# Desenvolvendo o pensamento aritmético utilizando os conceitos da Teoria dos Números

*Claudia Lisete Oliveira Groenwald*
*Lisandra de Oliveira Sauer*
*Rosvita Fuelber Franke*

**RESUMO**

*Este artigo objetiva apresentar atividades didáticas envolvendo a Teoria dos Números, analisando o processo de ensino e aprendizagem de conceitos importantes que devem ser desenvolvidos no Ensino Básico, permitindo aos estudantes o refinamento do pensamento aritmético. Apresentamos também uma atividade que pode ser desenvolvida em um curso de formação de professores. Foram investigados os seguintes tópicos: Números Inteiros, Divisibilidade, Máximo Divisor Comum e Congruência de Números Inteiros.*

***Palavras-chave: educação matemática, Teoria dos Números, aritmética.***

**ABSTRACT**

*This article purposes to present didactic activities involving the Number Theory, analysing the teaching process and the learning of important concepts which must be developped in Elementary School, allowing students the refining of the arithmetic thought. We also present an activity that can be developped in a teachers` formation course. The following topics were investigated: Integers Numbers, Divisibility, Greatest Common Divisor and Integers Numbers Congruence.*

***Key words: Mathematics Education, Number Theory, Arithmetic.***

## 1 Introdução

Nas últimas décadas, a Matemática no Brasil passou por vários processos de transformação, o que gerou a necessidade de desenvolver pesquisas em metodologia do ensino da Matemática, levando à criação, no ano de 2000, da área de pesquisa em Ensino de Ciências e Matemática.

Mobilizados e motivados por essa ne-

Claudia Lisete Oliveira Groenwald é Doutora em Ciências da Educação pela Pontifícia de Salamanca - Espanha; professora titular do Curso de Matemática - Licenciatura da ULBRA.

Lisandra de Oliveira Sauer é Mestre em Matemática pela UFRGS; professora adjunta do Curso de Matemática - Licenciatura da ULBRA.

Rosvita Fuelber Franke é Mestre em Matemática pela UFRGS; professora adjunta do Curso de Matemática - Licenciatura da ULBRA.

| ACTA SCIENTIAE | Canoas | v.7 | n.1 | p. 93 - 101 | jan./jun. 2005 |
|---|---|---|---|---|---|

cessidade, investigamos e elaboramos atividades referentes à Teoria dos Números, que é uma área da Matemática que estuda a relação entre os Números Inteiros. Essas relações podem ser desenvolvidas de forma a estimular nos alunos o interesse pela Matemática, aprimorando o raciocínio lógico e ampliando a compreensão dos conceitos básicos para o refinamento do pensamento aritmético, fazendo com que o mesmo desenvolva a capacidade de manipular conceitos e propriedades de forma clara e objetiva.

Nosso grupo de pesquisa investiga atividades didáticas diversas, procurando sempre que possível, contextualizar de maneira histórica os conceitos desenvolvidos a fim de tornar o assunto abordado mais interessante e motivador, tanto para os alunos quanto para os professores.

Com o objetivo de estudar os conceitos elementares da Teoria dos Números, analisando o processo de ensino e aprendizagem de conceitos importantes que devem ser desenvolvidos no Ensino Básico, foram investigados os seguintes tópicos: Números Inteiros, Divisibilidade, Máximo Divisor Comum e Congruência de Números Inteiros.

Foram pesquisadas atividades baseadas na metodologia "Resolução de Problemas" que permitem aos alunos do Ensino Básico desenvolver estratégias de pensamento que melhorem seu raciocínio lógico e algébrico, possibilitando ao aluno pensar produtivamente. Procuramos sempre utilizar recursos, que permitam ao aluno conjeturar, comparar e estabelecer estratégias mentais na resolução de situações problemas.

## 2 Um pouco da história da Teoria dos Números

É na Grécia que primeiro identificamos a Teoria dos Números tal como a entendemos hoje em dia. Foram os pitagóricos que estudaram as relações entre números do ponto de vista que hoje chamamos Teoria dos Números (figura 1).

