

Os Materiais Manipuláveis e a Produção Discursiva dos Alunos na Aula de Matemática

Jamille Vilas Boas
Jonei Cerqueira Barbosa

RESUMO

No presente artigo, buscamos entender como os discursos dos alunos são produzidos em função do uso dos manipuláveis e da prática pedagógica que eles participam. Para isso, foi utilizada uma abordagem qualitativa e a observação como técnica de coleta de dados. Um grupo de alunos foi observado durante uma aula de matemática, em que utilizaram materiais manipuláveis para resolver uma tarefa. A análise dos dados sugere que, ao utilizar materiais manipuláveis, os alunos podem atribuir materialidade física aos objetos matemáticos, usando-os para produzir justificativas para proposições matemáticas. Identificamos ambientes de aprendizagem desta natureza como investigativo-experimental.

Palavras-chave: Discurso. Materiais Manipuláveis. Objetos Matemáticos. Investigativo-experimental.

Manipulatives and Students' Discursive Production of Students in a Mathematics Class

ABSTRACT

In this paper, we seek to understand how students' discourses are produced due to the use of manipulatives and the pedagogical practice that they take part in. Then, we used a qualitative approach, and observation as data collection technique. A group of students was observed during a math class, which uses manipulatives to solve a task. Data analysis suggests that students assigned physical materiality to mathematical objects by using them to produce justifications for mathematical propositions. We named learning environments such this one as investigative-experimental.

Keywords: Discourse. Manipulatives. Mathematical Objects. Investigative-experimental.

INTRODUÇÃO

Propostas de mudanças pedagógicas em relação ao chamado ensino de matemática tradicional, em que as aulas são caracterizadas por uma exposição, seguida da apresentação de técnicas de resolução de exercícios e, por fim, a própria resolução de exercícios por

Jamille Vilas Boas é Mestre em Ensino, Filosofia e História das Ciências. Docente do Instituto Federal da Bahia (IFBA). Endereço para correspondência: IFBA, Estrada Vicinal para Tenda, Barro Vermelho, km 1.9 – SEABRA - Bahia – CEP 46900-000. Email: millevilasboas@gmail.com

Jonei Cerqueira Barbosa é Doutor em Educação Matemática. Docente da Universidade Federal da Bahia /UFBA, Departamento de Educação. Endereço para correspondência: Faculdade de Educação da UFBA, Departamento II. Av. Reitor Miguel Calmon, s/n – Campus Canela – Salvador, Bahia – CEP 40110-100 . Email: jonei.cerqueira@ufba.br

Acta Scientiae	Canoas	v. 13	n.2	p.39-53	jul./dez. 2011
----------------	--------	-------	-----	---------	----------------

parte dos alunos, tem sido foco de diversos estudos no âmbito da Educação Matemática (BERTINI; PASSOS, 2009; FIORENTINI; MIORIM, 1990; PAIS, 2001). Algumas dessas propostas, em que as práticas pedagógicas em matemática enfatizam a investigação e a exploração de ideias matemáticas pelos alunos, são caracterizadas por AlrØ e Skovsmose (2002) como “cenários para investigação”. Os cenários para investigação se relacionam à abordagem de situações-problema em que os alunos não possuem à mão esquemas prontos, tendo que desenvolver suas próprias estratégias, testá-las e discutir sua plausibilidade como solução (ALRØ; SKOVSMOSE, 2002).

Uma das possibilidades de configurar práticas pedagógicas alinhadas a um cenário para investigação é através do uso de materiais manipuláveis na aula de matemática, como ilustrado nos trabalhos de Lorenzato (2006) e Radford et. al (2005). Os materiais manipuláveis são objetos físicos, os quais as pessoas podem sentir, tocar e mover (REYS, 1971, apud MATOS; SERRAZINA, 1996). Como argumentado por Lamberty e Kicolodner (2002), estes podem proporcionar aos alunos a visualização de objetos matemáticos. Neste artigo, por vezes, para evitar repetições, usaremos “materiais” ou “manipuláveis” para se referir à expressão “materiais manipuláveis”.

Os objetos matemáticos, como um número real, uma figura geométrica ou uma matriz, são de natureza abstrata (GODINO; BATANERO, 1994). Isto implica que o matemático não lida com os objetos matemáticos por referência ao mundo físico, mas em termos da consistência interna na disciplina matemática. Se aceitarmos a compreensão de Sfard (2008) sobre os objetos matemáticos como construções discursivas, segue que o uso do adjetivo “abstrato” para o substantivo “objeto” não se refere a um mundo à parte, no sentido platonista, mas como parte de um discurso legítimo praticado por uma comunidade. Segundo a autora, a comunicação em torno dos objetos matemáticos faz uso de mediadores visuais, que são recursos que fornecem imagens com as quais os indivíduos podem coordenar sua comunicação, como, por exemplo, os símbolos matemáticos. Particularmente, Sfard (2008) focaliza os registros simbólicos como mediadores utilizados na comunicação. Entretanto, no âmbito da matemática escolar, esta noção pode ser ampliada para também incluir os manipuláveis como mediadores visuais, já que a ação de falar de alunos e professores podem ocorrer em torno do seu uso, como se depreende dos estudos de Alro e Skovsmose (2002), Lamberty e Kicolodner (2002), Lorenzato (2006) e Radford et. al (2005)

