Argumentação matemática colaborativa em um ambiente *online*

Rúbia Barcelos Amaral

RESUMO

O curso a distância *Geometria com o Geometricks* foi desenvolvido para professores de Matemática de uma rede de escolas, envolvendo participantes de todo o País. Para propiciar interação, encontros *online* por meio de chat e videoconferência foram realizados periodicamente. Neles, discussões matemáticas foram fomentadas, as quais podem ser analisadas sob diversos aspectos. Dentre eles o que apresento neste texto, enfatizando que conjecturas e justificativas matemáticas se desenvolveram intensamente no decorrer do processo, instigadas pelas tecnologias presentes na interação ocorrida de forma constante e colaborativa. Parto de uma abordagem teórica sobre argumentação matemática e geometria dinâmica, apresento um retrato de discussões matemáticas a partir de um exemplo de atividade, e finalizo analisando, à luz da literatura, a possibilidade de argumentação matemática de forma colaborativa, em um ambiente *online*, de modo a ressaltar o coletivo que elaborou os argumentos matemáticos. De modo geral, foi possível concluir que, influenciado pela forma como as atividades foram concebidas, o curso foi espaço para uma abordagem diferente de argumentação: de forma colaborativa, em um ambiente *online*. O encadeamento não era apresentado, ou mesmo elaborado, por uma mesma pessoa, era construído a partir de contribuições de diferentes participantes. Não era possível identificar "o" autor desse processo.

Palavras-chave: Educação Matemática. Educação a Distância. Colaboração. Formação de Professores.

Collaborative Mathematical Argumentation in an online environment

ABSTRACT

The distance course entitled *Geometry Geometricks* was designed for mathematics teachers by a set of schools, involving participants from all the states of Brazil. Online chat and video conference interactions were conducted. In these interactions, mathematical discussions were encouraged. Although these discussions can be analyzed from several perspectives, in this text, I emphasize that mathematical conjectures and justifications were both developed intensively in the process of online investigation and often enhanced by the technologies through the collaborative interactions. From a theoretical approach on this theme, I present some mathematical discussions based on an example of activity. Regarding the literature, I analyze the possibility of collaborative mathematical argumentation in an online environment, emphasizing the collective that elaborated the mathematical arguments and justifications.

Keywords: Mathematics Education. Distance Education. Collaboration. Teacher Education.

Rúbia Barcelos Amaral é Doutora em Educação Matemática pela UNESP-Rio Claro. Professora da Faculdade de Ciências Aplicadas (FCA) da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Endereço para correspondência: Av. 10, 2230, apto. 701. Jardim São Paulo. Rio Claro-SP. CEP 13.503-200. E-mail: rubia.amaral@fca.unicamp.br

INTRODUÇÃO

Buscando fomentar a utilização de Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) na sala de aula, o GPIMEM – Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática – ofereceu cursos de extensão universitária em parceria com a Fundação Bradesco (FB), entre 2004 e 2008. Um deles, intitulado *Geometria com o Geometricks*, foi desenvolvido por meio de encontros síncronos, por chat e videoconferência, a partir de discussões de atividades com o Geometricks. Seu principal objetivo foi familiarizar os professores[1] da rede de escolas da FB, espalhadas por diferentes localidades do país, com esse software. Essa parceria resultou em pesquisas do grupo (ZULATTO, 2007; BORBA, MALHEIROS, ZULATTO, 2009; BORBA, 2009; ZULATTO, 2010, BORBA; ZULATTO, 2010), dentre as quais destaco a análise da natureza da aprendizagem matemática em um curso *online* de formação continuada de professores na área de Geometria (ZULATTO, 2007), cujos resultados me levaram a inferir que, nesse contexto, a aprendizagem matemática teve natureza colaborativa, coletiva, e argumentativa[2]. Neste texto foco a natureza argumentativa[3], na qual enfatizo que conjecturas e justificativas matemáticas se desenvolveram intensamente do decorrer do processo, possibilitadas pelas tecnologias presentes na interação ocorrida de forma constante e colaborativa. Para tanto, parto de uma abordagem teórica sobre o tema; apresento um retrato de discussões matemáticas a partir do exemplo de uma atividade realizada em um dos encontros síncronos; e finalizo com uma análise dessas discussões à luz da literatura.

ARGUMENTAÇÃO E SOFTWARES DE GEOMETRIA DINÂMICA NO PROCESSO DE APRENDIZAGEM MATEMÁTICA

Charles Peirce, lógico e filósofo, ao estudar a lógica da descoberta científica, concluiu que há três tipos de raciocínio: dedução, indução e abdução. Assim, ao produzir conhecimento matemático, o raciocínio lógico pode ser de natureza dedutiva (do todo para a parte), indutiva (da parte para o todo) e abdutiva ("combinação do indutivo e do dedutivo com um componente a mais, a reificação, que são hipóteses ou conjecturas testáveis matematicamente" (MISKULIN, 1999, p.345)). Para Peirce (1977, p.220), "a dedução prova que algo deve ser; a indução mostra que alguma coisa é realmente operativa; a abdução simplesmente sugere que alguma coisa pode ser". Dessa forma, a abdução é um modo de raciocínio que, a partir de um método de inferência, assume uma conclusão como aproximada, que pode conduzir à verdade.

