

El enfoque histórico-problémico en la enseñanza de la matemática para ciencias técnicas: el caso de las ecuaciones diferenciales ordinarias

The Historical-problematic Approach in the Teaching of Mathematics for Technical Sciences: the Case of Ordinary Differential Equations

*Juan E. Nápoles Valdés
Arturo González Thomas
Francisco Genes
Federico Basabilbaso
Jose M. Brundo*

Esta capacidad de resolver cualquier problema matemático es un fuerte incentivo para nuestro trabajo. Oímos resonar siempre en nuestros oídos el siguiente llamamiento: este es el problema, busca su solución. La puedes encontrar con el pensamiento puro, ya que en Matemática no existe el ignorabimus

D. Hilbert (En el Segundo Congreso Internacional de Matemáticas, París, 1900, ver Grattan-Guinness, 2000).

RESUMEN

En este trabajo presentamos un enfoque histórico-problémico de un curso de ecuaciones diferenciales ordinarias. Aunque el tratamiento es para un curso general, este puede ser adaptado a otros entornos, como es el de Modelos Numéricos de Ingeniería en Sistemas de Información de la Universidad Tecnológica Nacional (Facultad Regional Resistencia, Argentina), donde aplicamos este enfoque desde hace dos años.

Palabras-clave: Ecuaciones diferenciales, Enseñanza de la matemática, ciencias técnicas.

Juan E. Nápoles Valdés, Doctor en Ciencias Matemáticas, Universidad de Oriente (Cuba), 1994

Arturo González Thomas, Licenciado en Física, Universidad Nacional de la Plata, 1974

Jose M. Brundo, Licenciado en Matemática, Universidad de Buenos Aires, 1975

Francisco Genes, Estudiante Ingeniería Electromecánica (UTN-FRRE)

Federico Basabilbaso, Estudiante Ingeniería en Sistemas de Información (UTN-FRRE)

ABSTRACT

In this paper we present a historical-problematic approach of a ordinary differential equations course. Although the treatment is for a general course, this might be adapted to other environments, like that of Numeric Models of Engineering in Systems of Information of the National Technological University (Regional Faculty Resistencia, Argentina), where we apply this focus for two years.

Key words: Differential equations, teaching of mathematics, technical sciences.

Preliminares

Uno de los fundamentos de la actual reforma de la enseñanza de la matemática es el concepto del que se parte respecto a la naturaleza del conocimiento matemático. La perspectiva histórica permite mostrar, entre otras cosas, que la matemática es un conjunto de conocimientos en evolución continua y que en esta evolución desempeña a menudo un papel de primer orden su interrelación con otros conocimientos y la necesidad de resolver determinados problemas prácticos. Otra consideración importante se deriva del uso, en el proceso histórico de construcción de los conocimientos matemáticos, del razonamiento empírico-inductivo en grado no menor que el razonamiento deductivo.

Todo lo anterior podemos reafirmarlo con el hecho de que el desarrollo de la matemática ha seguido un proceso heurístico –demostrado históricamente (véase Farfán y Hitt, s/f)–, contrario a lo que sostienen los defensores del estilo deductivista, quienes pretenden que la deducción es tanto el patrón de la matemática como la lógica del descubrimiento, al igual que de la mayoría de los conceptos desarrollados por un matemático aislado. Así, cuando se evidencian las raíces históricas de los conceptos, se observan nítidamente las circunstancias que, originalmente, motivaron y promovieron su desarrollo hacia su transformación en parte esencial de teorías coherentes y significativas. Aunque, es necesario subrayarlo, no basta analizar los hechos y conocer la evolución de las ideas y conceptos; también es necesario una visión evaluadora y crítica,

para seleccionar y reconstruir los problemas que realmente pueden ayudar al desarrollo de una actividad creativa.

El problema principal, en la educación matemática, es que estos modelos o metodologías basados en el uso de recursos históricos, no se han llevado –salvo muy pocos casos– al terreno de la enseñanza de la matemática, siendo ellos de necesidad innegable, pues el éxito del proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, depende de una acertada combinación de lo lógico, lo histórico y lo pedagógico.

En la propuesta que más abajo se detalla, nos ha parecido adecuado tomar el tema de las ecuaciones diferenciales ordinarias como base para exponerla. En la enseñanza de la misma, los conceptos relacionados con los procesos infinitos (límites, integración e incluso la propia definición de ecuación diferencial) son evadidos o disfrazados tras una fórmula o algoritmo. Esta costumbre no impide su utilización en determinados ejercicios y situaciones prácticas, pero inhibe la comprensión cabal del concepto (que ya se arrastra desde los cursos de análisis matemático) y lleva al alumno, y en ocasiones a los profesores, a concebir la fórmula como el concepto en sí mismo.

En esta dirección, cabe señalar que el marco didáctico-metodológico, en el que está enmarcada nuestra propuesta, es el siguiente:

1. Concebir de manera dinámica a la matemática, lo que se expresa en la célebre frase de Philip E. Jourdain, en la introducción a su texto *La naturaleza de la matemática*, cuando al

declarar el objetivo central apuntaba: «Espero que conseguiré mostrar que el proceso del descubrimiento matemático es algo vivo y en desarrollo»¹. Esta concepción se refleja en una enseñanza basada en la *resolución de problemas*, tanto para el desarrollo de diversas habilidades lógicas de los alumnos, como para aclarar cuáles de aquellos hechos fueron los que motivaron el surgimiento de un concepto y por qué, cuál era el marco de rigor en aquel entonces, cuál la metodología, las concepciones y cómo influyeron todos estos factores para que el desarrollo de la matemática se diera en una dirección y no en otra.

2. Aceptar el triple significado de los objetos matemáticos: institucional, personal y temporal² (ver Díaz y Batanero (1994); y para algunas observaciones, Nápoles (1997b)).
3. Distinguir entre una *argumentación*, una *prueba* y una *demonstración*, y la necesaria dosificación de éstas en el currículo escolar; así como las discusiones en torno a las concepciones clásicas sobre la demostración matemática y el marco de rigor de las mismas³. El concepto de

prueba matemática no sólo como una verificación formal de un resultado, sino como un argumento convincente, como un medio de comunicación, ha adquirido mayor importancia últimamente sobretodo vinculado a ciertos problemas de educación matemática. Así, se prefieren en ocasiones pruebas que expliquen, en vez de pruebas que sólo “prueben”. Tanto las pruebas que prueban como las pruebas que explican son válidas. Han adquirido relevancia, en los últimos tiempos incluso, las llamadas *pruebas sin palabras*, donde las representaciones geométricas vendrían a jugar el papel de las explicaciones necesarias.

En diversos trabajos anteriores, hemos presentado otros resultados sobre el enfoque histórico-problémico que nos ocupa (ver Nápoles (1997a, 1998); y Nápoles y Negrón, (2002) y (2003)), que si bien son independientes de este trabajo, sirven como un prólogo al mismo. En particular, queremos precisar un poco más las indicaciones didácticas sobre las *ecuaciones diferenciales ordinarias*. Tales indicaciones han sido esbozadas en Nápoles (2000a).

Por otra parte, podemos asegurar que actualmente se experimenta una sensible situación de cambio en los principios metodológicos de la didáctica específica de esta asignatura, motivada por estudios que han penetrado incluso en la ontología y gnoseología de la matemática, su enseñanza y aprendizaje. Es tangible el esfuerzo por introducir desde pregrado las ideas de avanzada que defienden abiertamente la metáfora del profesor investigador, sustentando una postura dinámica de la matemática, que lleva aparejada como metodología de la enseñanza, la de *resolución de problemas*.