Entretanto, o entendimento dos manipuláveis como mediadores visuais não implica necessariamente a constituição de um cenário para investigação. Conforme evidências documentadas por Fiorentini e Miorim (1990) e Pais (2001), eles não são determinantes para o envolvimento dos alunos em investigação e exploração de ideias matemáticas (FIORENTINI; MIORIM, 1990; PAIS, 2001; KAMII; LEWIS; KIRKLAND, 2001). Segundo Moyer (2001), professores podem utilizar manipuláveis apenas para criar um momento divertido para seus alunos. Já no trabalho de AlrØ e Skovsmose (2002), os autores mostram um exemplo de sala de aula em que os alunos manipulam bolas de isopor para resolver uma situação-problema sobre a chance de um consumidor ser contagiado pela salmonela. Neste caso, os manipuláveis fizeram parte de uma prática pedagógica

alinhada ao cenário para investigação; não pela presença das bolas de isopor, mas pelo uso realizado pelo professor e alunos.

Imaginemos agora, a configuração do cenário para investigação em torno da situação-problema sobre a probabilidade de ser infectado pela salmonela, porém sem a presença das bolas de isopor. Podemos esperar diferentes ações dos alunos, conforme a noção de ação mediada, tal como formulada por Wertsch (1991). Segundo este autor (1991, p.12), “[...] ações humanas empregam tipicamente meios de mediação, como ferramentas e linguagens, e esses meios de mediação formam as ações na sua essência”¹. O que os alunos podem fazer com a presença das bolas de isopor é qualitativamente diferente do que eles podem fazer sem elas. Aqui, não nos referimos à uma hierarquia entre às ações dos alunos, mas às diferentes qualidades decorrentes do uso de diferentes meios de mediação.

Portanto, mesmo reconhecendo que o material manipulável não é determinante da prática pedagógica, parece-nos possível dizer que a presença dele na sala de aula estabelece diferenças qualitativas nas ações dos alunos. A partir da noção teórica da ação mediada, assumimos a influência mútua entre os manipuláveis e o que os alunos fazem. É justamente este ponto que desejamos abordar neste artigo. Para melhor refinar o objetivo, iremos, inicialmente, retomar a literatura sobre materiais manipuláveis na Educação Matemática a partir da posição teórica de onde falamos. Após isto, apresentaremos o foco do artigo, o contexto, a metodologia e análise de dados.

A AÇÃO MEDIADA, OS MATERIAIS MANIPULÁVEIS E O DISCURSO

Professores de matemática tem utilizado materiais manipuláveis em suas aulas na expectativa de superar dificuldades de aprendizagem dos alunos (SANTANA, 2008). Kami, Lewis e Kirkland (2001), no entanto, apresentaram episódios em que, utilizando um manipulável na aula, alunos produziram ideias sobre conceitos e procedimentos matemáticos diferentes daqueles historicamente estabelecidos e considerados legítimos na matemática escolar. Os autores ilustram, com um exemplo, uma aula em que foram usadas fichas de papel para o ensino da adição de número naturais. O professor instruiu os alunos para juntarem as fichas com o propósito de achar o resultado da adição. Ao questionar aos alunos quanto é $3 + 5$, o professor obteve 5 e 8 como respostas.

A resposta 5, à primeira vista, parece sem qualquer lógica ao leitor, mas, ao apresentar o que foi feito com os manipuláveis, é possível perceber que parte dos alunos juntaram as fichas de modo que aquela que representa o número 5 ficou sobre a outra que representa 3, levando à resposta 5. Por sua vez, os alunos que falaram 8 como resposta colocaram as fichas lado-a-lado. No artigo, os autores, como conclusão, apontam que manipuláveis podem não ter utilidade, como estas fichas de papel, pois abrem espaço para que erros conceituais ocorram na sala de aula. Porém, re-interpretando este episódio,

¹ Tradução nossa.

podemos nos perguntar: quem respondeu $3 + 5 = 5$? Os alunos ou o material? Será que é possível, em atividades como essa, dissociar o manipulável do discurso do aluno?