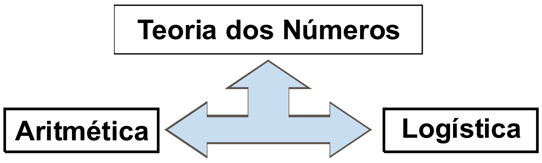


*Figura 1: Relações entre os números segundo os pitagóricos*

A aritmética era o estudo das propriedades fundamentais dos Números Inteiros, domínio dos comerciantes e profissionais da época, a logística é o que chamamos de aritmética nos dias de hoje.

Entre os problemas da Teoria dos Números abordados pelos gregos antigos estão:

- cálculo do máximo divisor comum entre dois números;
- a determinação dos números primos menores que um inteiro dado;
- a demonstração de que há uma infinidade de números primos.

Entre os principais estudiosos dessa teoria podemos citar Euclides de Alexandria (330 -275 a.C), geômetra grego, professor de Matemática a convite do então imperador da parte egípcia da Grécia Antiga: Ptolomeu I. Organizou a obra monumental "Os Elementos", composta de 13 livros. Os livros VII, VIII e IX estão dedicados a Teoria dos Números. Os conceitos numéricos estão expressos em uma linguagem geométrica, Euclides se refere a um número como um segmento $\overline{AB}$, utilizando expressões do tipo "mede A" ou "está medido por" no lugar de é "divisor de" ou é "múltiplo de".

Vários outros matemáticos gregos estudaram problemas da Teoria dos Números. Destes o mais importante foi sem dúvida Diofanto. Sua Aritmética, escrita por volta de 250 d.C., trata principalmente da solução de equações indeterminadas com coeficientes inteiros.

Embora a Matemática tenha sido intensamente estudada por outros autores gregos, e posteriormente árabes, indianos e europeus; a Teoria dos Números caiu em esquecimento até o século XVII.

Bachet, em 1612, publicou o texto original em grego da *Aritmética de Diofanto*, juntamente com uma tradução latina, que era a língua usada pelos eruditos europeus da época.

Entre 1621 e 1636 o francês Pierre de Fermat, magistrado da corte de Toulouse, adquiriu uma cópia deste livro. Fermat leu o texto de Diofanto, anotando na margem as idéias que lhe ocorriam. Isto marcou o início do interesse de Fermat em Teoria dos Números, que posteriormente se expressou em uma torrente de resultados importantes.

Fermat nasceu em 1601, e era um magistrado por profissão e não matemático. Na verdade poucas pessoas viviam de Matemática naquela época. A comunicação entre os matemáticos também era precária, não haviam revistas especializadas. A primeira revista dedicada à Matemática só foi criada em 1794. A comunicação era conduzida principalmente através de cartas, com algumas pessoas servindo de centros difusores dos novos resultados.

O mais famoso divulgador dos resultados obtidos na Matemática foi o frade francês Marin Mersenne. Muito amigo de alguns dos maiores matemáticos da época, como Descartes, Pascal e o próprio Fermat, Mersenne logo comunicava a toda a "*República de Letras*" as novidades matemáticas que chegavam ao seu conhecimento.

Foi na forma de cartas enviadas a Mersenne e a outros matemáticos contemporâneos que boa parte da obra de Fermat ficou conhecida. Depois da morte de Fermat em 1665, coube a Samuel Fermat, filho de Fermat, coletar e publicar a obra de seu pai, dispersa em cartas e anotações. Ele começou com a publicação da *Aritmética de Diofanto*, incluindo todas as anotações feitas por Fermat à margem da sua cópia. Destas anotações a mais famosa é o chamado *Último Teorema de Fermat*: Não existe solução não nula, para a equação $x^n + y^n = z^n$, onde $n \geq 3$ e x, y e z números inteiros. Este resultado só foi provado em 1995, pelo inglês Andrew Wiles, quase 300 anos depois de ser anunciado por Fermat.

O sucessor de Fermat foi o suíço Leonhard Euler, que nasceu em 1707, quarenta e dois anos depois da morte de Fermat. Euler publicou uma obra matemática imensa, tendo contribuído para quase todas as áreas da Matemática pura e aplicada existentes no século XVIII. Euler não foi professor de nenhuma universidade, mas esteve ligado a academias científicas na Alemanha e na Rússia. Essas academias eram, na verdade, instituições de pesquisa, cujas atas publicavam primordialmente as contribuições científicas de seus membros.