1 Por serem alunos do curso, neste texto estarei denominando-os de alunos-professores.
2 Esses foram os três eixos de análise da pesquisa. Neste caso, o conceito de coletivo está baseado nas ideias de Lévy (1997) sobre "coletivo pensante"; a colaboração se baseia em autores como Ferreira e Miorim (2003), Fiorentini (2004) e Nacarato (2005), e a argumentação apresento os autores neste texto.
3 Como referi, o presente texto compartilha parte dos resultados da pesquisa de doutorado realizado junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP- Rio Claro (ZULATTO, 2007).

Às ideias de Peirce, Miskulin (1999, p.348) reforça que o raciocínio abdutivo representa o "arriscar", as tentativas e expectativas de solucionar um problema e é concebido "como um dos mais importantes raciocínios no processo de se 'fazer matemática', pois o sujeito, ao resolver problemas, lança mão de inferências e hipóteses e testa-as matematicamente", reorganizando as estratégias e os procedimentos utilizados. Para Josephson e Josephson (1996, p.5), a abdução "é uma forma de inferência que vai dos dados que descrevem algo, a uma hipótese que melhor explique ou esclareça os dados".

Scucuglia (2006, p.86) observa que a generalização de informações, em sua essência, "pode ser concebida como um processo de indução, no qual as inferências intuitivas são privilegiadas. E, inerente ao indutivo no fazer matemático, está a necessidade de uma abordagem dedutiva". Corroborando essa ideia, Miskulin (1999) ressalta que a indução possui valor pedagógico, podendo auxiliar na compreensão.

Peirce (1977) destaca a importância da "hipótese" para o processo de descoberta científica. É o início desse processo e, a partir dela, é possível gerar a explicação científica de um fenômeno. Nesse sentido, Miskulin (1999) complementa que, para esse autor, a abdução é parte do método científico, não o separando dos processos de testagem, ou seja, a partir de uma hipótese, suas consequências devem ser deduzidas e testadas.

Isso posto, entendo que indução, dedução e abdução podem atuar de forma articulada e condicionam a produção de conhecimento matemático (BORBA; VILLARREAL, 2005), em um processo de levantar hipóteses, procurar testá-las e justificá-las para verificar sua veracidade.

Nesse sentido, alguns autores ressaltam que a busca por uma justificativa não deve priorizar o convencimento, mas, além disso, a explicação (HANNA, 2000; MARIOTTI, 2000; MARRADES; GUTIÉRREZ, 2000; VILLIERS, 1998). Lourenço (2002, p.101) postula que

> a necessidade de se provar resultados parece ser de reconhecida importância, entretanto, a forma segundo a qual se faz, na medida do possível, deve ser revista, sobretudo quando se trata de ensino, uma vez que a simples observação constata que essas demonstrações se mostram destituídas de significado para os estudantes.

Com essa perspectiva, ao estruturar o curso *Geometria com Geometricks*, o software de geometria dinâmica (SGD) foi uma das tecnologias escolhidas para, entre outros aspectos, estimular o processo de argumentação matemática. Segundo Boavida (2005), o interesse pela argumentação matemática no âmbito da Educação Matemática é recente, e ao considerar o ambiente da sala de aula de Matemática,

> um contexto que se destaca favorável à argumentação matemática é a exploração de situações de desacordo tendo em vista a obtenção de consensos matematicamente fundamentados pelos alunos. Estas situações podem ser desencadeadas pela

> exploração de tarefas que permitam fazer surgir processos de resolução e que suscitem a reflexão. A legitimação da possibilidade dos alunos exprimirem pontos de vistas diferentes, tornar visíveis posições de confronto e instituir estas posições como objeto de reflexão individual e coletiva, são aspectos que facilitam a emergência e a resolução de desacordos. (BOAVIDA, 2005, p.6)

Nessa direção, Kilpatrick, ao apresentar uma perspectiva histórica sobre o ensino da Matemática, considerou o período de 1980-2000 como "a era da argumentação". E Duval (1999) justifica a atenção dedicada às atividades de argumentação na aula de Matemática nos tempos atuais como sendo a procura por caminhos facilitadores da aprendizagem da prova. Não obstante, Hanna (1996) destaca que os alunos têm que ser familiarizados com os padrões de argumentação matemática, embora não seja fácil ensiná-los a reconhecer e a produzir argumentos válidos sob a concepção matemática.

Vale ressaltar, ainda, que os SGD permitem que figuras sejam arrastadas pela tela mantendo-se os vínculos estabelecidos nas construções. Esse recurso do arrastar suscitou, na Educação Matemática especialmente, algumas discussões, como Laborde (1998), que diferenciou "desenhar" e "construir" uma figura com um SGD. Por exemplo, três segmentos de mesmo tamanho, que formam ângulos internos de 60º, podem ser considerados um desenho de um triângulo equilátero. Mas somente terá sido construído um triângulo equilátero se seus vértices puderem ser arrastados de forma a manter as propriedades desta figura, ou seja, se passar pelo "teste do arrastar" (OLIVERO et al., 1998).

Em Zulatto (2002) apresentei um estudo sobre esse tipo de software, discutindo suas potencialidades e limitações, do ponto de vista dos professores de Matemática que o utilizam em suas aulas. Eles destacam, como aspectos positivos, a possibilidade de realizar *construções* geométricas, de promover *atividades investigativas* e *descobertas matemáticas*, de *visualização* e *dinamicidade*.

