Registros de Representação Semiótica: um Estudo sobre a Parábola

Cristina Aparecida de Melo Piza
Angela Marta Pereira das Dores Savioli

RESUMO

Este artigo relata resultados de uma pesquisa que investigou se o desenvolvimento de uma sequência didática que considera o tratamento, a conversão e a coordenação de diferentes registros de representação semiótica da parábola, com o uso didático da História da Matemática, possibilitaria ao estudante compreender que a parábola caracterizada como seção de um cone ou como lugar geométrico representa o mesmo objeto matemático. A pesquisa fundamentou-se na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Duval (2003). A metodologia empregada foi baseada na Engenharia Didática, envolvendo estudantes da terceira série de um curso de Licenciatura em Matemática. Os resultados mostraram que o desenvolvimento da sequência didática possibilitou aos estudantes, sujeitos dessa pesquisa, compreender que a parábola caracterizada como seção de um cone ou como lugar geométrico, representa o mesmo objeto matemático.

Palavras-chave: Parábola. Registro de Representação Semiótica. Engenharia Didática. Educação Matemática.

Semiotic Representation Registers: a Study about Parabola

ABSTRACT

This article reports the results of a research whose objective was to investigate whether the use of a didactic sequence that considers the treatment, the conversion and coordination of different records of semiotic representation of the parabola, with the didactic use History of the Mathematic, allows students to understand that it characterized as a section of a cone or characterized as locus represents the same mathematical object. Research is well-founded in the Theory of Registers of Semiotic Representations, by Duval (2003). The methodology utilized is based on the Didactic Engineering, involving third year students of a university-level Mathematics teacher-training program. The confrontation between the previous analysis and a posterior analysis showed that the development of the didactic sequence possibilities that the students, understanding that the parabola characterized like section of a cone or characterized as locus represents the same mathematical object.

Key-words: Parabola. Registers of Semiotic Representation. Didactic Engineering. Mathematic Education.

Cristina Aparecida de Melo Piza é Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática – UEL – Londrina. Endereço para correspondência: Av. Joaquim Carlos, 1711, Vila São José - CEP 13920-000, Pedreira, São Paulo, jcmelopiza@hotmail.com

Angela Marta Pereira das Dores Savioli é Doutora em Matemática – USP - SP, Professora Associada, Universidade Estadual de Londrina – UEL: Endereço para correspondência: Centro de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Caixa Postal 6001 - CEP 86051-990 - Londrina – PR, angelamarta@uel.br

INTRODUÇÃO

Considerando importante que o futuro professor de matemática reflita a respeito do tema cônicas, principalmente com relação à parábola, que aparece como gráfico da função quadrática, encaminhamos uma pesquisa abordando essa cônica, tendo como sujeitos estudantes de um curso de formação de professores de Matemática, utilizando como referencial a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, a qual afirma que a coordenação, pelo estudante, dos diferentes registros de representação de um determinado objeto matemático[1], isto é, a percepção de que nos diferentes registros de representação semiótica está representando o mesmo objeto matemático, não acontece espontaneamente, devendo ser incitada durante as aulas.

Conforme os princípios da Engenharia Didática, elaboramos uma sequência didática, contemplando a parábola, que propiciasse a utilização de diferentes registros de representação semiótica, a saber: registros de representação semiótica da parábola como seção de um cone e registros de representação semiótica da parábola como lugar geométrico.

Nosso objetivo era verificar se o desenvolvimento de uma sequência didática, elaborada segundo os referenciais teóricos escolhidos, possibilitaria ao estudante articular diferentes registros de representação semiótica da parábola e compreender que esta, caracterizada como seção de um cone ou como lugar geométrico, representa o mesmo objeto matemático.

A TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA E A PARÁBOLA

Na pesquisa, utilizamos duas caracterizações da parábola: como seção do cone e como lugar geométrico dos pontos do plano que distam igualmente de uma reta fixa d e de um ponto F, não pertencente à d.

Diante da diversidade de registros de representação semiótica para a parábola, abordamos os registros de representação semiótica da mesma como geométricos, em língua natural, gráficos e algébricos, nas duas caracterizações trabalhadas, os quais serão apresentados posteriormente.

Segundo Duval (2004), os diferentes registros de representação semiótica da parábola apontam suas diversas características e podem contribuir para a construção do conhecimento do estudante acerca deste objeto matemático. Assim, será que o estudante reconhece, nos diferentes registros de representação semiótica, de acordo com as caracterizações da parábola distinguidas aqui, o mesmo objeto matemático?