O interesse de Euler em Teoria dos Números teve início em sua correspondência com Christian Goldbach, foi através dele que Euler chegou à obra de Fermat. Em sua primeira carta a Euler em 1729, Goldbach acrescenta o seguinte PS: *Você conhece a observação de Fermat de que todos os números* $2^{2^n} + 1$ *são primos? Ele disse que não sabia prová-la; nem ninguém conseguiu fazê-lo, que eu tenha conhecimento.*

Euler reage com ceticismo e não demonstra muito interesse, mas Goldbach não desiste e volta ao assunto. Em 1730, Euler começa finalmente a ler a obra de Fermat. Nos anos seguintes ele provaria e estenderia grande parte dos resultados enunciados por Fermat, resolvendo inclusive a questão proposta por Goldbach.

Através de seus trabalhos Euler popularizou a Teoria dos Números como Fermat não havia conseguido.

Podemos destacar dos estudos de Goldbach a famosa conjectura que afirma: "*Todo número par maior que 2 pode ser decomposto na soma de dois números primos*".

Este resultado não foi provado até os dias de hoje.

Porém o desenvolvimento sistemático da Teoria dos Números só teve início com a obra *Disquisitiones arithmeticae* do alemão C. F. Gauss, publicada em 1801.

# 3 Exemplos de atividades para o Ensino Básico

Com o objetivo de que a Teoria dos Números ganhe espaço nos currículos escolares, apresentamos exemplos da utilização dessa teoria no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

## 3.1 Ensino Fundamental

### *3.1.1 Adivinhando o algarismo suprimido*

Pede-se para alguém pensar em um número de vários algarismos e somar esses algarismos. Em seguida pede-se que a pessoa subtraia a soma do número pensado. A pessoa deve então ocultar um algarismo desse último resultado obtido e informar o valor da soma dos algarismos restantes. Com isso o proponente da brincadeira "adivinha" o algarismo que foi ocultado.

Exemplo: Número pensado,

$A = 5436789$

$A - S = 5436789 - (5+4+3+6+7+8+9) = 5436789 - 42 = 5436747$

A pessoa oculta, por exemplo, o algarismo 7 e fornece a soma dos outros que é 5+4+3+6+7+8+9 = 29. Como a soma de todos os algarismos deve ser um múltiplo de 9, "adivinha-se"que o algarismo ocultado é 7, uma vez que 29 + 7 = 36.

Justificamos o fato acima através da seguinte proposição:

*Proposição*: Seja A um número natural formado pelos algarismos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ então A- $S$ é um múltiplo de 9, onde $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ .

*Demonstração*: A prova utiliza a representação decimal do número A:

$A = 10^{n-1} \cdot a_1 + 10^{n-2} \cdot a_2 + \ldots + 10 \cdot a_{n-1} + a_n$, logo,

$A - S = 10^{n-1} \cdot a_1 + 10^{n-2} \cdot a_2 + \ldots + 10 \cdot a_{n-1} + a_n - (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n)$,

$A - S = (10^{n-1} - 1) \cdot a_1 + (10^{n-2} - 1) \cdot a_2 + \ldots + 9 \cdot a_{n-1}$, que é um múltiplo de 9.

### *3.1.2 Anos bissextos e a divisão por 4*[1]

O tempo que a Terra leva para dar a volta em torno do Sol (movimento de translação) é de aproximadamente 365 dias e 6 horas. O que fazer com essa diferença de 6 horas?

Para resolver a questão, um pouco antes do início da Era Cristã, o imperador romano Júlio César implantou o calendário Juliano, que apresenta um dia extra a cada 4 anos. Com isso, de 4 em 4 anos, temos um ano de 366 dias, que é chamado de ano bissexto. O dia "a mais" é 29 de fevereiro.

Havia um pequeno problema a corrigir. É que o período de translação não é exatamente 365 dias e 6 horas, mas de 365 dias, 5 horas, 48 minutos e 46,7 segundos.