Ao construir e arrastar as figuras é possível identificar as propriedades geométricas descobertas. Além disso, quando conteúdos matemáticos são trabalhados com softwares, os alunos têm mais facilidade de observar as figuras, suas propriedades e invariantes, de acordo com os professores entrevistados em Zulatto (2002). Eles ainda enfatizam que, com essa mídia, "é possível visualizar as figuras em várias posições, em um curto espaço de tempo, devido à possibilidade de arrastá-las pela tela. Assim, é possível visualizar 'todos' os casos de uma mesma figura geométrica" (ZULATTO, 2002, p.90), o que dificulta que sejam estabelecidas associações com figuras prototípicas.

Marrades e Gutiérrez (2000) pontuam que as duas maiores contribuições dos SGD são, primeiramente, propiciar um ambiente em que os alunos possam experimentar livremente, checando suas intuições e conjecturas e, segundo, propiciar maneiras não tradicionais de ensino e aprendizagem de conceitos e métodos matemáticos. Para eles, uma das vantagens dos SGD, corroborando as ideias de Laborde (1998), é a possibilidade de construir figuras complexas e visualizá-las em diferentes posições sem ter que construí-las novamente, acompanhando, em tempo real, as modificações pelo arrastar. Dessa forma, a possibilidade de arrastar torna esse ambiente potencialmente diferente do tradicional uso do lápis-e-papel.

Villiers (2001, p.31, grifo do autor) ressalta, ao abordar o papel da demonstração com SGD, que esta tem significado para o aluno quando responde às suas dúvidas, provando o que para ele não é óbvio, e complementa que "uma demonstração é um argumento necessário para **validar** uma afirmação, um argumento que pode assumir várias formas diferentes desde que seja convincente", que explique porque uma construção ou propriedade é válida. A verificação (quanto à verdade de uma afirmação) e a explicação (quanto ao fato de uma afirmação ser verdadeira) são duas das funções que Villiers (2001, p.32) apresenta para a demonstração.

> A demonstração não é um requisito necessário para a convicção – pelo contrário, a convicção é mais frequentemente um pré-requisito para a procura de uma demonstração [...], a convicção anterior à demonstração fornece motivação para a demonstração.

Segundo esse autor, por meio de verificações, um alto nível de confiança na validade dessa conjectura é atingido, como a construção de triângulo em um SGD e a medição da soma dos seus ângulos internos, que resulta sempre em 180º, qualquer que seja o triângulo encontrado ao arrastar seus vértices. Diante dessa exploração com o software, pelo arrastar, já ficamos convencidos de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º (MARRADES; GUTIÉRREZ, 2000). O que falta é uma explicação satisfatória da razão pela qual essa afirmação é verdadeira. Esse pode ser um dos papéis da demonstração[4].

Quando aborda questões da prova com o uso do computador, Hanna (2000) aponta três condições (necessárias, mas não suficientes) para a aceitação da "prova visual": confiabilidade (de que os meios subjacentes de chegar na prova são de confiança), consistência (garantia de que os meios e o fim da prova são consistentes com outros fatos e provas conhecidos) e repetibilidade (convicção de que a prova pode ser confirmada ou demonstrada por outras pessoas). Para essa autora, os SGD podem ser usados para aumentar o papel dos processos heurístico, de exploração e visualização na sala de aula.

No contexto da formação de professores de Matemática, Garnica (1995, 1996a, 1996b) observa que, focando a sala de aula,

> [...] uma prova deve explicar, convencer, permitir o reconhecimento do fazer em Matemática, enriquecer nossa intuição, conquistar e permitir que sejam conquistados novos objetos e, final e sinteticamente, ampliar os horizontes de compreensão dos conceitos e práticas matemáticos. (GARNICA, 1995, p.29)

4 Outras funções são tratadas por Villiers (2001) e Hanna (2000), como a descoberta (de novos resultados), a sistematização, a comunicação e o desafio intelectual.

Com essa perspectiva, o curso *Geometria com Geometricks* procurou explorar aspectos da argumentação matemática com vistas a entender as construções desenvolvidas e as propriedades a elas associadas.

DESENVOLVIMENTO DAS ATIVIDADES

Para o desenvolvimento do curso foram elaboradas atividades que pudessem explorar temas de Geometria com o Geometricks. Em sua maioria, essas atividades foram baseadas nos livros didáticos adotados pelas escolas. Assim sendo, o conteúdo era familiar aos alunos-professores, que estariam tendo a oportunidade de refletir sobre o mesmo numa perspectiva que incorpora as TIC na prática docente.

Após uma familiarização inicial com o software, era proposto que os alunos-professores resolvessem um conjunto de atividades no decorrer da semana e, aos sábados, a distância e em tempo real, era realizada a discussão *online* das mesmas. Nesta sessão apresento um retrato de aspectos relevantes dessas discussões. Por limitação de espaço, selecionei apenas uma atividade, que ilustra a natureza argumentativa no processo de aprendizagem matemática.