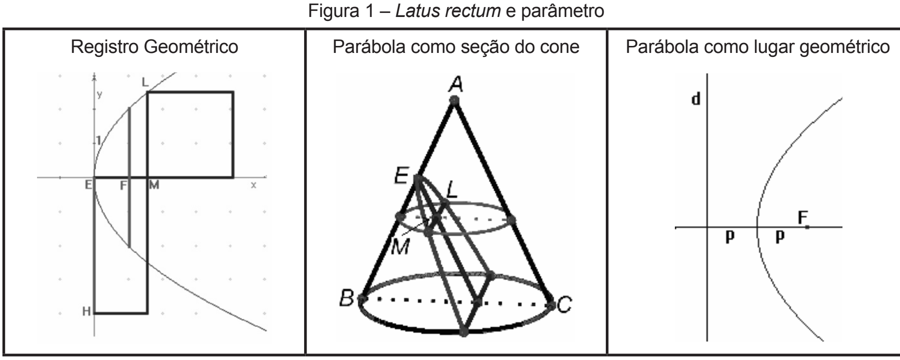
[1] "Objeto matemático é qualquer entidade ou coisa a qual nos referimos ou da qual falamos, seja real, imaginária ou de qualquer outro tipo, que intervém de algum modo na atividade matemática" (FONT et al, 2005, p. 4, tradução nossa).

Damm (1999) responde a esta pergunta, colocando que, de maneira alguma, a coordenação de diferentes registros de representação semiótica é espontânea devendo ser estimulada durante as aulas. Coordenar implica em reconhecer em distintos registros de representação semiótica o mesmo objeto representado e é condição necessária para a compreensão em matemática (DUVAL, 2003).

Além da coordenação, Duval (2003) define o tratamento como sendo uma transformação interna a um registro, e a conversão, que seria a transformação de um registro de representação semiótica de um objeto matemático em outro registro de representação semiótica desse mesmo objeto.

Recorrendo à História da Matemática (BOYER, 1974; EVES, 1997; KATZ, 1998; KLINE, 1972), identificamos uma possibilidade de promover uma articulação entre as caracterizações da parábola como seção do cone e como lugar geométrico. A Figura 1 é referente a uma construção, presente em alguma das atividades da sequência didática, na qual, no mesmo sistema cartesiano, sugerimos o registro de representação semiótica gráfico da parábola como lugar geométrico e da propriedade fundamental da parábola deduzida por Apolônio, ou seja, o registro geométrico. Por meio desta construção, esperávamos que o estudante percebesse que, na parábola como lugar geométrico, a corda que passa pelo foco (parâmetro) é de medida equivalente ao lado $\overline{EH}$ do retângulo (*latus rectum*) proposto por Apolônio.

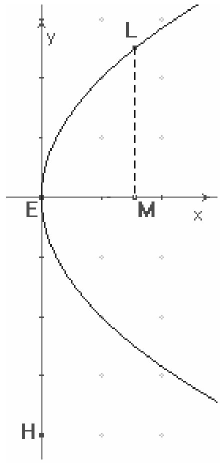
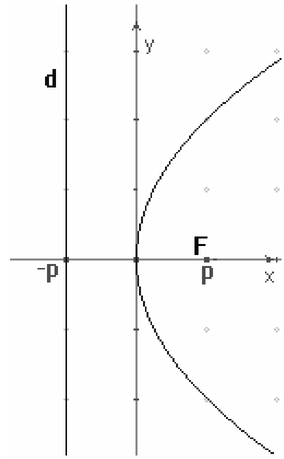
Figura 1 – *Latus rectum* e parâmetro



Analisando os registros de representação semiótica na forma algébrica y^2 4px (da parábola como seção de um cone) e $\overline{LM}^2 = \overline{EH}.\ \overline{EM}$ (da parábola como lugar geométrico), no plano cartesiano, a intenção era que o estudante compreendesse que para qualquer ponto da parábola representada, tanto no plano cartesiano quanto no cone, o quadrado da ordenada desse ponto é igual ao retângulo formado pela abscissa do mesmo ponto e pelo parâmetro ou *latus rectum.* Dessa maneira, acreditávamos em uma possível coordenação de diferentes registros de representação semiótica da parábola.

A seguir, apresentamos, no Quadro 1, os registros de representação semiótica da parábola abordados na pesquisa.

Quadro 1 – Diferentes registros de representação semiótica da Parábola - Fonte: Autor

Registro em Língua Natural	Curva gerada pela intersecção de um plano paralelo a geratriz de um cone.	Lugar geométrico dos pontos do plano que distam igualmente de uma reta fixa d, chamada diretriz, e de um ponto fixo F, não pertencente à diretriz, chamado foco.
Registro Gráfico		
Registro Algébrico	$\overline{LM}^2 = \overline{EH}.\ \overline{EM}$	$y^2= 4px$

DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA

A investigação se desenvolveu de acordo com as quatro fases da Engenharia Didática, caracterizadas por Artigue (1996), como análise preliminar; concepção e análise *a priori*, experimentação e análise *a posteriori* e validação.

Na análise preliminar, verificamos nas ementas das disciplinas de Cursos de Licenciatura em Matemática das Universidades Estaduais do Paraná, em que série ou séries as cônicas são trabalhadas. Por meio da análise de livros didáticos constatamos quais cônicas são, possivelmente, estudadas, que caracterizações são apresentadas, ou seja, como se dá, provavelmente, o ensino deste tema na formação de professores. Apresentamos, a seguir, os livros analisados e um breve comentário a respeito destes.