Quisiéramos retomar las palabras del Programa Nacional de Resolución de Problemas cuando postula:

¹ Philip E. B. Jourdain, matemático francés (1879-1919), ver Jourdain (1976).

² El conocimiento se produce con **continuidad temporal** y no sólo en el ámbito reconocido **institucionalmente** para ese fin, se produce en **todos los ámbitos de la vida humana**. Los distintos conocimientos que se producen se pueden parcelar para su análisis y calificar a cada una de las facetas separadas con un nombre diferente, sin embargo en el sujeto que conoce tal separación es imposible de modo que la actividad matemática ha de tener en cuenta tal diversidad de fuentes de conocimiento así como los condicionantes que tiene el conocimiento matemático inmerso en el potente conocimiento cultural. Ambos planos de análisis de dentro y de fuera de las instituciones escolares, creemos que pueden ser válidos para aportar luz sobre los procesos cognitivos.

³ Sucintamente podemos decir, que una **argumentación** es la acción de hacerle saber algo a alguien, puede que uno mismo, que una **prueba** es un tipo especial de argumentación que incorpora un valor epistémico verdadero y que **demonstración** es una prueba lógicamente concluyente.

La Matemática es un modo de pensar; un estilo de razonar. Sirve para decidir si una idea es razonable o al menos para establecer si una idea es probablemente adecuada para lo que se busca. La Matemática es un campo abierto a la exploración y a la investigación y todos los días se producen ideas nuevas y féculas. Es un modo de pensar que sirve para resolver los problemas de la ciencia, de la administración, de la industria, etc. (ver información detallada en <http://www.me.gov.ar/curriform/publicaciones2002/reuegb3poli/estrategias.pdf>)

Otras cuestiones relacionadas con los problemas matemáticos (su clasificación, estrategias para su solución y construcción) pueden ser consultados en Nápoles (1999, 2000b y 2000c) y Nápoles y Cruz (2000).

Indudablemente las ciencias matemáticas, así como el ejercicio de su enseñanza, a lo largo de toda su historia, siempre han tenido como principal medio y fin la resolución de problemas matemáticos. Halmos no puede ser más elocuente al respecto, cuando afirma que los problemas son «el corazón de la Matemática» (1980, p.524). La resolución de problemas entraña el engranaje de disímiles recursos cognoscitivos por parte del resolutor. Para éste, resolver un problema debe servir no sólo para un simple entrenamiento intelectual, sino también para un sano y agradable entretenimiento.

Este trabajo es el resultado del trabajo investigativo del Grupo de Investigación en Educación Matemática (GIEMat), que dirige el primer autor y como un primer paso, diagnosticamos algunas de las dificultades con que arribaban los estudiantes de Ingeniería en Sistemas de Información de la UTN (Facultad Regional Resistencia) al curso de Modelos Numéricos:

1. La noción de función, en términos de pares numéricos tal y como ellos la necesitan, no la conocen, pues no logran reconocerla en la definición que manejaron. Así, consideran que la salida

numérica de un programa, no es una función, sino una tabla de valores únicamente.

2. La ausencia de conocimiento de los números complejos, impide el mejor desarrollo de la Matemática “necesaria”. En muchas ocasiones, se debe trabajar en \mathbb{R}^2 cuando lo correcto es hacerlo en \mathbb{C} , y en el caso de las EDO, los métodos de solución operacionales, hay que tratarlos de forma diferente y no completa.

3. Los conceptos matemáticos como límite, continuidad, derivada e integral, fueron asimilados de la manera tradicional, cuando a estudiantes de este tipo, le son necesarios otros enfoques, por ejemplo, la noción de convergencia en términos de distancia (lo que les permitirá comprender de manera natural la noción de error); lo continuo siempre es discretizado; la interpretación geométrica de la derivada (la secante no es la única aproximación posible, se puede construir una poligonal que se aproxime a la curva); y en la integración, la noción de integrabilidad es vital y no tanto los procedimientos de cálculo como hasta ahora.

4. La Transformada de Laplace, por las dificultades señaladas en los puntos anteriores, no fue asimilada correctamente en términos de entrada-salida. Esto imposibilitó un mejor tratamiento de este tópico, muy necesario para Teoría de Control.

5. En adición al punto 2, debemos señalar que el desconocimiento de las Funciones de Variable Compleja (algo trivial en virtud de la dificultad antes señalada), impidió el tratamiento de iteración de funciones y por tanto, de los fractales, algo que todo ingeniero en sistemas tiene que conocer, por sus múltiples aplicaciones.

6. Los modelos que se tratan en los dos últimos temas, hay que limitarlos a modelos biológicos y mecánicos (que debieron haber sido tratados en cursos anteriores), por considerar que los

alumnos podían asimilarlos mejor, y porque tendrían mayor repercusión en Simulación y Teoría de Control.

Por todo lo anterior, consideramos necesario recomendar lo siguiente:

- Debería hacerse hincapié en la formación e interpretación de los conceptos básicos de la Matemática (con el *enfoque* necesario al perfil). Esto está en consonancia con los lineamientos del nuevo Diseño Curricular de la UTN.
- Consideramos oportuno la implementación de un curso complementario de Matemática, en el que se traten los tópicos: *Números complejos, Funciones de variable compleja, Serie de Fourier y EDO.*
- El punto anterior permitiría que el Análisis Matemático II, pueda contar con un mayor espacio, lo que coadyuvaría a lograr lo señalado en el primer punto de las dificultades.
- En el caso del programa de Modelos Numéricos, sería mejorado con una base más sólida de los alumnos y permitiría el desarrollo de temas como el de los fractales, señalado como una de las falencias de los actuales graduados.

En aras de dar pasos concretos en estas recomendaciones, hemos tomado un tema no demasiado heterogéneo, las ecuaciones diferenciales ordinarias. Además está decir que aunque el tratamiento es para un curso general, éstas pueden ser adaptadas a otros entornos, como es el de *modelos numéricos* de Ingeniería en Sistemas de Información de la Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Resistencia (UTN-FRR), de Argentina, donde aplicamos este enfoque desde hace dos años.

Una propuesta de enfoque histórico-problémico en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales ordinarias

En junio de 1696, en la revista matemática *Acta Eruditorum*, fundada por G. W. Leibniz, aparecía el siguiente problema compuesto por el matemático suizo Jean Bernoulli:

Se invita a los matemáticos a resolver UN NUEVO PROBLEMA: Dados dos puntos A y B en el plano vertical y no colocados en la misma recta vertical, asignar a una partícula móvil M el sendero AMB a lo largo de la cual, descendiendo por su propio peso, pasa del punto A al punto B en el tiempo más breve posible.

Para estimular a los amantes de tales tareas el deseo de realizar la solución de este problema, puede señalarse que la cuestión propuesta no consiste, como pudiera parecer, en una mera especulación sin entidad alguna. Contra lo que uno pensaría a primera vista, tiene gran utilidad en otras ramas de esta ciencia, tales como la Mecánica. Mientras tanto, para prevenir; cualquier juicio prematuro, se puede hacer notar que aunque la línea AB es ciertamente la más corta entre los puntos A y B, no es, con todo, el sendero atravesado en tiempo mínimo. Sin embargo, la curva AMB, cuyo nombre yo daré, si nadie lo ha descubierto antes del final de este año, es una curva bien conocida de los geómetras⁴ (Smith (1929), p.644).

Históricamente, el estudio de las soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias se ha desarrollado en tres grandes escenarios: el algebraico el numérico y el geométrico. Desde este punto de vista histórico, el primer entorno donde se desarrolló la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias es el algebraico.