Para corrigir o erro resultante dessa diferença, o papa Gregório XIII suprimiu 10 dias do ano de 1582 (5 a 14 de outubro). Além disso, suprimiu o dia 29 de fevereiro de alguns anos terminados em 00, pois os anos terminados em 00 só serão bissextos se forem divididos exatamente por 400. Assim, os anos de 1600 e 2000 são bissextos e os anos de 1700, 1800 e 1900 não são bissextos.

Muitos eventos ocorrem de 4 em 4 anos: a Copa do Mundo de Futebol, as Olimpíadas, as eleições etc. Quanto às Olimpíadas, há um fato curioso: organizadas desde 1896, elas sempre coincidiram com os anos bissextos, com exceção de um único ano, 1900.

Veja no quadro a seguir a seqüência dos anos em que se realizaram as Olimpíadas, reconhecidas pelo comitê olímpico.

Não foram realizadas as Olimpíadas

[1] Atividade desenvolvida em IC financiada pelo CNPq

| ANO | CIDADE | ANO | CIDADE |
|---|---|---|---|
| 1896 | Atenas (Grécia) | 1956 | Melbourne (Austrália) |
| 1900 | Paris (França) | 1960 | Roma (Itália) |
| 1904 | Saint Louis (EUA) | 1964 | Tóquio (Japão) |
| 1908 | Londres (Inglaterra) | 1968 | Cidade do México (México) |
| 1912 | Estocolmo (Suécia) | 1972 | Munique (Alemanha) |
| 1920 | Antuérpia (Bélgica) | 1976 | Montreal (Canadá) |
| 1924 | Paris (França) | 1980 | Moscou (URSS) |
| 1928 | Amsterdã (Holanda) | 1984 | Los Angeles (EUA) |
| 1932 | Los Angeles (EUA) | 1988 | Seul (Coréia do Sul) |
| 1936 | Berlim (Alemanha) | 1992 | Barcelona (Espanha) |
| 1948 | Londres (Inglaterra) | 1996 | Atlanta (EUA) |
| 1952 | Helsinque (Finlândia) | 2000 | Sydney (Austrália) |
| | | 2004 | Atenas (Grécia) |

de 1916, 1940 e 1944 devido às Guerras Mundiais. A Olimpíada realizada em Atenas, em 1906, não foi homologada pelo Comitê Olímpico.

Os números correspondentes aos anos em que as Olimpíadas foram organizadas têm uma particularidade em comum, são números que, divididos por 4 apresentam resto zero. Da forma como foi organizado nosso calendário, todo ano bissexto é múltiplo de 4.

A maneira mais simples de verificar se um ano, que não termina em 00, é bissexto é observar os dois últimos algarismos do ano e determinar se o número formado por eles é divisível por 4.

Vamos considerar, por exemplo, o ano de 1996.

1996 é bissexto. Veja: 1996 = 1900 + 96, onde: 1900 é múltiplo de 100 e 100 é múltiplo de 4; 96 é múltiplo de 4 porque pode ser decomposto em múltiplos de 4 (96 = 80 + 16).

### *3.1.3 Divertimento com calendários*

Tome qualquer calendário. Peça para um amigo escolher 4 dias que formam um quadrado como os quatro abaixo. Seu amigo deve somá-los e informa-lhe a soma dos quatro dias, com essa informação, você poderá descobrir quais são os quatro dias.

Exemplo:

Dias escolhidos: 1, 2, 8 e 9

| segunda | terça | quarta | quinta | sexta | sábado | domingo |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | **2** | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| **8** | **9** | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 |
| 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 |
| 29 | 30 | | | | | |

Soma dos dias: 20

Resolução:

a) O primeiro dia chamaremos de x;

b) Para formarmos um quadrado, deveremos escolher um número consecutivo ao anterior, logo este será da forma x + 1;

c) O próximo número escolhido, deverá ser aquele que se encontra abaixo do primeiro número; para que possamos formar um quadrado, este então será da forma x + 7, devido à sua distância do primeiro número (contando sempre a partir do primeiro para a direita, até chegar no número);

d) O último número deverá ser aquele que está abaixo do segundo número escolhido e consecutivo ao terceiro número, para que assim seja constituído o nosso quadrado 2 x 2 dias; este deverá ser da forma x + 8, devido a sua distância do segundo número (contando sempre a partir do segundo para a direita, até chegar no número).