1. BOULOS, P.; CAMARGO, I. *Geometria analítica*: um tratamento vetorial. 3ª ed. São Paulo: Prentice Hall, 2005.

2. LEITHOLD, L. *O cálculo com geometria analítica*. v. 1. São Paulo: Harbra, 1986.

3. STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. *Geometria analítica.* 2ª ed. São Paulo: McGrawHill, 1987.

4. VENTURI, J. J. *Cônicas e Quádricas*. Curitiba: Artes Gráficas e Ed. Unificado, 1994.

O Quadro 2, a seguir, mostra na primeira linha, os livros analisados e, na primeira coluna, quais aspectos relacionados à parábola contemplam ou não.

Quadro 2: Análise de livros-textos

	BOULOS	LEITHOLD	STEINBRUCH	VENTURI
Presença da história das Cônicas	sim	sim	não	sim
Traçado manual com régua e compasso	sim	não	não	sim
Definição da parábola como lugar geométrico	sim	sim	sim	sim
Referência à curva como lugar geométrico	sim	não	sim	sim
Estudo de equações cartesianas da parábola	sim	sim	sim	sim
Definição da parábola como seção de um cone	sim	sim	sim	sim
Dedução da propriedade fundamental da parábola	não	não	não	não
Mostra que as duas definições da parábola dizem respeito ao mesmo objeto matemático	não	não	não	não

Quanto aos livros didáticos, em uma primeira análise, notamos que as cônicas, como seção de um cone e como lugar geométrico, são abordadas, porém, em momentos distintos, sem o estabelecimento de alguma relação entre as caracterizações, a não ser, a nomenclatura das curvas. Isso foi suficiente para que propuséssemos a pesquisa, contemplando em uma sequência didática, das três curvas, a parábola.

Verificamos que a literatura analisada não garante que, por meio dela, o estudante identificará, matematicamente, que as duas caracterizações referem-se à mesma curva. Pressupondo que, nos cursos de formação de professores, as cônicas são trabalhadas tal qual a literatura sugere, acreditamos que sozinho o estudante não compreende que as diferentes caracterizações de uma mesma cônica dizem respeito à mesma curva, necessitando de alguma intervenção para a construção desse conhecimento. Segundo Bongiovanni (2001),

> [...] a apropriação de um conceito amplo como o de cônicas envolve uma rede complexa de relações, baseadas ao mesmo tempo, sobre a apropriação de suas diferentes representações em vários meios de expressão e sobre a construção da conexão entre suas diferentes representações (BONGIOVANNI, 2001, p. 13, tradução nossa).

Sugerimos a utilização didática da História da Matemática para promover tal coordenação da seguinte maneira: deduz-se a equação da parábola caracterizada como lugar geométrico e a propriedade fundamental da parábola caracterizada como seção de um cone (deduzida por Apolônio[2]) e mostra-se, matematicamente, que estes dois registros de representação semiótica algébricos são equivalentes, ou seja, representam o mesmo objeto matemático.

Observamos igualmente que as cônicas são estudadas, geralmente, unicamente na 1ª série ou, nesta e na 2ª série do curso de graduação. Este fato nos motivou a escolher

[2] Veja dedução da propriedade fundamental da parábola em Katz (1998).

estudantes da 3ª série da Licenciatura de um Curso de Matemática como sujeitos de pesquisa, pois gostaríamos de trabalhar com alunos que já tivessem estudado cônicas. Dessa forma, poderíamos investigar se eles conheciam, matematicamente, que as diferentes caracterizações, em particular, da parábola, que já haviam estudado, diziam respeito ao mesmo objeto matemático.

Após as análises preliminares, partimos para a construção da sequência didática. Mesmo tendo como sujeitos de pesquisa indivíduos que já haviam estudado a parábola, decidimos trabalhar com a definição desta como seção de um cone e como lugar geométrico, além de propor o tratamento analítico considerando a curva com vértice na origem do sistema cartesiano. Pretendíamos constatar se os sujeitos realmente haviam construído o conhecimento acerca destas duas caracterizações da parábola. Caso não o tivessem, ofereceríamos a eles a oportunidade de fazê-lo para que pudéssemos verificar se a utilização dessa sequência didática possibilitaria ao estudante compreender que as duas caracterizações abordadas referiam-se ao mesmo objeto matemático. Propusemos o tratamento analítico para que o estudante observasse que a equação da curva, caracterizada como lugar geométrico, é equivalente à propriedade fundamental da curva caracterizada como seção de um cone, tratando-se, portanto, do mesmo objeto matemático. A seguir apresentamos a primeira etapa da sequência didática, a qual é discutida neste trabalho.