Um exemplo de atividade

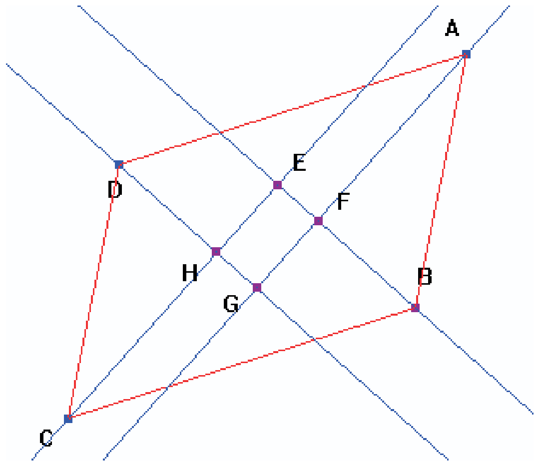
Uma das atividades versou sobre as bissetrizes de um paralelogramo, descrita no quadro 1 a seguir:

QUADRO 1 – Descrição da atividade.

EXPLORANDO BISSETRIZES DE UM PARALELOGRAMO
1. Construa um paralelogramo ABCD
2. Trace as bissetrizes dos ângulos internos deste paralelogramo
3. As quatro bissetrizes formam um quadrilátero EFGH
4. O que você pode dizer sobre o quadrilátero EFGH?
5. O que acontece quando você arrasta os pontos A,B, C ou D?
6. Que condições são necessárias para que o quadrilátero EFGH seja um quadrado?
7. Que quadrilátero você obtém, quando traça as bissetrizes do quadrilátero EFGH? Justifique sua resposta.
8. O que acontece no caso de ABCD ser um quadrado? Por quê?

Após a leitura da atividade e a construção dos itens um a três (figura 1), os alunos-professores foram questionados sobre o quadrilátero EFGH (questão quatro).

FIGURA 1 – Bissetrizes do paralelogramo ABCD.



Elaine[5] afirmou que EFGH é um paralelogramo. Em seguida Artur supôs que fosse um retângulo. Neuza também era dessa opinião. Marcelo[6] tentou fazer perguntas que suscitassem a reflexão e a busca por justificativas, aproveitando as sugestões dos alunos-professores. Questionou, inicialmente, se todo retângulo é um paralelogramo. Pedro observou que para isso bastava checar se a medida dos ângulos era 90º, utilizando-se dos recursos do software. Isso foi feito e foi possível confirmar essas medidas, tendo ficado esclarecido que, como está presente na maior parte dos livros, o retângulo é um caso particular do paralelogramo, mas faltava uma explicação matemática que justificasse os valores encontrados.

Marcelo: O problema é que além da medida dos ângulos feita pelo Geometricks, se nós podemos, por uma demonstração, introduzir para um aluno da sétima, oitava, alguém que a gente fazendo essa construção de bissetrizes assim, por exemplo, no quadro negro, ou mesmo aqui com o Geometricks, de que nós vamos ter ali dentro um retângulo. Alguém conseguiu fazer isso? Ou, se alguém não conseguiu fazer isso nós vamos abrir um fórum para tentar, vamos estar colocando esta questão no fórum, sobre uma demonstração, eu e a Rúbia vamos estar dando o primeiro passo, uma dica, caso ninguém apresente o início da demonstração, ou quem sabe até a demonstração inteira, até segunda feira, ok?!

Além de justificar que EFGH é um retângulo, procuramos[7] justificar a hipótese de Pedro: “Uma coisa que nós observamos também é que quando você traça as bissetrizes

5 Os nomes aqui presentes são de alunos-professores do curso.
6 O Prof. Dr. Marcelo de Carvalho Borba (UNESP – Rio Claro) era professor do curso. Juntos planejamos e desenvolvemos as atividades docentes.
7 O texto aqui apresentado é de minha autoria, por isso escrevo na primeira pessoa do singular. No entanto, esclareço que muitas das ações do curso eram coletivas, uma vez que fora realizado em parceria com o Prof. Dr. Marcelo Borba. Para expressar nossas ações e reflexões conjuntas utilizo-me da primeira pessoa do plural.

do retângulo, no centro do retângulo você vai ter um quadrado". Os alunos-professores participaram ativamente.

Observo que nem sempre era fácil acompanhar os raciocínios que iam surgindo, já que o diálogo acontecia em tempo real e era preciso acompanhá-lo em conjunto com as construções realizadas no software:

Lincoln: Professor, uma coisa que a gente pode observar, se você pegar a bissetriz que passa pelo vértice E, a intersecção dela com o lado seguinte do nosso retângulo, forma aí, se a gente puder pedir o lado EF e o F ir até o ponto de intersecção e descobrirmos que tem dois lados iguais, então a gente pode ver que a intersecção vai determinar um lado de um quadrado, lados iguais consecutivamente, se você pudesse marcar a intersecção na bissetriz que passa no vértice E interceptando o lado FG, a gente pode ver que parece formar um quadrado EF e F à intersecção. O ângulo, e como é a bissetriz, se o ângulo é 90º, temos 45º. E podemos ver também que o triângulo ELF é um triângulo isósceles, por ter os lados iguais? Se a gente puder estar provando aí essa relação entre essas figuras até chegar o ângulo do quadrado ou como se diz, quadrado, estamos tentando provar a tese se é um quadrado ou não.

