedades de generalização da sequência de Fibonacci, caracterizando, desse modo, o alcance dos objetivos relativos a *analisar o desenvolvimento histórico-matemático-epistemológico de generalização da sequência de Fibonacci, através da fórmula de Binet*.

Dando seguimento, orientados pela fundamentação teórica da SF, realizada nas análises preliminares, tínhamos o suporte teórico necessário a ser explorado na concepção e na análise a priori, etapas em que estruturamos todo o plano de ação e as situações didáticas aplicáveis, na experimentação. Nesse sentido, conseguimos *descrever quatro situações didáticas envolvendo o modelo de generalização da sequência de Fibonacci*.

Vale destacar que as etapas discutidas foram essenciais à organização das etapas seguintes da pesquisa, sendo estas, de acordo com a ED, a *experimentação*, a *análise a posteriori* e a *validação*. Concluímos esperando que o percurso metodológico seguido em suas etapas seja uma referência de orientação à organização de outras pesquisas, fundamentadas nas orientações da ED em articulação com a TSD.

REFERÊNCIAS

- ALFRED, B. U. *An introduction to Fibonacci Discovery*. Santa Clara: The Fibonacci Association, 1965.
- ALMOULOUD, S. A. *Fundamentos da Didática da Matemática*. 3.ed. São Paulo: Editora UFPR, 2007.

ALVES, F. R. V.; BORGES NETO, H. Sequências de Fibonacci e de Lucas: uma aplicação da sequência Fedathi. In: COLÓQUIO DE HISTÓRIA E TECNOLOGIA NO ENSINO DE MATEMÁTICA, 5., 2010, Recife. *Anais...* Recife: UFPE, 2010.

_____. A existência de sequência de Fibonacci no campo dos inteiros: uma atividade de investigação apoiada nos pressupostos da Sequência Fedathi. *Boletim GEPEM*, Rio de Janeiro, n.59, p.135-140, jul./dez. 2011.

ALVES, F. R. V.; BORGES NETO, H.; MAIA, J. A. D. História da matemática: os números figurais em 2D e 3D. *Revista Conexões Ciência e Tecnologia*, v.6, n.2, p.40-56, jun. 2012.

ALVES, F. R. V. Uma discussão de artigos envolvendo propriedades da sequência de Fibonacci apoiada na tecnologia. In: COLÓQUIO DE HISTÓRIA E TECNOLOGIA NO ENSINO DE MATEMÁTICA, 6., 2013, São Carlos. *Anais...* São Paulo: UFSCar, 2013. Disponível em: <http://hitem2013.dm.ufscar.br/anais/artigoscompletos/artigocompleto_OC_T5_36_fco_regis_v_ALVES.pdf>. Acesso em: 28 jun. 2015.

_____. Sequência generalizada de Fibonacci e relações com o número áureo. *Boletim Cearense de Educação e História da Matemática*, v.2, n.6, p.30-36, 2015a.

_____. Sobre a evolução histórica do modelo de Fibonacci: a classe das funções hiperbólicas. *VIDYA Revista Eletrônica*, Santa Maria, v.35, n.1, p.133-146, jan./jun. 2015b.

_____. Descobrimos definições matemáticas no contexto de investigação histórica: o caso da sequência generalizada de Fibonacci. *Boletim GEPEM*, n.68, p.1-5. 2016a.

_____. Engenharia didática para a generalização da noção de sequência de Fibonacci na disciplina de história da matemática: uma experiência num curso de licenciatura. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, v.18, n.1, p.61-93, 2016b.

BROUSSEAU, B. A. A Fibonacci generalization. *Fibonacci Quarterly*, [S.l.], v.5, n.2, p.171-175, Apr. 1967.

CARNEIRO, V. C. G. Engenharia didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de Matemática. *Zetetiké*, Campinas, SP, v.13, n.23, p.85-118, jan./jun. 2005.

GRIMALDI, R. P. *Fibonacci and Catalan Numbers: an introduction*. New Jersey: John Wiley & Sons, 2012.

HEFEZ, A. *Elementos de aritmética*. Rio de Janeiro: SBM, 2003.

HOGGAT, Jr. V. *Fibonacci and Lucas numbers*. Santa Clara: The Fibonacci Association, 1969. Disponível em: <<http://www.fq.math.ca/Books/Complete/fibonacci-lucas.pdf>>. Acesso em: 28 set. 2015.

HUNTLEY, H. E. *A divina proporção*. Tradução Luís Carlos Ascêncio Nunes. Brasília: Editora da Universidade de Brasília, 1985.

KOSHY, T. *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*. New York: John Wiley and Sons, 2011.

LIVIO, M. *The Golden ratio: The History of Phi*. New York: Broadway, 2002.

PAIS, L. C. *Didática da matemática: uma análise da influência francesa*. 2.ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

POSAMANTIER, A. S.; LEHMAM, I. *The Fabulous Fibonacci Numbers*. New York: Prometheus, 2007.

- SOUZA, C. M. P.; LIMA, A. P. A. B. O contrato didático a partir da aplicação de uma sequência didática para o ensino da progressão aritmética. *Zetetiké*, Campinas, SP, v.22, n.42, p.31-61, jun./dez. 2014.
- STAKHOV, A. *The mathematics of harmony: From Euclid to contemporary mathematics and computer science*. London: World Scientific Publishers, 2009.
- STILLWELL, J. *Mathematics and its History*. New York: Springer Verlag, 1989.
- TEIXEIRA, P. J. M.; PASSOS, C. C. M. Um pouco da Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Guy Brousseau. *Zetetiké*, Campinas, SP, v.21, n.39, p.155-168, jan./jun. 2013.
- VOROBIOV, N. N. *Números de Fibonacci*. Tradução de Carlos Vega. Moscou: Mir, 1974.
- WELLS, D. *Prime Numbers: The mysterious figures in the Math*. New Jersey: John Wiley and Sons, 2005.