1. Construa uma parábola, por meio de traçado manual, conhecidos a Diretriz *d* e o Foco *F* (GIONGO, 1975, adaptado).

<u>Procedimentos:</u>

- Por *F* traçar a reta t perpendicular a *d* da seguinte maneira:

- com centro do compasso em *F* e raio qualquer marcar os pontos B e C em *d*;

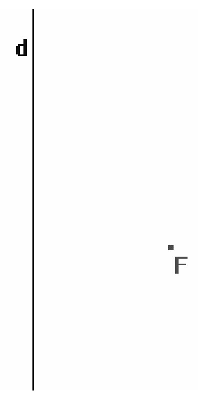
- com centro em B e raio qualquer traçar arcos acima e abaixo de *d*;

- com centro em C e mesmo raio obter a perpendicular t à reta *d.*

- Chamar A o ponto de intersecção entre *d* e t.
- Marcar o ponto médio O entre A e *F*.
- O é o vértice da parábola.
- Sobre a reta t, a partir de O, na direção de *F*, marcar dois pontos D e D', quaisquer.
- Por D, traçar perpendicular r à reta t.
- Por D', traçar perpendicular s à reta t.
- Com centro em *F* e raio $\overline{AD}$, cortar a perpendicular r em M e M', que são pontos da parábola.

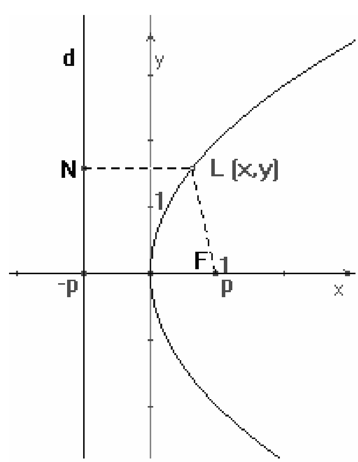
- Com centro em *F* e raio $\overline{AD}$, cortar a perpendicular s em N e N', que são pontos da parábola.
- Analogamente, obtêm-se outros pontos da curva que unidos representarão a parábola.

Ao concluir a construção, responda: Considerando um ponto qualquer da parábola, que relação há entre a distância deste ponto à *diretriz* e a distância deste mesmo ponto ao *foco*? Por meio de que procedimentos da construção sua resposta pode ser justificada?



2. Vamos agora estudar alguns registros de representação da parábola caracterizada como lugar geométrico a partir do plano cartesiano:

a) Seja o sistema de coordenadas, conforme a figura a seguir, L (x, y) um ponto da curva e F (p, 0) o foco. Pela definição da parábola como lugar geométrico, $\overline{LN} = \overline{LF}$. Encontre a equação da parábola em função de x.



b) Esboce o gráfico e, como no item anterior, determine a equação da parábola que tem como diretriz a reta de equação x = p e como foco o ponto F(-p, 0).

c) Compare as equações e seus respectivos gráficos encontrados nos itens a e b e escreva suas conclusões.

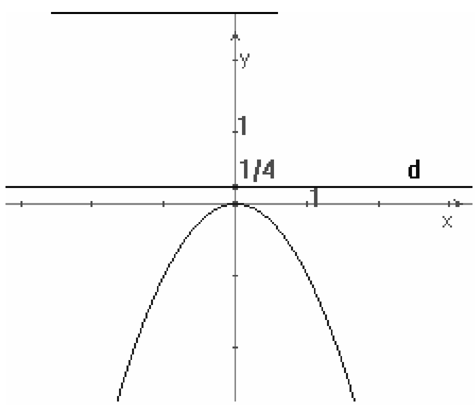
d) Esboce o gráfico e determine a equação da parábola que tem como diretriz a reta de equação y = -p e como foco o ponto F(0, p).

e) Esboce o gráfico e encontre a equação da parábola que tem como diretriz a reta de equação y = p e como foco o ponto F(0, -p).

f) Escreva suas conclusões, depois de comparar as equações e seus respectivos gráficos dos itens d e e.

3. Esboce o gráfico da parábola de equação $y^2 = 4x$. Dê as coordenadas do foco, do vértice e a equação da diretriz.

4. Dada a equação da diretriz y = ¼, determine a equação e as coordenadas do foco da parábola representada no gráfico seguinte:

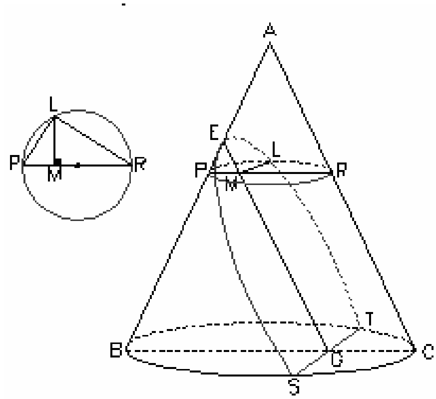


5. Escreva a equação da parábola que tem como diretriz a reta de equação y = -2 e como foco o ponto F (0,2). Esboce o gráfico.

6. Historicamente, vemos que apesar da abordagem de Apolônio, com respeito às Cônicas, ser inicialmente tridimensional, ele estudou estas curvas como figuras planas (BOYER, 1974).