e) Então, pelos critérios abordados acima, temos que a soma dos quatro dias será:

$x+(x+1)+(x+7)+(x+8)=$ total da soma dos dias (T)

$$4x+16=T$$
$$4x=T-16$$
$$x=\frac{T-16}{4}$$
$$x=\frac{T}{4}-4$$

f) Temos que T = 20, logo:

- o primeiro dia será:

$$x = \frac{20}{4} - 4 \Rightarrow x = 5 - 4 \Rightarrow x = 1$$

- segundo dia: x + 1 = 1 + 1 = 2
- terceiro dia: x + 7 = 1 + 7 = 8
- quarto dia: x + 8 = 1 + 8 = 9

g) Logo os dias escolhidos foram: 1, 2, 8, 9

Portanto o modelo matemático para essa atividade será: $x = \frac{T}{4} - 4$, onde x é o dia escolhido e T é a soma dos dias escolhidos.

## 3.2 Ensino Médio

### *3.2.1 Curiosidade sobre os números de Fibonacci*[2]

Utilizando os números de uma seqüência de Fibonacci afirma-se que a soma de quaisquer 10 termos consecutivos é igual a 11 vezes o sétimo número da seqüência.

Exemplo: Dada a seqüência

3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,...

A soma dos dez primeiros números é igual a $11 \cdot 55 = 605$, porque 55 é sétimo número da seqüência.

Observe-se que vale a igualdade

| | | |
|---|---|---|
| $f_1$ | 3 | 2 |
| $f_2$ | 5 | 4 |
| $f_3$ | 8 | 6 |
| $f_4$ | 13 | 10 |
| $f_5$ | 21 | 16 |
| $f_6$ | 34 | 26 |
| $f_7$ | 55 | 42 |
| $f_8$ | 89 | 68 |
| $f_9$ | 144 | 110 |
| $f_{10}$ | 233 | 178 |
| $f_{11}$ | 377 | 288 |
| $f_{12}$ | 610 | 466 |

[2] Atividade desenvolvida em IC financiada pela ULBRA

$$f_{n+2} - f_2 = 11 f_{n-3};$$

$$f_{12} - f_2 = 11 f_7$$

a. $610 - 5 = 11.55$

$605 = 605$

$$f_{12} - f_2 = 11 f_7$$

b. $466 - 4 = 11.42$

$462 = 462$

Demonstração:
Para a seqüência de Fibonacci temos:
$f_{n+2} - f_2 = 11 f_{n-3}$; para $n = 10$.
Por outro lado,

$$f_{n+2} - f_2 = f_{12} - f_2;$$
$$f_{n+2} - f_2 = f_{11} + f_{10} - f_2;$$
$$f_{n+2} - f_2 = f_{10} + f_9 + f_{10} - f_2;$$
$$f_{n+2} - f_2 = 2 f_{10} + f_9 - f_2;$$
$$f_{n+2} - f_2 = 2(f_9 + f_8) + f_9 - f_2;$$
$$f_{n+2} - f_2 = 3 f_9 + 2 f_8 - f_2;$$
$$f_{n+2} - f_2 = 3(f_8 + f_7) + 2 f_8 - f_2;$$
$$f_{n+2} - f_2 = 5 f_8 + 3 f_7 - f_2;$$
$$f_{n+2} - f_2 = 5(f_7 + f_6) + 3 f_7 - f_2;$$
$$f_{n+2} - f_2 = 8 f_7 + 5 f_6 - f_2;$$
$$f_{n+2} - f_2 = 8(f_6 + f_5) + 5 f_6 - f_2;$$
$$f_{n+2} - f_2 = 13 f_6 + 8 f_5 - f_2;$$
$$f_{n+2} - f_2 = 13(f_5 + f_4) + 8 f_5 - f_2;$$
$$f_{n+2} - f_2 = 21 f_5 + 13 f_4 - f_2;$$
$$f_{n+2} - f_2 = 21(f_4 + f_3) + 13 f_4 - f_2;$$
$$f_{n+2} - f_2 = 34 f_4 + 21 f_3 - f_2;$$
$$f_{n+2} - f_2 = 34(f_3 + f_2) + 21 f_3 - f_2;$$
$$f_{n+2} - f_2 = 55 f_3 + 34 f_2 - f_2;$$
$$f_{n+2} - f_2 = 55(f_2 - f_1) + 33 f_2;$$
$$f_{n+2} - f_2 = 88 f_2 + 55 f_1.$$