Marcelo: Olha, a ideia acrescentada pelo Lincoln é muito interessante, analisando o triângulo ELF é um triângulo que vai ter os seus ângulos internos, o ângulo E vai medir 45º, visto que é a bissetriz do retângulo. O ângulo interno (...) F vai ter também 45º e, portanto, o ângulo L tem 90º. Então esse é um triângulo isósceles. E então como que nós fazemos então para concluir esse raciocínio de que KLMN é um quadrado?

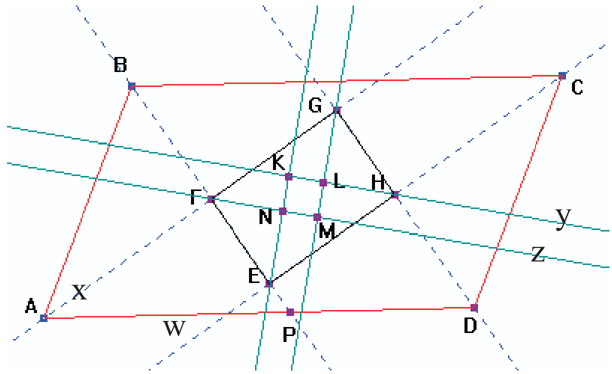
Lincoln deu sequência ao problema, envolvido, sem esperar dos colegas ou dos professores a continuidade:

Lincoln: Procede então o que foi comentado, mesmo assim, chegando à conclusão que K, L e M são ângulos retos ainda podemos afirmar que é um quadrado? Porque falta agora medir essas distâncias né?! KL, LM, MN e NK, distância iguais, ou seja, os lados mantendo, os lados congruentes, mesmo valor, podemos então chegar à conclusão de que seria então um quadrado, ou não procede o que a gente está, o que estou afirmando?

O desafio, nesse momento, era encontrar uma justificativa para medidas iguais dos lados de KLMN. Maria Divina iniciou, e o debate se seguiu até que foi preciso fechá-lo por falta de tempo:

Divina: eu estava observando a bissetriz E que passa a uma mesma distância da bissetriz G e se você observar a bissetriz F passa também a uma mesma distância da bissetriz H. [...] (figura 2). Se as quatro paralelas, as perpendiculares, podemos observar essa questão aí do paralelismo e perpendicularismo. Dá para realmente saber que a distância é a mesma.

FIGURA 2 – Bissetrizes do retângulo EFGH.



Marcelo: Maria, eu acho que ainda está faltando um argumento, já está claro que os ângulos são 90º, portanto as x, w, y e z são paralelas duas a duas, ou seja, y é paralela a z, tá ok?! E x é paralela a w. Mas como que daí eu concluo que KL, eu posso concluir que KL é, então, paralelo a MN, mas como que daí eu vou... Como os ângulos são iguais eu posso dizer que KL é congruente com MN, mas como dizer que KL é congruente com KN. Essa que é a pergunta que falta resolver. Resolvida essa, se KL for congruente a KN, fazemos um raciocínio semelhante para dizer que KL é congruente a LM, aliás nem precisa, porque já que são paralelos já está resolvido o assunto. Alguém tem uma sugestão?

Pedro: A ideia seria pensar assim, se nós temos o triângulo ELF, colocando o segmento EL e temos um segmento um pouquinho maior na mesma linha EM. A subtração desses segmentos EM – LE, dá o segmento do quadrado, quer dizer, que é a tese que a gente está tentando provar que é o quadrado. Da mesma forma, a gente pega o ponto H, onde está a bissetriz desse vértice, mede a distância HM, HN, subtrai essa duas distâncias, como eu sei que os segmentos NH e LE são praticamente congruentes, têm o mesmo valor, então eu posso concluir que MN e LN têm a mesma medida, podemos chegar à conclusão que realmente é um quadrado, procede?

Marcelo: Prezado Pedro, essa é uma das dificuldades talvez de fazer Geometria à distância, mas não me pareceu, se é que eu pude acompanhar os passos, eu não acho que houve uma conclusão ainda sobre isso (tempo).

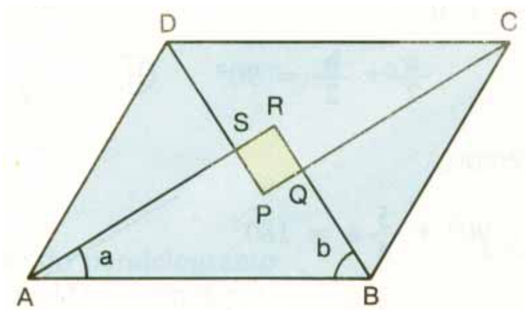
Rúbia: Lincoln, para eu entender então o que você está comentando, se isso que você falou for válido, está resolvido, porque aí LN vai ser igual a MN. Agora a minha dúvida é, como que você está garantindo que EM é exatamente igual a HN e aí, então, porque que você falou que HN é igual a EL, ok?! (tempo)

Marcelo: Pessoal, nós estamos com o tempo terminando e esta questão fica aqui em aberto aqui agora. É claro que medir os ângulos da maneira como foi proposto nós íamos ver, e medindo os segmentos, nós íamos ver que era um quadrado. A questão então que está em aberto é ainda provar que aquele KLMN é um quadrado, estamos quase chegando lá! Mas não tem problema e essa demonstração pode ser omitida de um aluno às vezes da quinta a oitava série, ele apenas ia experienciar que é um quadrado, mas talvez já haja espaço para fazer isso no ensino médio, tá ok?!