Veremos agora, de acordo com Katz (1998), como Apolônio determinou a propriedade fundamental da parábola, chamada também de *symptome* da parábola.

Ele começa tomando um ponto arbitrário L na seção (veja figura seguinte), passando por L um plano paralelo à base circular. A seção do cone obtida por esse plano é um círculo com diâmetro $\overline{PR}$. Seja M a intersecção deste plano com o segmento $\overline{EG}$. Então $\overline{LM}$ é perpendicular a $\overline{PR}$, e, portanto, $\overline{LM}^2 = \overline{PM}.\overline{MR}$.

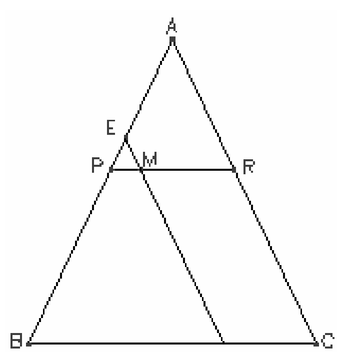


Se $\overline{EG}$ é paralelo a $\overline{AC}$, um lado do triângulo axial[3], Apolônio deriva a *symptome* da parábola, ou seja, a relação entre $\overline{EM}$ e $\overline{LM}$, a abscissa e a ordenada, respectivamente, do ponto L da curva. Para isso, ele desenha $\overline{EH}$ (*latus rectum*) perpendicular a $\overline{EM}$ tal que

$$\frac{\overline{EH}}{\overline{EA}} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{BA}\ \overline{AC}}$$

a) Verifique as igualdades e justifique sua resposta:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{PM}}{\overline{EM}} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{BC}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{MR}}{\overline{BA}}$$



[3] É a região triangular obtida pela intersecção do cone com um plano que contém o eixo do mesmo.

b) Mostre que

$$\frac{\overline{EH}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{MR}}{\overline{BA}}\,\frac{\overline{PM}}{\overline{EM}}$$

c) Verifique se é válida a igualdade e justifique sua resposta.

$$\frac{\overline{EH}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{EH}}{\overline{EA}}\,\frac{\overline{EM}}{\overline{EM}}$$

d) Utilizando os itens anteriores e lembrando que $\overline{EH}^2 = \overline{PM}.\overline{MR}$, mostre que $\overline{LM}^2 = \overline{EH}.\overline{EM}$.

e) Dê, com suas palavras, uma interpretação geométrica para a propriedade fundamental da parábola $\overline{LM}^2 = \overline{EH}.\overline{EM}$.

7. Vamos analisar a propriedade $\overline{LM}^2 = \overline{EH}.\overline{EM}$, deduzida por Apolônio, aplicada à parábola de equação $y^2 = x$. Para isso, construa, no plano cartesiano, o gráfico da parábola $y^2 = x$, encontre o foco F e faça o seguinte:

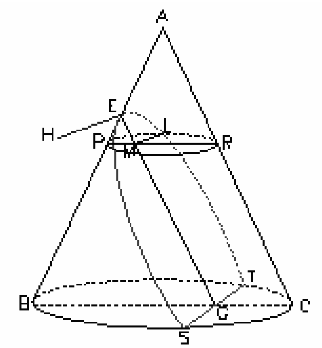
- trace o segmento $\overline{AB}$ perpendicular ao eixo de simetria da parábola em F com os pontos A e B pertencentes à curva;
- determine o comprimento $\overline{AB}$;
- marque o ponto L (4, 2) sobre a curva ;
- construa sobre o eixo x, à direita da abscissa 4, o quadrado da ordenada de L;
- construa um retângulo de área equivalente a do quadrado, sendo um de seus lados a abscissa de L.

a) Qual a relação entre o comprimento $\overline{AB}$ e o coeficiente de x na equação da parábola? Como é denominado o comprimento $\overline{AB}$ então?

b) Como Apolônio denominava o comprimento do lado do retângulo construído sobre o eixo y? Compare o comprimento deste lado com o comprimento $\overline{AB}$. O que você conclui?

8. Dê, com suas palavras, uma interpretação geométrica para a equação da parábola $y^2 = 4px$. Compare sua resposta com a interpretação geométrica dada para a propriedade $\overline{LM}^2 = \overline{EH}.\overline{EM}$, no item e da questão 6.

9. A parábola caracterizada como seção de um cone e a parábola caracterizada como lugar geométrico representam exatamente a mesma curva? Para responder a esta questão, considere a parábola representada no cone a seguir:



a) Introduza num sistema de coordenadas cartesianas a parábola e os pontos L, M, E e H e verifique, algebricamente, se a *symptome* da parábola $\overline{LM}^2 = \overline{EH}.\overline{EM}$, é equivalente à equação da parábola $y^2 = 4px$ definida analiticamente.