⁴ Por supuesto que se trata del problema de la braquistócrona, y la curva en cuestión es la cicloide.

Multitud de intentos brindaron los métodos conocidos hoy, muchos de los cuales tienen más de 200 años y que siguen siendo objeto de estudio tanto desde el punto de vista didáctico como matemático.

Desde la perspectiva de la enseñanza, los programas de estudio y los libros de texto nos muestran (a pesar de ejemplos como el anterior), por diversas razones, todavía un predominio del escenario algebraico (con sus variantes), con algunos atisbos de los acercamientos numérico y geométrico. Esto ha traído, como consecuencia, que se tenga una visión muy parcial de los métodos que existen para resolver ecuaciones diferenciales, pues frecuentemente en el estudio de los modelos determinísticos (v.g. electrónica, óptica, etc.) se requiere establecer articulaciones entre los diferentes acercamientos. En otras palabras, si partimos de definir cada uno de sus entornos, tendremos que los programas actuales constan, casi exclusivamente, del enfoque algorítmico-algebraico. Los componentes geométricos (de la teoría cualitativa) y numéricos están prácticamente desaparecidos.

Ahora bien si contamos con un equipamiento informático aceptable, es lógico que se impone la pregunta ¿cómo remediar esta situación?.

Nuestra actitud al resolver esta problemática y elaborar nuestra propuesta, es tener en cuenta los siguientes aspectos integrados.

Uno es precisamente la de mencionar que las ecuaciones diferenciales ordinarias nos sirven, fundamentalmente, para modelar problemas cuya esencia es objeto de estudio por una rama de la ingeniería o de las ciencias: física, química, economía, etc. La primera dificultad que se nos presenta, es que no se puede considerar el fenómeno en estudio exactamente como se manifiesta en la naturaleza, debido a la gran cantidad de aspectos que habría que tener en cuenta y a la consecuente necesidad de conocimientos matemáticos demasiado complejos, lo cual trae como efecto la idealización del problema, en el cual no se

consideran aquellos aspectos del fenómeno que no tienen gran influencia en el objeto de estudio. Por ejemplo, si se quiere describir el movimiento de un péndulo, es posible considerar que el peso de la cuerda es insignificante en el proceso.

Otro aspecto nos conduce a no abandonar el marco algebraico sino, por el contrario, complementarlo con los otros acercamientos, para así tener una mayor riqueza (de conexiones) entre las representaciones y así poseer más herramientas al abordar el estudio de los modelos que están descritos mediante ecuaciones diferenciales, los cuales, principalmente en el nivel al cual va dirigida nuestra propuesta, conducen a ecuaciones de variables separables y lineales (de primer y segundo orden).

El tercero, no jerarquizado, es la implementación del marco geométrico desde el inicio, desarrollando actividades que permitan trazar el conjunto de curvas compatibles con el campo de pendientes. Como sabemos, esto siempre es posible en el caso de ecuaciones de primer orden y en algunas de segundo orden. En cuanto a la puesta en práctica de este acercamiento, se presentan dificultades con el trazado del campo de pendientes (proceso largo que requiere mucha atención y cuidado), cuestión que puede simplificarse con la ayuda del software computacional.⁵ Lo más delicado es el tratamiento gráfico que se da en los cursos tradicionales al concepto *función* (recordemos que en este acercamiento, básicamente lo que tenemos que hacer es graficar funciones que vienen descritas en términos de su derivada). En esta dirección nos podemos auxiliar, al inicio, con una serie de ejercicios que permitan manejar gráficas sin el apoyo de su expresión analítica; en este aspecto son útiles los trabajos realizados por Hitt (1992 y 1995).

El software computacional se debe usar en forma interactiva, proporcionan-

⁵ En particular, hemos usado Derive®, Mathematica® y Graphmatica® fundamentalmente.

do campos de pendientes trazados con la ayuda de la computadora, con el fin de que los estudiantes bosquejen, sobre dicho campo de isoclinas, el conjunto compatible de curvas de solución.

El acercamiento numérico, que en ocasiones no forma parte del programa de estudio actual, cuando se expone en los libros de textos se hace de una forma muy descriptiva, o en algunos casos desarrollando programas en algún lenguaje de programación. Como sabemos, estos se pueden implementar de una forma efectiva mediante el uso de la hoja electrónica Excel. Dentro de nuestra propuesta, tal marco de resolución se puede adoptar desde un inicio como preludio del marco geométrico, ya que nos permite, por un lado, pasar de la construcción (con las quebradas de Euler⁶, por ejemplo) de una solución particular a la solución general y, por otro, articular la representación tabular con la gráfica.

Por último, considerar desde el principio el marco numérico en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales ordinarias (los algoritmos clásicos como el de Euler, Euler mejorado y el de Runge-Kutta), dado que el desarrollo de las modernas computadoras ha hecho posible la implementación de métodos numéricos con una rapidez de convergencia sumamente elevada; de ahí la posibilidad de la utilización de los mismos.

A continuación, proponemos una secuencia de problemas que pueden ser utilizados para dar tratamiento a cada uno de los marcos mencionados, es decir, la secuencia propuesta, permite ir introduciendo los marcos correspondientes y permitiendo, a su vez, que el alumno construya el conocimiento, utilizando la ayuda que le brinda el profesor.

De esta manera, tenemos el siguiente problema, que nos permite introducir el marco algebraico (los métodos de solución) de las diferentes ecuaciones de primer

orden. Creemos que debe utilizarse la Ecuación Lineal (en lugar de sofisticadas aplicaciones que no le significan nada al alumno), pues es la más asequible al estudiante en este estadio de desarrollo.

Problema 1. Obtener la solución de una ecuación diferencial lineal de primer orden

Es bien sabido que la mayoría de los cursos de ecuaciones diferenciales ordinarias comienzan desarrollando ejemplos físicos (desintegración radioactiva), biológicos (crecimiento de poblaciones), etc. Proponemos comenzar con un problema matemático, partiendo del conocimiento que tienen los alumnos del cálculo diferencial, en esencia, sabiendo que la exponencial puede definirse por la ecuación $x' = x$. Es decir, discutimos primeramente resolver la ecuación anterior, y después llegar al siguiente lema:

Lema. Sea $t_0 \in (\alpha, \beta)$. Una función $v: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ es solución de la ecuación diferencial

$$x' = a(t)x, \quad (1)$$

si y solo si, existe una constante real K tal

$$\text{que } v(t) = Ke^{\int_{t_0}^t a(s) ds}, \text{ para todo } t \in (\alpha, \beta).$$

Una vez presentado este resultado de manera heurística, se demuestra muy fácilmente con ayuda del cálculo. Debemos destacar que este lema describe *todas* las soluciones de la ecuación lineal homogénea (1); son todas aquellas

proporcionales a $e^{\int_{t_0}^t a(s) ds}$. Esta discusión preliminar nos sirve para llegar al resultado fundamental:

⁶ Para detalles adicionales, ver Nápoles (1998).

Teorema. Dado el punto (t_0, x_0) perteneciente a la banda $(\alpha, \beta) \times \mathbf{R} := \{(t, x) : \alpha < t < \beta, x \in \mathbf{R}\}$, existe una única solución de la ecuación diferencial

$$x'(t) = a(t)x + b(t)$$

cuya gráfica pasa por dicho punto, y que está definida para todo t del intervalo (α, β) .

En dicho teorema, debe hacerse hincapié que la demostración de existencia de la solución es *constructiva*. No sólo se demuestra la existencia, sino que se da un procedimiento para encontrar la solución que cumple la condición inicial $x(t_0) = x_0$.