Logo $f_{n+2} - f_2 = 11 f_{n-3}$,

$$11f_7 = 11(f_6 + f_5) \Rightarrow 11f_7 = 11(f_5 + f_4 + f_5);$$
$$11f_7 = 11(2f_5 + f_4) \Rightarrow 11f_7 = 11(2(f_4 + f_3) + f_4);$$
$$11f_7 = 11(3f_4 + 2f_3) \Rightarrow 11f_7 = 11(3(f_3 + f_2) + 2f_3);$$
$$11f_7 = 11(5f_3 + 3f_2) \Rightarrow 11f_7 = 11(5(f_2 + f_1) + 3f_2);$$
$$11f_7 = 11(8f_2 + 5f_1) \Rightarrow 11f_7 = 88f_2 + 55f_1.$$

para $n = 10$.

### *3.2.2 Leitor de mentes*

Apresentamos agora uma atividade didática, para os alunos do Ensino Básico, que se utiliza dos conceitos de congruência para sua compreensão: o Leitor de Mentes.

Esta curiosidade pode ser encontrada na página da internet www.aparece.com/leitor_de_mentes.htm

1- Pense em um número de dois dígitos, (como exemplo, utilizaremos o 95)
2- Subtraia deste número a soma dos dígitos do número pensado, (95-14=81)
3- Olhe na tabela abaixo o símbolo correspondente ao número encontrado.
4- Concentre-se no símbolo e clique no quadrado mágico:

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 99 | ♠ | 98 | % | 97 | ♣ | 96 | ♠ | 95 | % | 94 | ♣ | 93 | ♠ | 92 | @ | 91 | & | 90 | ♥ |
| 89 | ♣ | 88 | ♠ | 87 | # | 86 | ♣ | 85 | ♠ | 84 | % | 83 | ♠ | 82 | % | 81 | ♥ | 80 | ♠ |
| 79 | % | 78 | ♠ | 77 | ♣ | 76 | & | 75 | ♣ | 74 | ♠ | 73 | # | 72 | ♥ | 71 | % | 70 | & |
| 69 | ♠ | 68 | ♣ | 67 | @ | 66 | ♠ | 65 | % | 64 | ♣ | 63 | ♥ | 62 | ♠ | 61 | ♠ | 60 | ♣ |
| 59 | ♠ | 58 | % | 57 | ♠ | 56 | $ | 55 | # | 54 | ♥ | 53 | ♠ | 52 | & | 51 | # | 50 | % |
| 49 | & | 48 | ♣ | 47 | ♠ | 46 | ♠ | 45 | ♥ | 44 | ♠ | 43 | % | 42 | ♣ | 41 | ♠ | 40 | ♠ |
| 39 | ♣ | 38 | ♠ | 37 | & | 36 | ♥ | 35 | ♠ | 34 | & | 33 | ♣ | 32 | # | 31 | % | 30 | ♣ |
| 29 | ♠ | 28 | ♠ | 27 | ♥ | 26 | ♠ | 25 | ♣ | 24 | @ | 23 | ♠ | 22 | % | 21 | @ | 20 | ♠ |
| 19 | % | 18 | ♥ | 17 | ♠ | 16 | # | 15 | @ | 14 | % | 13 | @ | 12 | $ | 11 | ♣ | 10 | % |
| 9 | ♥ | 8 | ♠ | 7 | ♠ | 6 | ♠ | 5 | % | 4 | ♠ | 3 | ♠ | 2 | % | 1 | ♠ | 0 | ♣ |

Ao clicar no quadrado, aparecerá o símbolo que o aluno visualizou. No exemplo, que é o número 81, aparecerá o símbolo ♥.