Durante a elaboração da sequência didática, quando da análise *a priori*, foram previstas ações e comportamentos dos estudantes durante a experimentação, indicando de que modo as atividades propostas propiciariam a aprendizagem desejada. Após a aplicação da sequência didática, esperávamos que os estudantes fossem capazes de:

- caracterizar a parábola como seção de um cone;
- caracterizar a parábola como lugar geométrico;
- realizar os tratamentos e conversões envolvidas no estudo analítico da parábola, considerando a curva com vértice na origem do sistema cartesiano;
- realizar a coordenação entre as caracterizações da parábola, especificamente, como seção de um cone e como lugar geométrico,
- relacionar *latus rectum* e parâmetro.

A experimentação ocorreu no segundo semestre de 2008, em uma turma de 19 estudantes da 3ª série de um curso de licenciatura em Matemática de uma Universidade Estadual Paranaense. Dos 19 estudantes, apenas oito concluíram a resolução das atividades propostas, as quais foram separadas para análise. Esses oito estudantes foram identificados por E1,..., E8 e assinaram um termo de consentimento livre e esclarecido.

A aplicação da sequência didática foi dividida em duas etapas. A primeira, constituída de nove questões, foi aplicada durante 10 aulas divididas em três encontros.

A cada encontro, disponibilizamos questões da sequência didática, as quais foram resolvidas pelos estudantes em uma situação que permitia discussões, sendo seus registros escritos entregues às pesquisadoras ao final da atividade. Durante os encontros, registramos qualquer fato ocorrido em relação ao desenvolvimento do trabalho que nos chamasse atenção. Os estudantes organizaram-se em duplas, o que promoveu interação entre eles. Nesta primeira etapa, procuramos interferir o menos possível durante a resolução das atividades, mas auxiliávamos os estudantes sempre que necessário.

Além das ações previstas para a sequência didática, utilizamos, em alguns momentos, outros materiais impressos; e quando algum esclarecimento se fazia necessário, o quadro negro, régua e compasso foram empregados.

A segunda etapa da sequência didática, composta por seis questões, foi aplicada em apenas uma aula, constituindo-se de uma situação diferente da primeira etapa. Os estudantes receberam o material e trabalharam individualmente, sem acesso às anotações anteriores e sem interferência. Neste mesmo encontro, responderam a um breve questionário a respeito da participação na pesquisa.

RESULTADOS

As análises encaminharam-se no sentido de estabelecer relações entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori*, realizadas para cada uma das ações desenvolvidas na sequência didática.

Na primeira etapa, durante a experimentação, ao abordarmos, especificamente, a parábola como lugar geométrico, constatamos que nenhum dos estudantes lembrava-se do que era um lugar geométrico e, menos ainda, da propriedade que fazia da parábola um lugar geométrico. Após a aplicação da sequência didática, *verificamos que os estudantes caracterizavam a parábola como lugar geométrico*, por meio de seu registro de representação semiótica geométrico e em língua natural.

Nas questões de número dois e cinco, constantes na primeira etapa da sequência didática, consideramos a parábola como lugar geométrico, mas conferindo um tratamento analítico com o vértice da curva na origem do sistema cartesiano. Os estudantes tiveram mais dificuldades para resolverem estas questões, sendo que isto não era esperado, pois, por meio das análises preliminares, constatamos que o estudo das cônicas é, predominantemente, analítico nas licenciaturas em Matemática. A maioria dos estudantes precisou de ajuda para realizar os tratamentos e as conversões envolvidos especialmente na questão dois. A sistematização ocorrida ao final da resolução das referidas questões fez com que eles não apresentassem muitas dificuldades para resolver as questões três, quatro e cinco.

Já na segunda etapa[4], justamente nas duas questões que abordavam o tratamento analítico da parábola, as dúvidas reapareceram. De oito estudantes, apenas três as resolveram corretamente. Apesar da *maioria dos estudantes não realizar de maneira satisfatória os tratamentos e as conversões propostos no estudo analítico* aqui tratado, isso não nos impediu de continuar o trabalho, pois verificamos que eles reconheciam a parábola no registro de representação semiótica algébrico $y^2= 4px$, realizando a conversão

[4] Contemplando problemas semelhantes aos da primeira etapa.

deste para o registro de representação semiótica gráfico e até em língua natural. As maiores dificuldades apareciam quando lidavam com cálculos algébricos. A título de exemplo, apresentamos a seguir dois protocolos: do estudante E8, que cometeu um equívoco na escrita das coordenadas do ponto L, que deveria ter abscissa negativa, no item b da questão dois, e problemas na realização dos tratamentos para encontrar a equação da curva; do estudante E4 que demonstrou incerteza na escrita da questão três.