Como culminación de todo el

proceso, permitiendo de paso que el alumno adquiriera el método de solución de dicha Ecuación Lineal, recomendamos demostrar la siguiente proposición:

Una función $\varphi(t)$ es la solución de la ecuación diferencial $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$ si y solo si existe una constante C tal que

$$\varphi(t) = \left[\int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^s a(\tau) d\tau} b(s) ds + C \right] e^{\int_{t_0}^t a(s) ds}, \quad \forall t \in (\alpha, \beta).$$

El rol que cumplen los métodos numéricos, y el cuidado que debemos prestarle a su manipulación, lo podemos obtener del siguiente problema.

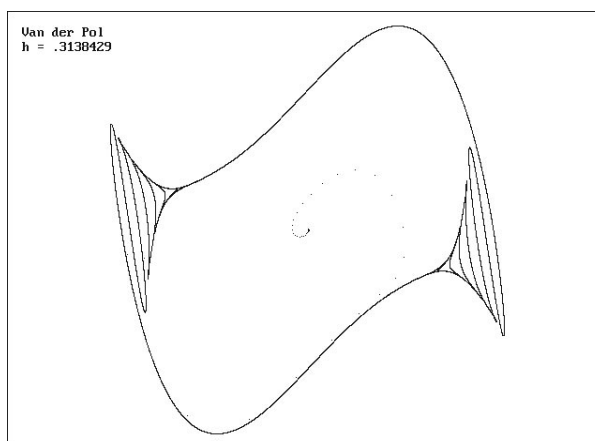


Figura 1. Solución del Oscilador de Van der Pol con $b=1$ y $h=0.3138429$. Fuente: <http://sprott.physics.wisc.edu/chaos/eulermap.htm>.

Problema 2. obtener la solución aproximada de una ecuación (o sistema) de segundo orden

De acuerdo al Teorema de Poincare-Bendixson, el caos no puede ocurrir en sistemas bidimensionales tales como

$$\begin{aligned} dx/dt &= f(x,y), \\ dy/dt &= g(x,y). \end{aligned} \quad (2)$$

No obstante, cuando tales sistemas (de hecho ecuaciones diferenciales de segundo orden) son resueltos numéricamente, pueden llevar a discusiones interesantes y motivadoras. Consideremos el primer método numérico estudiado, desde el punto de vista histórico, el Método de Euler (ver Bakhvalov (1980)) que es muy simple de implementar:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1} &= y_n + hg(x_n, y_n) \end{aligned} \quad (3)$$

donde h es el paso de aproximación. Si h es suficientemente pequeño, la solución del sistema (2) puede ser descrita aproximadamente por (3). Desafortunadamente, si h es grande, la solución numérica se desvía significativamente de la solución real y puede aproximarse a una solución periódica, a un atractor extraño o escapar al infinito.

Como ejemplo, consideremos el oscilador de Van der Pol dado por

$$dx/dt = y, \quad dy/dt = b(1 - x^2)y - x,$$

cuya solución es un ciclo límite. Este modelo es usado para describir el comportamiento de circuitos eléctricos, ciertos tipos de estrellas pulsantes y muchos fenómenos más. Esta ecuación, con $b=1$, es resuelta por el Método de Euler (ver el programa ejecutable en DOS EULERMAP.EXE

en <http://sprott.physics.wisc.edu/chaos/eulermap.htm> cuyo código fuente en BASIC está disponible como EULERMAP.BAS, y con el que se han construido las figuras de este problema). Para h menor que 0.1 la solución es razonablemente aproximada, pero cuando h aumenta, el ciclo límite típico (ver Coddington y Levinson (1955)) se convierte en un comportamiento caótico. Un ejemplo de una solución en el régimen caótico para condiciones iniciales $x_0=y_0=0.01$ se muestra abajo.

Un sistema similar con un ciclo límite circular ($x^2 + y^2 = 1$) es dado por el sistema

$$dx/dt = y, \quad dy/dt = (1 - x^2 - y^2)y - x.$$

Su comportamiento es similar a la Ecuación de Van der Pol y con h suficientemente grande, produce el atractor extraño de la Figura 2.

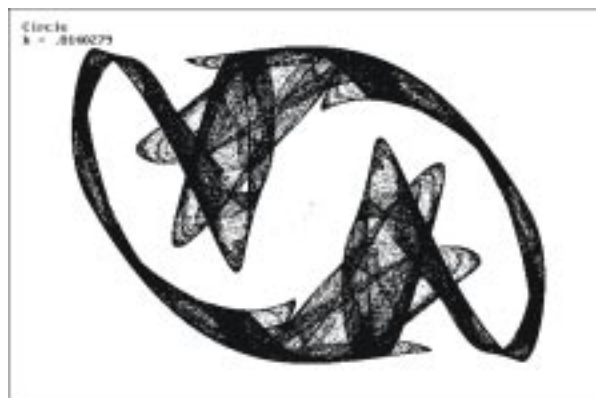


Figura 2. Comportamiento caótico del sistema $x'=y, y' = (1 - x^2 - y^2)y - x$; con $h=0.8140279$. Fuente: <http://sprott.physics.wisc.edu/chaos/eulermap.htm>.

En ausencia de disipación, un sistema Hamiltoniano característico es el oscilador armónico simple $dx/dt = y, dy/dt = -x$, cuyo espacio fase solución, es una trayectoria circular, un centro, en el $(0,0)$. La trayectoria será cerrada después de un período, independientemente de las condiciones iniciales. Cuando la re-

solvemos por el Método de Euler, la trayectoria no se cierra sobre sí misma para cualquier h , sino que forma espirales crecientes, debido a que cada iteración hace avanzar la trayectoria sobre una tangente al círculo en la posición de la iteración previa. Esta situación es mostrada en la Figura 3.

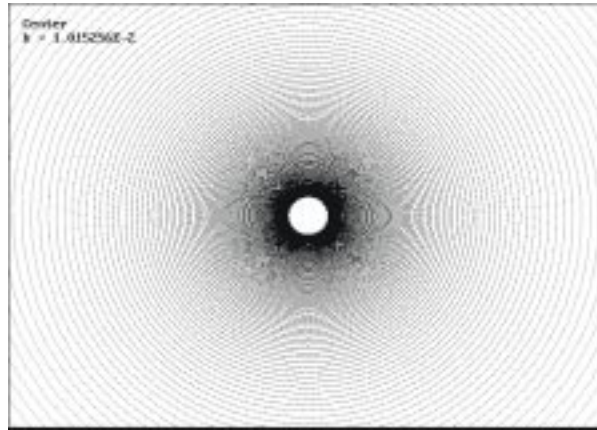


Figura 3. Soluciones del Oscilador Armónico Simple, con un centro en el origen y $h=0.01015256$. Fuente: <http://sprott.physics.wisc.edu/chaos/eulermap.htm>.

Un ejemplo final es dado por el sistema sugerido por Lorenz en su *The Essence of Chaos* (ver Lorenz (1995)),

$$\begin{aligned} dx/dt &= x - y - x^3, \\ dy/dt &= x - x^2y, \end{aligned}$$

el cual también posee un ciclo límite aproximadamente circular. Con un h suficientemente grande, el sistema resuelto por el Método de Euler nos lleva al atractor extraño de la Figura 4.

Todos estos ejemplos nos muestran algo que ya sabíamos; el Método de Euler es muy sensible a los valores de h ; no

obstante, otros métodos numéricos también exhiben el mismo fenómeno si se toma un paso suficientemente grande.