A discussão dessa atividade se estendeu para uma interação coletiva além dos encontros síncronos, visto que, por e-mail, demonstrações foram compartilhadas, como a que segue abaixo (quadro 2), enviada pelo grupo de São João Del Rei (Artur, Neusa e Angela):

QUADRO 2 – Solução da equipe de São João Del Rei.

O quadrilátero formado pelas bissetrizes dos ângulos de seu paralelogramo é um retângulo.



Os ângulos A e B são suplementares ($\overline{AD} \,//\, \overline{BC}$ e $\overline{AD}$ é transversal).

Logo:

ângulo A + ângulo B = 180°

a = $\frac{\text{ângulo A}}{2}$ (bissetriz)

= a + b = 90°

2

No triângulo ABR, temos:

a + b + ângulo R = 180°

90° + ângulo R = 180° $\Rightarrow$ ângulo R= 90°

Aplicando em ADS, prova-se que ângulo S = ângulo P= ângulo Q= 90°. Portanto PQRS é retângulo.

Nós também compartilhamos argumentos que justificassem que EFGH é um retângulo e que KLMN é um quadrado (quadro 3).

QUADRO 3 – Solução apresentada por nós, professores.

EFGH é retângulo

(basta que os quatro ângulos sejam de 90°)

Lado BC e AD são paralelos. A semirreta BP é uma transversal que corta essas duas paralelas. Assim sendo os ângulos alternos internos, CBF e APB são iguais. Como BP é bissetriz, o ângulo CBF = APB = ABF. Logo ABP é um triângulo isósceles. E como propriedade desse triângulo temos que sua altura coincide com sua bissetriz, então AF é altura do triângulo ABP. Sendo AF altura, o ângulo AFE = EFG = 90º. E como o mesmo pode ser feito para os ângulos G, E e H concluímos que todos estes têm ângulo de 90º e, portanto, EFGH é retângulo.

Prova de que KLMN é quadrado

(é preciso agora mostrar que os quatro lados têm a mesma medida)

Como EFGH é retângulo EF = GH

Mas como temos as bissetrizes, ANE e GLH são isósceles

Logo EN = NF = GL = LH

Da mesma forma, por EKH ser isósceles, EK = KH

Assim,

EK – NE = KH – NE e como NE = LH

EK – NE = KH – LH

$$\underbrace{EK - NE}_{KN} = \underbrace{KH - LH}_{KL}$$

KN = KL

E como KLMN é retângulo, e KN = KL, então KLMN é quadrado.

Essa atividade sobre as bissetrizes do paralelogramo ilustra como o curso *Geometria com Geometricks* tinha a perspectiva de incentivar a argumentação matemática. Movimentando o quadrilátero ABCD todos visualizavam que EFGH é um retângulo e que KLMN é um quadrado, mas faltava justificar. Procuramos aproveitar os encontros para a colaboração no âmbito da construção coletiva de argumentos que justificassem essas verificações visuais.

ARGUMENTAÇÃO MATEMÁTICA COLABORATIVA

Considerando o ambiente do curso *Geometria com Geometricks*, e a possibilidade de interação síncrona para discutir as atividades realizadas previamente, é possível perceber que as mídias envolvidas no processo de comunicação e exploração matemática, especialmente o SGD Geometricks, atuaram como indutoras de demonstrações, como observam Lourenço (2002) e Marrades e Gutiérrez (2000). Fatores visuais, muitas vezes, propiciavam a convicção dos alunos-professores sobre suas conjecturas, e os faziam sentir a necessidade de uma explicação.

Na atividade exemplificada, os alunos-professores levantaram hipóteses e procuraram justificá-las, explorando o quadrilátero EFGH formado pelas bissetrizes da figura original ABCD e o quadrilátero KLMN formado pelas bissetrizes de EFGH. As ideias e os argumentos foram compartilhados coletivamente, no momento que surgiam. O encontro síncrono possibilitava o diálogo e a interação entre todos os envolvidos nos processos de ensino e aprendizagem. Essa atividade ilustra, ainda, a presença de um processo de abdução e inferência. Depois de traçadas as bissetrizes do paralelogramo ABCD, os alunos-professores se arriscavam, conjecturando que EFGH era um retângulo e, traçadas as bissetrizes dessa figura, levantaram a hipótese de KLMN ser um quadrado, a partir de conhecimentos, valores e crenças construídos ao longo da sua experiência profissional (MISKULIN, 1999). Ademais, é possível perceber que as hipóteses eram, muitas vezes, levantadas pelos próprios alunos (foram eles que concluíram sobre EFGH ser um retângulo e KLMN ser um quadrado) e destaco que os argumentos eram encadeados colaborativamente.