A explicação para essa atividade está baseada na congruência módulo 9, vejamos:

$a \equiv b \pmod 9$ e $a_1 \equiv b \pmod 9$

$a - a_1 \equiv b - b \pmod 9$

$a - a_1 \equiv 0 \pmod 9 \Rightarrow a - a_1$ é divisível por 9

Exemplo: 95 dividido por 9 tem resto 5;
9+5=14 e 14 dividido por 9 tem resto 5;
A diferença 95-14=81 é divisível por 9.

Considerando um número ab de dois algarismos, que pode ser representado por 10a+b, temos: ab - (a+b) = 10a +b - a - b = 9a

Logo, o resultado sempre é divisível por 9 e, analisando a tabela com os símbolos, podemos observar que todos os múltiplos de 9, possuem o mesmo símbolo.

# 4 Exemplo de atividades para um curso de formação de professores

Para motivar o desenvolvimento de tópicos da Teoria de Números no Ensino Básico é importante que os alunos de Cursos de Licenciatura em Matemática analisem o processo de ensino e aprendizagem desses conceitos, tendo a oportunidade de conhecer e atuar com atividades que envolvem essa teoria. Com esse objetivo apresentamos a atividade a seguir.

## 4.1 Que dia é hoje?[3]

Sejam a e b dois inteiros quaisquer e seja m, um inteiro positivo fixo. Dizemos que a é congruente a b módulo *m* se *m* divide a diferença *a - b*, ou seja, existe um inteiro *q* tal que *a - b= m.q*.

Notação: $a \equiv b \pmod{m}$

Ex.: a), $24 \equiv 3 \pmod{7}$ pois $7 \mid (24-3)$

b) $-15 \equiv -63 \pmod{8}$, pois $8 \mid (-15-(-63))$

Chama-se classe residual módulo m de um inteiro a o conjunto de todos os inteiros que são congruentes a a módulo m.

Notação:

$\bar{a}_m = \{x \in Z \mid x \equiv a \pmod{m}\} = \{x \in Z \mid m \mid (x-a)\}$,

ou seja,

$\bar{a}_m = \{x \text{ tal que } x = a + qm,\ q \in Z\}$.

É usual também encontrarmos a seguinte notação:

$\bar{a} = \{x \in Z \mid x = a + qm,\ q \in Z\}$

Exemplo: A classe residual módulo 3 do inteiro 2 é o conjunto:

$2_3 = \{3 \mid x = 2 + 3q,\ q \in Z\} = \{\ldots, -7, -4, -1, 2, 5, 8, \ldots\}$,

$\bar{2} = \{3 \mid x = 2 + 3q,\ q \in Z\} = \{\ldots, -7, -4, -1, 2, 5, 8, \ldots\}$

, ou

Observe que, $2_3 = (-7)_3 = 5_3 = \ldots$, ou seja, apesar dos símbolos serem distintos eles representam um mesmo conjunto (a classe residual módulo 3 do inteiro 2).

Uma aplicação interessante a teoria de congruência e classes residuais é na determinação dos dias da semana em um determinado ano.

Analisaremos um exemplo com o ano de 2003.

Para viabilizar a compreensão, tomaremos como referência o mês de junho, no qual o dia 1º deste mês foi justamente o domingo, dia 2 na segunda-feira, dia 3 na terça-feira e assim sucessivamente até o dia 7 que caiu no sábado. Como as semanas possuem 7 dias, montamos a seguinte tabela:

Tabela 1

| Constantes dos Dias | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| DOMINGO | SEGUNDA | TERÇA | QUARTA | QUINTA | SEXTA | SÁBADO |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 0 |

$\bar{0} \quad 7 \equiv 0 \pmod{7}$

Analisando o dia 13 de junho como exemplo. Sabemos que este dia é uma sexta-feira, e por congruência obtemos, $13 \equiv 6 \pmod{7}$, o que comprova a tabela acima.

Agora analisando o que acontece com os demais meses.