Por sus múltiples aplicaciones técnicas, las ecuaciones diferenciales de segundo orden son muy ilustrativas para el profesional que estamos formando. Por otra parte, el procedimiento algebraico de solución, es genérico para todas las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes de cualquier orden, además de su vinculación con las Aplicaciones Lineales estudiadas en Álgebra. Así sugerimos el siguiente problema.



Figura 4. Soluciones del sistema $x' = x - y - x^3$, $y' = x - x^2y$, usando el Método de Euler con $h=0.5559919$. Fuente: <http://sprott.physics.wisc.edu/chaos/eulermap.htm>.

Problema 3. calcule la solución general de una ecuación diferencial de orden dos

Una cuestión crucial de la concepción actual del curso de ecuaciones diferenciales es su carácter algorítmico-algebraico, la que está determinada básicamente por la relación tan cercana que existe entre el desarrollo del álgebra (como búsqueda de las raíces de un polinomio en términos de radicales) y de las ecuaciones diferenciales lineales (en cuanto a su integración por cuadraturas) del que ya hemos hablado y que aún en la concepción moderna de operadores lineales, está presente. Un bosquejo histórico de las ecuaciones diferenciales ordinarias nos permite hacer las siguientes observaciones respecto al programa actual:

1. El concepto *ecuación diferencial* nace (a fines del siglo XVII) como una ecuación que relaciona diferenciales. Este concepto se mantiene estable hasta que Cauchy (hacia 1821) agrega la derivada. Esta última definición es la que se conserva en la actualidad, desapareciendo los diferenciales, aunque cuando se exponen los métodos de resolución de las *ecuaciones diferenciales ordinarias* de primer orden se usa la primera concepción sin explicitarla (es decir, la derivada ya no es la derivada, sino un cociente entre diferenciales), renaciendo el manejo algebraico del que tanto hemos hablado, pues hace de este método de solución una herramienta “apetecible” desde el punto de vista docente, sin olvidar el auxilio que en dicha labor brinda el *principio de superposición*⁷.

⁷ Principio que nos permite expresar la solución de la suma de dos ecuaciones diferenciales, como la suma de sus soluciones.

2. La forma de introducir las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden en la obra de Euler y Cauchy, es tomando la expresión diferencial $pdx + qdy$, como la diferencial de una cierta función $u = u(x,y)$, y de aquí a $du = 0$ y finalmente a la solución general $u(x,y) = c$. En el caso en que no se pueda encontrar la función $u(x,y)$, construyen un factor de integración que convierte en exacta la ecuación diferencial. Después estudian los otros tipos de ecuaciones diferenciales de primer orden (v.g., las lineales, de Bernoulli, las homogéneas, etc.), teniendo siempre en mente que necesitan construir un factor de integración.

Esta situación, en general, no se conserva en el currículo actual. Los principales hechos que propiciaron esto son la aparición y demostración del Teorema Fundamental del Álgebra (la primera demostración cierta la ofreció Gauss a los veintidós años en su tesis doctoral) que, en su formulación actual, afirma que todo polinomio de grado n en C , tiene exactamente n ceros complejos (iguales o distintos), por lo que C es un dominio numérico que proporciona solución a cualquier ecuación algebraica, y el desarrollo de la Teoría de Funciones de Variable Compleja, resultados que permitieron presentar una teoría de “solubilidad” completa para las ecuaciones lineales de orden n , brindando, de esta manera, una formidable herramienta docente para modelar múltiples fenómenos prácticos.

3. Respecto del programa de estudio actual, existe una clara permanencia del escenario algebraico sobre los otros dos escenarios, el cual se debe, además de la contundencia de la componente histórica y a lo señalado antes, a otros factores de los cuales señalaremos los siguientes:
 - a) Los procedimientos algorítmico-algebraicos son más sencillos de

desarrollar en los estudiantes. Muy vinculado con las tendencias cognitivas y conductistas de la educación matemática que, poco a poco, y en mayor medida gracias al rechazo de las llamadas matemáticas modernas, ha ido desapareciendo y dando lugar al *problem solving*, con una concepción didáctica y epistémica, totalmente diferente.

- b) Instrumentar los escenarios geométrico y numérico en el aula requiere necesariamente de los medios de cómputo, ya que de otra forma es difícil visualizar, v.g., los campos de pendientes y las curvas isoclinas, por un lado, y las soluciones aproximadas, por el otro.
- c) Con la incorporación de la Transformada de Laplace, como un nuevo método de solución, hacia la segunda mitad de este siglo, los procedimientos algebraicos vuelven a cobrar un nuevo impulso en la enseñanza. Éste enfoque algebraico recibió soporte adicional con la nueva ola de las matemáticas modernas, y el «¡Abajo Euclides!» ya conocido.

Por todo lo anterior, es que creemos que este problema debe concertar mayor atención por parte del profesor, quien, una vez sumergido en la historia del problema, puede así intentar buscar la solución en forma exponencial, llegando a la idea de ecuación característica como base para obtener la solución general de la ecuación dada y fundamentar la definición de *sistema fundamental de soluciones*, en términos de las funciones elementales.

Una ecuación diferencial del tipo $y' = \alpha(x)y^2 + \beta(x)y + \gamma(x)$, es llamada Ecuación de Riccati, una de las razones por las cuales

esta ecuación adquiere gran relevancia es porque se demuestra fácilmente que se transforma en lineal, mediante el cambio

$$y = y_1 + \frac{1}{u} \text{ siendo } y_1 \text{ una solución particular de la ecuación dada.}$$

Por otra parte, esta ecuación tiene múltiples aplicaciones técnicas en Mecánica, Astrofísica, etc⁸, en particular, el comportamiento asintótico de las soluciones de un determinado modelo, es un requisito indispensable en estudios de resistencia de materiales, de estructuras, aerodinámicos, etc. De aquí que el siguiente problema adquiera amplia relevancia.

Problema 4. Determinar el límite, cuando $x \rightarrow \infty$, de la solución general de la ecuación diferencial $y' = y^2 - 1$.

Si analizamos el marco algebraico, su solución es muy elemental, pues es una ecuación en variables separables y resoluble en cuadraturas, cuya solución se puede

expresar por $y = \frac{1 + ce^{2x}}{1 - ce^{2x}}$. Es claro que esta

expresión no les dice mucho a los estudiantes sobre el comportamiento de las soluciones: así declaran que dicho límite es -1. Aún teniendo el comportamiento gráfico (véase Figura 5), es necesario realizar el análisis de cuándo el límite es -1, ocasión propicia para revelar la necesidad de tener en cuenta las condiciones iniciales y el análisis general del problema. De nuevo recalamos la necesidad de la integración de los diferentes acercamientos para completar el análisis⁹.

⁸ Consultar REPILADO, J.A.; E.A. PEREZ; J.E. NÁPOLES y A. CUENCA (1988) y J.E. NÁPOLES (1995), para una descripción más amplia de aplicaciones y conexiones de ésta ecuación con diferentes ramas de la Matemática y la Física.

⁹ Indicaciones más precisas pueden ser consultadas en Nápoles y Negrón (2003).

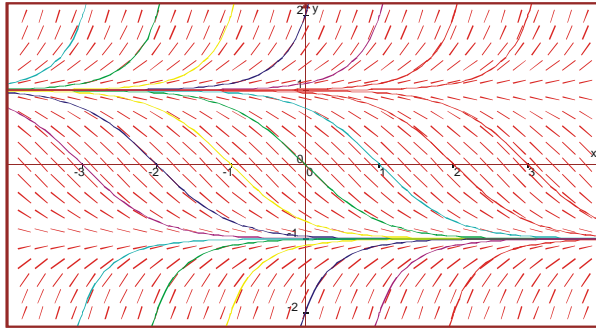


Figura 5. Campo de isoclinas de la ecuación $y' = y^2 - 1$, en la que se han trazado algunas soluciones.
 Fuente: Campo de Direcciones realizado por el autor con el Graphmatica®.