Figura 2 – Protocolo do estudante E8

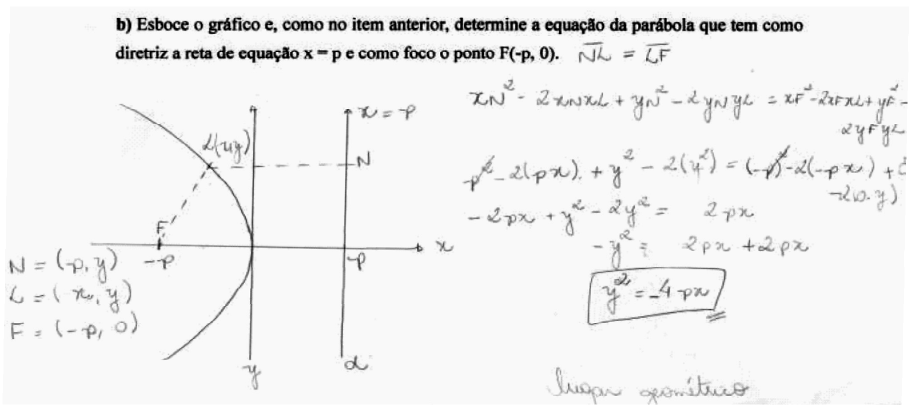
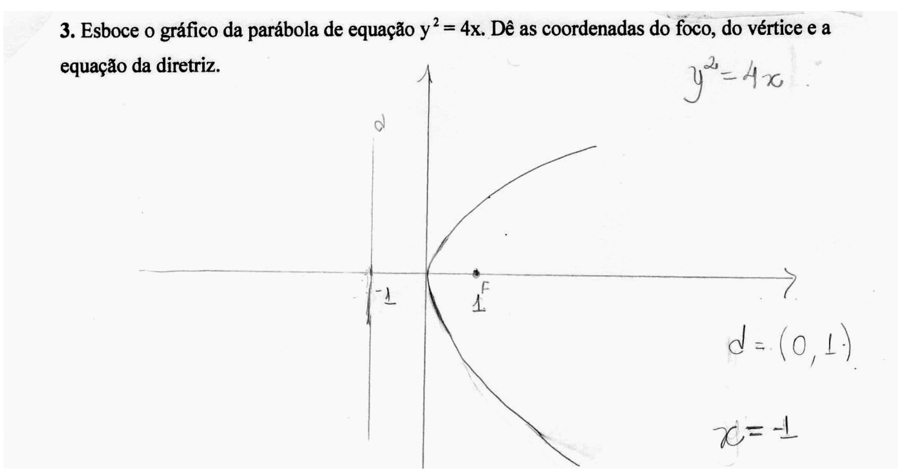


Figura 3 – Protocolo do estudante E4



A parábola, caracterizada como seção de um cone, foi abordada na primeira etapa da sequência didática, quando, com a utilização didática da História da Matemática, iniciamos a sexta questão. Nesta questão, o estudante teve acesso a um breve estudo da história das cônicas, contemplando, especialmente, as cônicas como seção de um cone. Foi apresentado o registro de representação geométrico da parábola como seção do cone e nomeados os elementos necessários para a dedução da *symptome* da parábola, ou seja, para realização da conversão do registro de representação geométrico para o registro de representação algébrico da parábola, neste caso. Propomos então, alguns itens nesta questão, para que, como Apolônio, o estudante deduzisse, utilizando semelhança de triângulos, a referida *symptome* da parábola. Acreditávamos que os estudantes não teriam dificuldades com os tratamentos utilizando a semelhança de triângulos. Realmente a maioria não teve grandes dificuldades, entretanto, alguns estudantes demoraram um pouco a notar que deveriam utilizar seus conhecimentos sobre semelhança de triângulos e também a identificar um triângulo que não estava tão evidente. Somente o estudante E5 não alcançou o objetivo no item d, que era chegar ao registro de representação algébrico ou *symptome* da parábola.

Cabe destacar que, no último item, propusemos ao estudante que escrevesse com suas palavras uma interpretação geométrica da propriedade $\overline{LM}^2 = \overline{EH}.\overline{EM}$, *symptome* da parábola. Interessava-nos verificar se o estudante relacionaria $\overline{LM}^2$ com a área do quadrado da ordenada de L e $\overline{EH}.\overline{EM}$ com a área do retângulo formado pela abscissa de L e pelo *latus rectum* $\overline{EH}$. Além disso, observar-se-ia a equivalência das áreas. Metade dos estudantes não escreveu nada que demonstrasse isso. Dos restantes, o estudante E4 anotou que "*$\overline{LM}^2$ dá idéia de área e $\overline{EH}.\overline{EM}$, base x altura.*" e o estudante E5 escreveu "$\overline{EH}.\overline{EM}$ *é uma multiplicação de números diferentes podendo formar um retângulo.*" Já o estudante E1 explicou "*Área do quadrado = área do retângulo/ $\overline{LM}.\overline{LM} = \overline{EH}.\overline{EM}$*" e, por fim, E8 interpretou "*Podemos observar com a equação que $\overline{LM}^2$ representa a área de duas figuras, onde um dos lados é $\overline{EH}$ e o outro é $\overline{EM}$ em uma figura e na outra figura um lado é $\overline{LM}$ e outro lado é $\overline{LM}$. Sendo assim possuímos duas figuras de áreas iguais e lados diferentes.*"