Como junho é o mês de referência, determinamos a ele uma constante c, sendo $c = 0$.

Consideremos agora o dia 30 de junho, temos que $30 \equiv 2 \pmod{7}$, ou seja, este dia é uma segunda-feira, logo o dia 1º de julho será em uma terça-feira, mas $1 \equiv 1 \pmod{7}$, que pela nossa tabela é domingo. Portanto, as classes não estão coincidindo com o dia da semana do mês de julho, conforme a tabela.

Para que possamos determinar o dia do mês posterior, no caso julho, devemos ajustar as classes residuais. Pegamos a cons-

[3] Atividade desenvolvida em IC financiada pela FAPERGS

tante $c = 0$, e a classe residual do último dia do mês de junho e os somamos, obtemos assim a constante do mês (julho) que por sua vez é adicionado a classe residual do dia estudado.

Portanto, para julho temos que $30 \equiv 2 \pmod 7$, logo a constante de julho é $c = 0 + 2 \Rightarrow c = 2$ . E para 1º de julho, concluímos que 1+2=3, logo é uma terça-feira.

Em agosto temos, $31 \equiv 3 \pmod 7$, logo para calcular a constante do mês de agosto, pegamos a constante de julho, $c = 2$ e adicionamos 3, $c = 2 + 3 \Rightarrow c = 5$. E para 25 de agosto temos, $25 \equiv 4 \pmod 7$, assim temos que $5 + 4 = 9$, que pertence a classe residual $\overline{2}$ módulo 7, logo é uma segunda-feira.

Para o mês anterior, no nosso caso maio, devemos achar a classe residual do seu último dia e subtrair da constante do mês de junho, assim obteremos a constante do mês de maio.

Sabemos que maio tem 31 dias, assim, $31 \equiv 3 \pmod 7$ então a constante do mês de maio é $c = 0 - 3 \Rightarrow c = -3$, mas como estamos trabalhamos com valores positivos, temos que a classe residual $-\overline{3}$ módulo 7, também é igual a classe $\overline{4}$, portanto $c = 4$. Para o dia 16 de maio temos, $16 \equiv 2 \pmod 7$, portanto $4 + 2 = 6$, logo uma sexta-feira.

Tomando como referência o mês de junho de 2003, os valores das constantes dos meses restantes estão calculados na tabela 2.

Tabela 2

| Constantes dos Meses do Ano de 2003 | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| JAN | FEV | MAR | ABR | MAIO | JUN | JUL | AGO | SET | OUT | NOV | DEZ |
| 3 | 6 | 6 | 2 | 4 | 0 | 2 | 5 | 1 | 3 | 6 | 1 |

Obs.: O mês de referência sempre terá a constante igual a zero, qualquer mês do ano pode ser tomado como referência, basta relacionar os dias da semana com as classes residuais módulo 7.

## Referências


ALENCAR FILHO, Edgard. Teoria Elementar dos Números. São Paulo: Nobel, 1992.

ASTUDILLO, Maria Teresa González. Divisibilidad. Madrid: Síntesis, 1989.

BOYER, Carl B. História da Matemática. São Paulo, Edgard Blücher/Edusp, 1974.

GÅRDING, Lars. Encontro com a Matemática. Brasília: UnB, 1997.

LOPES, Luís. Manual de Indução Matemática. Rio de Janeiro: Interciência, 1999.

OLIVEIRA SANTOS, José Plínio de. Introdução à Teoria dos Números. IMPA. Rio de Janeiro: CNPq, 1998.

OLIVEIRA, Zelci Clasen. Uma Interpretação geométrica do MDC. Revista do Professor de Matemática nº 29, 3º quadrimestre de 1995.

SHOKRANIAN, Salahoddin; SOARES, Marcos; GODINHO, Hemar. Teoria dos Números. Brasília: UnB, 1999.

VASCONCELOS FREIRE, Benedito Tadeo. Congruência, divisibilidade e adivinhações. Revista do Professor de Matemática 22, 1992, p. 4-10

VÁZQUEZ, Modesto Sierra; ACOSTA, Mario Gonzáles; GARCÍA, Andrés Sánches.