Problemas 5 Y 6.

Problema 5. Encuentre una relación entre los valores propios y la estabilidad de una ecuación diferencial de segundo orden.

Problema 6. Determine la configuración geométrica de los puntos de reposo.

Para un tratamiento de ambos problemas, siguiendo con mayor rigor su historia,

debemos considerar un sistema bidimensional autónomo general del tipo (ver Boudonov, s.f)

$$\begin{aligned} x' &= F(x,y), \\ y' &= G(x,y), \end{aligned} \quad (4)$$

siendo $F(0,0) = G(0,0) = 0$, es decir, el origen es un punto de reposo (crítico o de equilibrio). Un ejemplo muy conocido de tal sistema, es el caso de un péndulo simple, que se ilustra en la Figura 6. Las siguientes definiciones son básicas:

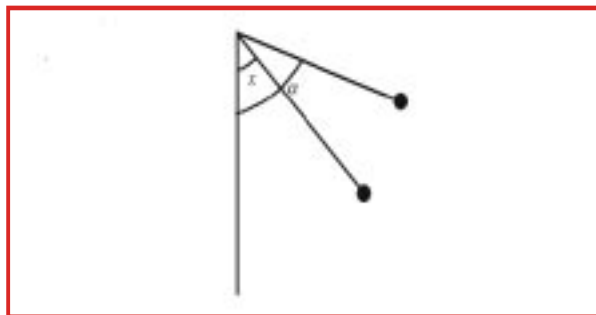


Figura 6. Visión esquemática del péndulo simple, donde se han representados dos desplazamientos, x y a . Fuente: Del Autor.

Definición 1. El punto de equilibrio $O(0,0)$ del sistema (4) es *estable*, si para cada número positivo R , existe un número positivo $r \leq R$ tal que toda trayectoria que esté dentro del círculo $x^2 + y^2 = r^2$ para algún $t = t_0$, permanece en el círculo $x^2 + y^2 = R^2$ para todo $t > t_0$.

Definición 2. El punto de equilibrio $O(0,0)$ del sistema (4) es *asintóticamente*

estable, si es estable y existe un círculo $x^2 + y^2 = r_0^2$, tal que toda trayectoria que está dentro de él para algún instante $t = t_0$, tiende al origen¹⁰ cuando $t \rightarrow \infty$.

Definición 3. El punto crítico $O(0,0)$ del sistema (4) es *inestable*, si no es estable.

¹⁰ Decimos que $(x(t), y(t))$ tiende al origen cuando $t \rightarrow \infty$, si $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$.

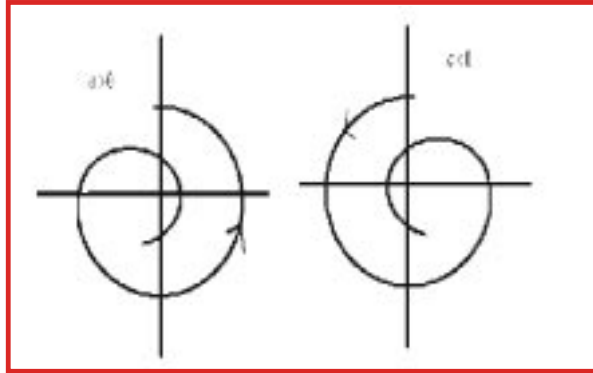


Figura 8. Foco inestable (izquierda) y estable (derecha). Fuente: Del Autor.

En un caso particular de (4), el sistema lineal plano con coeficientes constantes:

$$\begin{aligned} x' &= ax + by, \\ y' &= cx + dy, \end{aligned} \quad (5)$$

se tienen los siguientes casos ($ad \neq bc$), donde con λ_1, λ_2 hemos designado las raíces características:

a) λ_1, λ_2 reales, distintas y del mismo signo (*nodo*):
estable (-),
inestable (+).

b) λ_1, λ_2 reales, distintas y de signos opuestos (*punto de silla*):
inestable.

c) λ_1, λ_2 complejas conjugadas, pero no imaginarias puras (*foco*):
estable (Si $\text{Re} \lambda_1 < 0$),
inestable (Si $\text{Re} \lambda_1 > 0$).

d) $\lambda_1 = \lambda_2$ reales e iguales (*nodo*):
estable (-),
inestable (+).

e) λ_1, λ_2 imaginarias puras (*centro*):
estable.

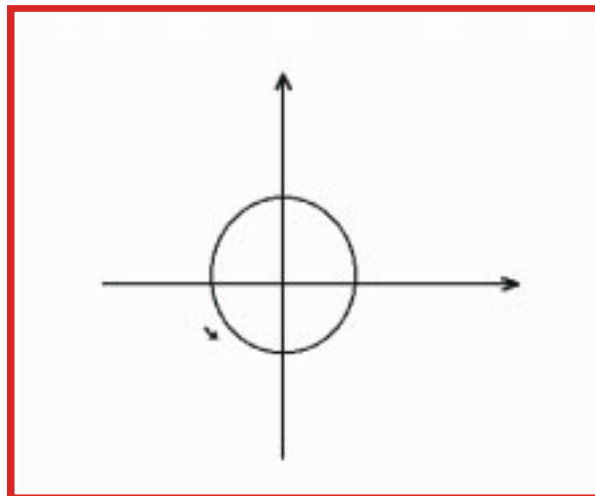


Figura 9. Centro, girando en sentido positivo. Fuente: Del Autor.

Teorema 1. El punto crítico del sistema (5) es estable, si y solo si ambas raíces de la ecuación característica tienen parte

real no positiva, y es asintóticamente estable si y solo si ambas raíces tienen parte real negativa.

Para un sistema lineal plano con coeficientes constantes, la ecuación característica se puede simplificar haciendo $p = -(a+d)$ y $q = ad-bc$; así tenemos el siguiente resultado:

Teorema 2. EL punto crítico (0,0) del sistema lineal plano (5), es *asintóticamente*

estable si y solo si, los coeficientes p y q de la ecuación característica son ambos positivos.

El comportamiento cualitativo puede ser resumido la Figura 10 y un resumen geométrico de todo lo anterior, puede ser tomado de la Figura 11.



Figura 10. Resumen de las posiciones de equilibrio de un sistema lineal plano del tipo (5). *Fuente:* Del Autor.

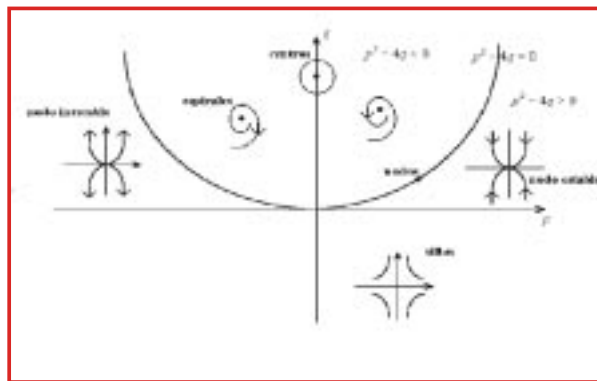


Figura 11. Resumen gráfico de las posiciones de equilibrio de un sistema lineal plano del tipo (5).

Fuente: Del Autor.

Problema 7. Determine la estabilidad en sistemas lineales de orden n .