Analisando estas respostas, verificamos que os estudantes demonstraram relacionar, cada qual a seu modo, $\overline{LM}^2$ à área de um quadrado e $\overline{EH}.\overline{EM}$ à área de um retângulo, com apenas dois deles atentando para a equivalência destas áreas. Como esperávamos, a interpretação geométrica da propriedade $\overline{LM}^2 = \overline{EH}.\overline{EM}$ não ficou clara para os estudantes, pois nenhum deles relacionou $\overline{LM}$ com a ordenada de L (um ponto da parábola), $\overline{EH}$ com o *latus rectum* e. $\overline{EM}$ com a abscissa de L. Dessa forma, vemos que se fez realmente necessário o trabalho com a questão seguinte, de número sete, para oportunizar ao estudante a construção do conhecimento acerca da interpretação geométrica mencionada.

Após a aplicação dessa questão da sequência didática, *verificamos que os estudantes caracterizavam a parábola como seção de um cone.*

Por meio das questões sete, oito e nove, presentes na primeira etapa da sequência didática, proporcionamos aos estudantes a realização da coordenação de diferentes registros de representação semiótica da parábola.

Mediante a aplicação do questionário, somente dois estudantes disseram ter verificado, matematicamente, que a parábola caracterizada como seção de um cone e a parábola caracterizada como lugar geométrico representava a mesma curva. Após a experimentação, verificamos que estes *realizavam a coordenação entre os registros de representação semiótica da parábola, caracterizavam a mesma como seção de um cone e como lugar geométrico, além de relacionarem latus rectum e parâmetro.*

Pudemos concluir, com base nos resultados obtidos, que os estudantes que desenvolveram esta sequência didática, identificaram a parábola nos diferentes registros de representação semiótica abordados. O que promoveu esta coordenação foi a utilização didática da História da Matemática, possibilitando ao estudante compreender que a parábola caracterizada como seção de um cone ou como lugar geométrico representa o mesmo objeto matemático. Por meio das análises realizadas, verificamos a construção de conhecimento matemático, por parte dos estudantes, durante todo o desenvolvimento da sequência didática. As interações estabelecidas, neste caso, entre as professoras, os estudantes, e o saber contribuíram para isso.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Propusemos, neste trabalho, um estudo sobre parábolas, de maneira que o estudante conhecesse a evolução histórica deste tema, bem como diferentes formas com as quais se pode representar, caracterizar ou expressar esse conceito. Acreditamos que assim, contribuímos positivamente para a formação dos futuros professores, sujeitos da pesquisa, propiciando uma melhor compreensão do objeto parábola. Além disso, como pudemos perceber nas análises, o desenvolvimento da sequência didática, elaborada seguindo os referenciais teóricos escolhidos, possibilitou aos estudantes articular diferentes registros de representação semiótica da mesma e compreender que esta, caracterizada como seção de um cone ou como lugar geométrico, representa o mesmo objeto matemático.

Agradecimentos: Este trabalho foi realizado com apoio da Fundação Araucária e da CAPES.

REFERÊNCIAS

ARTIGUE, Michelle. Engenharia Didática. In. BRUN, Jean (Org.). *Didactica das matemáticas*. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 193-217.

BONGIOVANNI, V. *Les caractérisations des coniques avec Cabri-géomètre en formation continue d'enseignants*: étude d'une sequence d'activités et conception d´un hyperdocument. 2001. Tese de Doutorado – Universite Joseph Fourier, Grenoble.

BOYER, Carl B. *História da Matemática*. Brasil: Edgard Blücher, 1974.

DAMM, Regina F. Registros de Representação. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. *Educação Matemática*: uma introdução. São Paulo: EDUC, 1999, p.135- 154.

DUVAL, Raymond. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, Silvia D. A. *Aprendizagem em matemática*: registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003, p.11-34.

_______, Raymond. *Semiosis y pensamiento humano*: registros semióticos y aprendizajes

intelectuales. Colômbia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogia, Grupo de Educación Matemática, 2004.
EVES, H. *Introdução à história da matemática*. 2. ed. Campinas, São Paulo: Unicamp, 1997.
FONT, V. et al. *Enfoque ontosemiótico de las representaciones em educación matemática*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidade de Granada, 2005. Disponível em:<http:/www.ugr.es/~jgodino/funcionessemioticas/enfoque_ontosemiotico_representaciones.pdf>. Acesso em 10 nov. 2008.
GIONGO, Afonso Rocha. *Curso de desenho geométrico*. 26. ed. São Paulo: Nobel, 1975.
KATZ, Victor J. *The history mathematics*: an introduction. 2. ed. Addison Wesley. Longman, 1998.
KLINE, Morris. *Mathematical thought from ancient to modern times*. Nova York, Oxford: Oxford University Press, 1972.

Recebido em: set. 2011 **Aceito em:** nov. 2011