Em alguns momentos as justificativas ocorreram por meio de provas visuais, considerando as condições (confiabilidade, consistência e repetibilidade) apresentadas por Hanna (2000). Para garantir que a construção resistisse ao teste do arrastar foi preciso buscar argumentos matemáticos que a sustentassem, aumentando o papel dos processos heurístico, de exploração e visualização, valorizando os olhos como um órgão que possibilita a descoberta (GARNICA, 1995). Essa abordagem esteve constantemente presente no curso. Como fazíamos uso de videoconferência em quase todos os encontros, a comunicação oral e visual (das construções realizadas no Geometricks) era muito mais utilizada que a escrita (algébrica). Assim sendo, as conjecturas eram levantadas a partir da visualização das figuras construídas no Geometricks e suas justificativas aconteciam oralmente, encadeando-se argumentos que explicassem as propriedades observadas, conforme pode ser notado nas discussões da atividade descrita neste texto.

Havia troca de conhecimento entre os colegas, que procuravam argumentar, ainda que informalmente, sobre a validade das propriedades em cena. As ideias "pipocavam" durante o diálogo. Diferentes possibilidades eram apontadas. Assim, o que se constata é que o desenvolvimento de argumentações deu-se, em sua maioria, a partir do que poderíamos chamar de "abdução colaborativa".

CONCLUSÃO

A abordagem investigativa foi explorada no curso *Geometria com Geometricks*, e as atividades foram elaboradas de forma a estimular os alunos a encontrarem justificativas às suas respostas. Eram propostos problemas abertos, que poderiam ter solução única, mas que em sua maioria poderia ser encontrada percorrendo-se diferentes caminhos. Muitos sabiam usar as propriedades matemáticas no desenvolvimento das atividades, mas não sabiam justificá-las. Hipóteses e conjecturas eram levantadas no decorrer das atividades, sem que houvesse uma explicação.

Quando percebíamos que justificativas e argumentações não eram exploradas, procurávamos debatê-las nos encontros síncronos, já que neles os alunos-professores poderiam pensar coletivamente, trocar ideias, etc. Percebemos que, em sua prática docente, poucos sentiam necessidade de procurar justificativas matemáticas para as conclusões obtidas e, dessa forma, não estavam familiarizados com esse tipo de proposta. Juntos, certamente poderiam valer-se de ajuda mútua, ou mesmo se apropriar da solução apresentada por um colega. Em alguns momentos, sugerimos que tentassem realizar uma demonstração formal do problema em questão.

A mídia atuante possibilitou que ideias fossem compartilhadas e que justificativas fossem elaboradas. No encontro síncrono isso pôde acontecer em tempo real e esse exemplo ilustra o pensar colaborativo, em um processo de aprendizagem de proposições e "argumentações matemáticas". Essa costuma ser uma atividade individual, cada um com seu caderno e livro, na maioria das nossas experiências presenciais e a distância.

Não encontrei referências que abordassem essa questão da argumentação coletiva, *online*. Talvez porque o processo aconteça de forma tão natural que não tenha suscitado questionamentos. Usualmente, professores, especialmente em cursos de nível superior, apresentam algumas demonstrações, explicam como é o processo de encadeamento de argumentos e convidam os alunos a tentar desenvolvê-lo. Apoiados em teoremas, proposições, etc. demonstramos teoremas pensando com lápis, papel e livro. Essa é a prática usual em aulas de Matemática.

De modo geral, influenciado pela forma como as atividades foram concebidas, o curso foi espaço para um diferente formato: demonstrávamos de forma colaborativa, em um ambiente *online*. O encadeamento não era apresentado, ou mesmo elaborado, por uma mesma pessoa, era construído a partir de contribuições de diferentes participantes. Não era possível identificar "o" autor desse processo.

Observo que acompanhar esse encadeamento de justificativas não era trivial, mesmo visualizando as figuras na tela do computador. Talvez por ser uma prática diferente daquela que estamos acostumados, sentíamos dificuldade em seguir as distintas linhas de raciocínio que surgiam e nem sempre se complementavam. Como disse anteriormente, em tempo real tínhamos que seguir o raciocínio dos colegas, que não necessariamente tinha uma sequência lógica, as ideias "pipocavam", cada um compartilhava as suas com os demais, e era preciso esforço para acompanhá-las e organizá-las "ao vivo". Na atividade aqui descrita, chegamos a pedir que fosse enviado por escrito, depois do encontro, a demonstração estruturada. De modo análogo, talvez o leitor tenha encontrado também alguma dificuldade em acompanhar os diálogos, sendo necessária bastante atenção às interações. É uma prática diferente daquela que estamos acostumados a desenvolver em processos de argumentação matemática.

Por fim, é possível afirmar que o curso teve a perspectiva de abordar aspectos da argumentação matemática, procurando fazer dessa busca um pensar coletivo. Destaco que o curso foi um espaço para argumentar coletivamente, e esse processo só foi possível pela presença da mídia em colaboração com humanos (BORBA; VILLARREAL, 2007). Observo que apesar das construções serem baseadas nos livros textos, e dessa forma usuais nas práticas pedagógicas, foi possível perceber que os alunos-professores não tinham o costume de elaborar justificativas para as mesmas. Assim sendo, considero a reflexão dessa dimensão uma contribuição no âmbito da formação continuada. E, não obstante, pontuo que a investigação de experiências em Educação a Distância, cujo foco principal esteja nas propostas em que processos dedutivo, indutivo e abdutivo coletivos sejam vivenciados pelos alunos, é um campo fértil para futuras pesquisas.