El estudio de la estabilidad por medio de los valores propios, resuelto para ecuaciones de segundo orden, se complica extraordinariamente si tenemos ecuaciones de orden 3, 4 o 5, y prácticamente se hace imposible para ecuaciones de órdenes superiores. Partiendo del hecho resumido en la figura 11: si la parte real de las raíces característi-

cas es negativa, tenemos la estabilidad asintótica. Podemos conjeturar que esto se mantiene para todo orden, y que debemos buscar métodos algebraicos que nos permitan determinar si las partes reales de todas las raíces están o no, en el semiplano izquierdo. Ésta es la esencia del Método de Routh-Hurwitz (ver Boudonov (1980)). Consideremos el siguiente polinomio:

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \dots + a_0, \quad n \geq 1$$

siendo $z = x + iy \in \mathbf{C}$, $a_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, \dots, n$, $a_n \neq 0$, $a_0 > 0$.

Definición 4. El polinomio (6) se llama de Hurwitz, si todas sus raíces (ceros) z_1, \dots, z_n tienen parte real negativa, es decir, $\text{Re}(z_i) < 0, i=1, \dots, n$. Esto equivale a decir, que todas sus raíces se encuentran en el semiplano izquierdo del plano complejo (\mathbf{R}^2).

Teorema 3. Todos los coeficientes de un polinomio de Hurwitz son positivos.

Observación 1. Para un polinomio de segundo grado:

$$f(z) = a_2 z^2 + a_1 z + a_0, \quad (7)$$

las condiciones del teorema no son sólo necesarias, sino suficientes; o sea, si $a_0, a_1, a_2 > 0$, entonces (7) es un Polinomio de Hurwitz.

Para los polinomios de grado mayor que dos, esto no es cierto. Basta tomar el caso del polinomio $f(z) = 30 + 4z + z^2 + z^3$, que tiene las raíces $z_1 = -3, z_2 = 1 + 3i$ y $z_3 = 1 - 3i$.

Consideremos nuevamente el polinomio (6) y construyamos la Matriz de Hurwitz (orden n):

$$M_H = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & \dots & a_n \end{pmatrix} \quad (8)$$

con $a_k = 0$ si $k > n$.

Teorema 4 (Hurwitz). Para que el polinomio (6) sea un Polinomio de Hurwitz, es necesario y suficiente que sean positivos todos los menores diagonales fundamentales de su matriz de Hurwitz (8):

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= a_1 > 0, \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0, \\ \dots & \\ \Delta_n &= a_n \Delta_{n-1} > 0. \end{aligned}$$

Observación 2. Si $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \dots + a_0$ es un Polinomio de Hurwitz, entonces $g(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n$ también lo es. ¡Probarlo!¹¹

Problema 8. Determinar el comportamiento asintótico de una ecuación no lineal.

Es claro que los métodos estudiados no permiten hacer ninguna aseveración sobre el comportamiento (por ejemplo, la estabilidad) de una ecuación del tipo

$$x' = g(t, x), \quad (9)$$

donde $g \in C^1(G \times [t_0, \infty))$, $G \subseteq \mathbf{R}^n$. Es muy fácil demostrar que el problema de determinar la estabilidad de cualquier solución $x = \varphi(t)$ de (9) se reduce al análisis de la estabilidad de la solución nula de dicho sistema. De ahí que estudiemos la estabilidad de la solución nula en un sistema del tipo (9), en lugar de estudiar la estabilidad de cualquier otra solución de este sistema.

En este problema, las siguientes definiciones serán de utilidad (ver Boudonov (1980); Coddington y Levinson (1955), y Yoshizawa (1966)).

Definición 5. La función $V(t, x)$ se llama de signo constante (de signo positivo o de signo negativo) en H, si $V(t, x) \geq 0$ (o $V(t, x) \leq 0$) para $(t, x) \in H$.

Definición 6. La función $V(t, x)$ se llama definida positiva (negativa) en H, si existe una función escalar $W(x)$ tal que $V(t, x) \geq W(x) > 0$ ($V(t, x) \leq -W(x) < 0$) para $x \neq 0$ y $V(t, 0) = W(0) = 0$ o sea, la función $V(t, x) - W(x)$ es de signo positivo. Las funciones definida positiva y definida negativa se llaman funciones de signo definido.

¹¹ Ver problema final de Nápoles y Cruz (2000).

Definición 7. Se dice que la función $V(t,x)$ tiene *límite superior infinitamente pequeño* cuando $x \rightarrow 0$, si $V(t,x) \rightarrow 0$ (uniformemente) cuando $x \rightarrow 0$ y $t \in [t_0, \infty)$, o sea,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tal que } |V(t,x)| < \varepsilon \text{ para } \|x\| < \delta, \text{ y } t \in [t_0, \infty).$$

Está claro que si V tiene límite superior infinitamente pequeño cuando $x \rightarrow 0$, entonces será acotada en algún semicilindro $[t_0, \infty)$ y $\|x\| < \Delta$.

Definición 8. La función

$$V'_{(9)}(t,x) = \frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} g_i(t,x) = \frac{\partial V}{\partial t} + \langle \text{grad } V, g \rangle,$$

se llama *derivada de la función $V(t,x)$ con respecto al (a lo largo de las soluciones del) sistema (9)*.

Una herramienta fundamental en el estudio cualitativo de sistemas no lineales del tipo (9), lo constituyen los llamados Teoremas de Liapunov¹² contenidos en su célebre memoria “**Problema General de la Estabilidad del Movimiento**” publicada en ruso en 1892.

Teoremas de Liapunov

Teorema 5. Si existe una función $V(t,x)$ signo definida, cuya derivada V' con respecto al sistema (9) es una función de signo constante, de signo contrario al signo de V , entonces la solución no perturbada $x=0$ es estable.

Observación 4. El caso $V'=0$ no se excluye.

Teorema 6. Si existe una función signo definida $V(t,x)$ que tenga límite superior infinitamente pequeño cuando $x \rightarrow 0$ y cuya

derivada V' con respecto al sistema (9) sea una función signo definida de signo contrario al signo de V , entonces la solución nula $x=0$ es asintóticamente estable según Liapunov.

Teorema 7. Supongamos que existe una función $V(t,x)$ que tiene límite superior infinitamente pequeño cuando $x \rightarrow 0$ y cuya derivada con respecto al sistema (9) es una función signo definida. Si para un valor de t , digamos t^* , la función $V(t^*,x)$ en una vecindad arbitraria del origen de coordenadas (tan pequeña como se quiera), toma un valor del mismo signo que $V(t,x)$, entonces la solución trivial $x=0$ del sistema (9) es no estable según Liapunov.

Por supuesto que el problema no se resuelve con lo aquí presentado. Éste es sólo el comienzo de un tema muy rico en aplicaciones y que se enlaza con diversos tópicos como son *estabilidad por primera aproximación*, el ya aludido Teorema de Poincaré-Bendixon, el estudio de los ciclos límites, etc. (ver también Simmons (1991 y 1993)).

Observaciones Finales

A pesar que hemos usado el tema ecuaciones diferenciales ordinarias para ilustrar nuestras ideas, pensamos que nos ha servido para mostrar cómo es posible consolidar orgánicamente nuestro punto de partida: la enseñanza por resolución de problemas con un enfoque histórico, que permita a los alumnos el desarrollo de habilidades lógicas tan necesarias en su perfil profesional, como producto de la riqueza intelectual de las situaciones problemáticas en que se vió envuelto, y por haber tenido un contacto “afectivo” con el material de estudio. Esto influirá, por otra parte, en una mejor asimilación de dicho material y en una mayor consistencia del mismo; si por otra parte no descuidamos las aplicaciones, aspecto sumamente importante para los profesionales que estamos

¹² Para mayores detalles biográficos de Liapunov puede consultar, por ejemplo, A. T. Grigorian-“**Lyapunov, Alexandr Mijailovich**”, Dictionary of Scientific Biography 8, New York (1970-1990), 559-563 y A M Lukomskaya and V I Smirnov (eds.)-“**Aleksandr Mikhailovich Lyapunov**”, **Bibliografía**, Moscow-Leningrad, 1953. Ver también <http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Lyapunov.html>.

formando, tendremos un curso que, indiscutiblemente, cumplirá las exigencias requeridas.

De lo anterior resulta necesario extraer algunos aspectos importantes que a modo de conclusiones resumimos. Esta propuesta permite al alumno:

- Adquirir una visión dinámica de la matemática, así como del proceso de creación matemático, hechos, conjeturas, teoremas, problemas abiertos, etc.
- Conocer el significado de solución de una ecuación diferencial, mediante la integración de los tres marcos que hemos distinguido (algebraico, numérico y geométrico).
- Conocer el rol que desempeñan los paquetes simbólicos de cálculo y las calculadoras gráficas, más allá de simple herramienta.

Tal como ya hemos señalado, el curso de ecuaciones diferenciales ordinarias tiene que realizarse bajo la óptica de una integración de los tres escenarios discutidos antes. En concreto, la integración de estos se ha mostrado como una herramienta poderosa que permite al estudiante interactuar con los diversos marcos y desarrollar el pensamiento lógico en los mismos. De este forma, el curso será más productivo e interesante.

Queremos señalar, por último, algo muy necesario a la hora de utilizar los recursos históricos en nuestras clases: la objetividad histórica no debe ceder ante las necesidades pedagógicas (ver Garcíadiego (1997)). Ejemplo de esto son los muy conocidos de *Men of Mathematics*, de E.T. Bell (1937) y *Whom the gods love*, de L. Infield (1948), mal concebidos como tratados históricos en virtud de un determinado interés motivacional.

Referencias

- BAKHVALOV, N. (1980). *Métodos numéricos*. Madrid: Paraninfo.
- BELL, E.T. (1937). *Men of Mathematics*. New Cork: Simon and Shuster.
- BOUDONOV, N. (1980). *Teoría de la estabilidad de las ecuaciones diferenciales ordinarias*. La Habana: Universidad de la Habana.
- _____ (s/f). *Teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales ordinarias*. La Habana: Universidad de la Habana.
- CODDINGTON, E. and LEVINSON, N. (1955). *Theory of Ordinary Differential Equations*. McGraw-Hill, New York.
- DÍAZ, G. J. y BATANERO, M. C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. En: *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol.14, No. 3. pp. 325-355.
- FARFÁN, R. M. y HITT F. (s/f). *Heurística*. México: Sección de Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN.
- GARCIADIEGO, A. (1997). Pedagogía e historia de las ciencias, ¿simbiosis innata?. En: ZALAMEA, F. (ed.). *El velo y la trenza*. Editorial de la Universidad Nacional (Colombia).
- GRATTAN-GUINNES, I. (2000). A Sideway Looks at Hilbert's Twenty-three Problems of 1900, *Notices of the AMS*, 47(2000), 752-757 (recomendamos también los sitios <http://www.geocities.com/Athens/4346/hilb.html> y <http://boletinamv.ma.usb.ve/conten/vol5/v5n2p117.pdf>).
- HALMOS, P. (1980). The heart of the mathematics. In: *American Mathematical Monthly*. Vol. 87, pp. 519-524.
- HITT, F. (1992). Intuición en matemática, representación y uso de la microcomputadora. En: *Memorias de la sexta reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de profesores e investigación en matemática educativa*. Cuernavaca, Morelos, Universidad Autónoma del Estado de Morelos, México, julio, pp. 254-266.
- _____ (1995). Intuición primera versus pensamiento analítico: dificultades en el paso de una representación gráfica a un contexto real y viceversa. En: *Revista Educación Mate-*

mática, Colombia (preprint).

INFIELD, L. (1948). *Whom the gods love*. New York: Whittlesey House.

JOURDAIN, P.E.B. (1976). La Naturaleza de la Matemática. en James R. Newman (comp.). *Sigma. El Mundo de la Matemática*. Ediciones Grijalbo, Barcelona-Buenos Aires-México, 1976, tomo 1, 343-408.

LORENZ, E. N. (1995). *La esencia del Caos*. Madrid, Debate, 1995.

NÁPOLES, J.E. (1995). Acerca de la importancia de la Ecuación de Riccati (II). *Revista Perfiles de la Física y su Enseñanza*, Instituto Superior Pedagógico de Holguín, Vol.1, No.3, pp.36-39.

_____ (1997a). *Consideraciones sobre el uso de recursos históricos en algunos problemas de Educación Matemática*. Ponencia presentada a RELME-11, México: Morelia.

_____ (1997b). Sobre el significado de los objetos matemáticos. El caso de los irracionales. En: *Memorias COMAT'97*. Cuba: Universidad de Matanzas.

_____ (1998). El papel de la historia en la educación matemática. Memorias En: *3er Congreso "Enseñanza de la matemática en el educación superior"*. Cuba: Universidad de la Habana.

_____ (1999). La resolución de problemas en la escuela. Estrategias no Convencionales. 2do Congreso Argentino de Educación Matemática. Chaco: Resistencia.

_____ (2000a). Enfoques de la Ingeniería Didáctica. En: *Memorias II Simposio de Educación Matemática*. Pcia Buenos Aires: Chivilcoy, Mayo 2-5.

_____ (2000b). La resolución de problemas en la escuela. Reflexiones preliminares. Material Docente GIEMat (UTN-FRR). Chaco: Resistencia.

_____ (2000c). La resolución de problemas en la escuela. Algunas reflexiones. En: *Revista Función Continua*. Universidad Nacional de San Martín. Provincia de Buenos Aires, Vol.8, pp. 21-42.

NÁPOLES, J. E. y NEGRÓN, C. (2002). La historia de las ecuaciones diferenciales ordinarias contada por sus libros de texto. Xixim, *Revista Electrónica de Didáctica de la Matemática*. Universidad Autónoma de Querétaro, Año 3, No.2, Octubre, pp. 33-57 (<http://www.uaq.mx/matematicas/redm/articulos.html?1002>).

NÁPOLES, J. E. y NEGRÓN, C. (2003). El papel de la historia en la integración de los marcos geométrico, algebraico y numérico en las ecuaciones diferenciales ordinarias. *Revista Virtual Matemática, Educación e Internet*, Vol.4, No.1, Mayo (<http://www.itcr.ac.cr/carreras/matematica/revistamate/ContribucionesV4n12003/PapeldeLaHist/pag1.htm>)

REPILADO, J.A.; PEREZ, E.A.; NÁPOLES, J.E. y CUENCA, A. (1988). Acerca de la importancia de la Ecuación de Riccati. *Bol. Órbita Científica-ISPEJV*, No.1-2, 27-31.

SIMMONS, G.F. (1991). *Differential Equations with Applications and Historical Notes*. McGraw-Hill, New York.

_____ (1993). *Ecuaciones diferenciales*. Madrid: McGraw-Hill/Interamericana de España, S.A.

SMITH, D.E. (1929). *A source book in mathematics*. New York: McGraw-Hill, , 1929.¹³

YOSHIZAWA, T. (1966). *Stability theory by Liapunov's Second Method*. The Mathematical Society of Japan, Tokyo.

¹³ Reimpreso: New York Public Library, New York, 1951-1952. Reimpreso: Dover, New York, 1959. Reseñado: Isis 14(1930), 268-270.