REFERÊNCIAS

BOAVIDA, A. M. R. *A argumentação em Matemática*: investigando o trabalho de duas professoras em contexto de colaboração. Tese (Doutorado em Educação), Lisboa: Universidade de Lisboa, 2005.

BORBA, M. C.; MALHEIROS, A. P. S.; AMARAL, R. B. *Educação a distância online*. 2.ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. *Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking*: Information and communication Technologies, Modeling, Visualization and Experimentation. New York: Kluwer, 2005. 229p.

FIORENTINI, D. Pesquisar práticas colaborativas ou pesquisar colaborativamente? In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.). *Pesquisa qualitativa em Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2004. p.47-76.

FERREIRA, A. C.; MIORIM, M. A. O grupo de trabalho em educação matemática: análise de um processo vivido. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2., Santos. *Anais*... Santos, 2003. 1 CD-ROM.

GARNICA, A. V. M. *Fascínio da técnica, declínio da crítica: um estudo sobre a prova rigorosa na formação do professor de Matemática*. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1995.

______. Da literatura sobre a prova rigorosa em Educação Matemática: um levantamento. *Quadrante*, v.5, n.1, 1996a.

______. Fascínio da técnica, declínio da crítica: um estudo sobre a prova rigorosa na formação do professor de Matemática. *Zetetiké*, Campinas, SP, v.4, n.5, p.7-28, jan./jun., 1996b.

GOLDENBERG, E. P.; CUOCO, A. A.; MARK, J. A role for geometry in general education?. In: LEHER, R.; CHAZAN, D. *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space*. London: Lawrence Erlbaum Associates, 1998.

HADAS, N.; HERSHKOWITZ, R.; SCHWARZ, B. B. The role of contradiction and uncertainty in promoting the need to prove in dynamic geometry environment. *Educational Studies in Mathematics*, v. 44, 2000.

HANNA, G. The ongoing value of proof. In: PUIG, L.; GUITIÉRREZ, A. (Org.). PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, *Proceedings*... Valencia-Espanha, 1996.

JOSEPHSON, J.; JOSEPHSON, S. *Abductive Inference*: Computation, Philosophy, Technology. Cambridge, 1996.

LABORDE, C. Relationships between the spatial and theoretical in geometry: the role of computer dynamic representations in problem solving. In: INSLEY, D.; JOHNSON, D. C. (Org.). *Information and communications technologies in school mathematics*. Grenoble: Champman and Hall, 1998.

LOURENÇO, M. L. A demonstração com informática aplicada à Educação. *Bolema*, Ano 15, n.18, p.100-111, 2002.

MARRADES, R.; GUTIÉRREZ, A. Proofs produced by secondary school students learning geometry in dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics*, v. 44, 2000.

MARIOTTI, M. A. Introduction to proof: the mediation of a dynamic software environment. *Educational Studies in Mathematics*, v.44, 2000.

MISKULIN, R. G. S. *Concepções teórico-metodológicas sobre a introdução e a utilização de computadores no processo ensino/aprendizagem da Geometria*. Tese (Doutorado em Educação) Universidade de Campinas, Campinas, SP, 1999.

NACARATO, A.M. A escola como lócus de formação e de aprendizagem: possibilidades e riscos de colaboração. In: FIORENTINI, D.; NACARATO, A.M. (Org.). *Cultura, formação e desenvolvimento profissional de professores que ensinam Matemática*: investigando e teorizando a partir da prática. São Paulo: Musa; Campinas, SP, GEPFPM-PRAPEM-FE/UNICAMP, 2005, p.175-195.

OLIVERO, F. et al. Dragging in Cabri and modalities of transition from conjectures to proofs in geometry. *Proceedings of PME*, Stellenbosh, South Africa: 1998.

PEIRCE, C. S. Semiótica. *Perspectiva*. n.46., 1977.

SCUCUGLIA, R. *A Investigação do Teorema Fundamental do Cálculo com calculadoras gráficas*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Rio Claro: UNESP, 2006.

VILLIERS, M. An alternative approach to proof in dynamic geometry. In: LEHER, R.; CHAZAN, D. *Designing learning environments for developing understanding of Geometry and Space*. London: Lawrence Erlbaum Associates, 1998.

______. Papel e funções da demonstração no trabalho com o Sketchpad. *Educação e Matemática*, n.62, p.31-36, mar./abr. 2001.

ZULATTO, R. B. A. *A natureza da aprendizagem matemática em um ambiente* online *de formação continuada de professores*. 2007. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2007.

______. Concepções Norteadoras do *Design* de um Curso a Distância em Matemática. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10. Belo Horizonte. *Anais*... Belo Horizonte: Universidade Federal de Minas Gerais, Faculdade de Educação, 2006.

______. Um Ambiente Virtual para o Estudo de Geometria. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9. São Paulo. *Anais*... São Paulo: Universidade de São Paulo, FE/USP, 2005.

______. *Professores de Matemática que utilizam softwares de geometria dinâmica*: suas características e perspectivas. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Rio Claro: UNESP, 2002.

ZULATTO, R. B. A.; BORBA, M. C. Diferentes mídias, diferentes tipos de trabalhos coletivos em cursos de formação continuada de professores a distância: pode me passar a caneta, por favor?. In.: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3., Águas de Lindoia, SP, *Anais...*, 2006, p.41–56.

Recebido em: mar. 2011 **Aceito em:** jun. 2011