Neste artigo, a todas enunciações verbais e escritas produzidas por alguém, chamaremos de ações discursivas, ou simplesmente, de discurso (WERSTCH, 1991). Seguindo a argumentação de Watson e Winbourne (2008), podemos dizer que a produção discursiva no ambiente em que manipuláveis estão inseridos não provêm deles em si, mas da maneira como as pessoas se apropriam deles. O conceito de apropriação é caro à perspectiva sócio-cultural para a ação humana, tal como discutido por Wertsch (1998). Segundo o autor, a palavra – vindo do russo *prisvoenie* – denota tomar alguma coisa de outro como sua própria. Por sua vez, é possível dizer que apropriação ocorre conforme as “pistas” que os padrões de interação social oferecem aos indivíduos sobre o modo legítimo de participar da situação social. Se o professor, por exemplo, traz bolas de isopor para a aula de matemática, os alunos reconhecem elas em função do que historicamente se faz neste contexto. No episódio citado em Kami, Lewis e Kirkland (*op. cit.*), em ambas as respostas, os alunos procuram utilizar o manipulável para realizar a tarefa escolar. Na situação social, o professor associou adição a “juntar”. Os alunos utilizaram os manipuláveis para juntar de diferentes modos: sobrepor e justapor.

Em ambos os casos, somente podemos compreender a ação discursiva dos alunos em termos da mediação dos manipuláveis. Esta observação está em consonância com o argumento posto por Wertsch (1998) de que há uma irreduzível tensão entre agentes e meios de mediação. Para este autor, ação e os meios que a medeiam estão tão imbricados que é mais adequado falarmos em termos de agente-agindo-com-meios-de-mediação como uma unidade de análise. O uso da palavra “agente” é proposital para indicar que este se apropria do meio de mediação, neste caso, os manipuláveis, ao mesmo passo que este possui materialidade, ou seja, é impregnado de possibilidades e limites à ação do agente. No caso da sala de aula citado anteriormente, isto explica o porquê dos alunos não oferecerem, por exemplo, 20 como resposta. O manipulável estabelecia limites para se produzir este discurso. Se fizessem a sobreposição delas, poderia falar 5 ou 3 como resposta e, se fizessem a justaposição, podem indicar 8.

É possível que os manipuláveis sejam apropriados pelos agentes com propósitos diferentes daqueles para os quais eles foram elaborados. No estudo de Moyer (2001), por exemplo, a autora fez uma pesquisa com dez professoras que receberam um kit com dez manipuláveis para serem utilizados nas suas aulas, dentre eles, o tangram. Nos resultados desse estudo, é apontado que as professoras utilizaram pouco estes materiais e, quando fizeram uso deles, foi para tornar a aula mais divertida. Os manipuláveis que foram entregues às professoras devem ter sido desenvolvidos com o propósito de ensinar matemática. Entretanto, as professoras utilizaram os manipuláveis mais para criar um momento de descontração em sala de aula do que para ensinar/explorar ideias matemáticas (MOYER, 2001). Este estudo nos faz levantar uma outra questão: por que um kit educacional, supostamente elaborado para ensinar matemática, não foi explorado nesta direção pelas professoras? Por que elas desenvolveram esta apropriação?

O carácter situado da prática, ou seja, o contexto histórico e social que dá estrutura e significado ao que se faz (WATSON; WINBOURNE, 2008), é uma das respostas a esta pergunta. Neste caso, como Moyer (2001) não traz elementos suficientes para inferir o porque este kit não foi usado para ensinar matemática, podemos hipotetizar que as práticas pedagógicas historicamente constituídas naquele contexto não tinham o uso de manipuláveis como parte delas. Assim, ao introduzi-los ali, é possível notar transformação das ações docentes, como o uso deles para diversão, porém, ao mesmo passo, parece isto denotar uma resistência. Segundo Werstch (1998), os meios de mediação não são facilmente apropriados pelos agentes, podendo gerar tensões com as práticas já consolidadas.

Tomemos, aqui, o termo “prática” como conceito para denotar as formas de ação que sustentam o mútuo engajamento das pessoas (WATSON; WINBOURNE, 2008). Toda prática é, portanto, social. Qualquer manipulável deve ser, por implicação, apropriado por formas já legítimas de ações compartilhadas pelas pessoas. Isto nos leva a localizar a unidade de análise **agente-agindo-com-meio-de-mediação** proposta por Wertsch (1993) em termos da prática social. Ampliando esta noção, poderíamos falar em **agente-agindo-com-meio-de-mediação-em-uma-prática-social**. Como decorrência direta, se queremos buscar entendimentos sobre as ações dos alunos com manipuláveis, não basta colocar lentes sobre a relação entre ambos, mas como esta relação ocorre na situação social da aula de matemática.

Dessa forma, neste artigo, buscamos **entender como os discursos dos alunos são produzidos em função do uso dos manipuláveis e da prática pedagógica que eles participam**. Para dar conta do objetivo deste estudo, acompanhamos aulas de matemática em que os professores utilizaram manipuláveis em suas práticas pedagógicas. Para este artigo, selecionamos uma aula conduzida por uma professora, pois identificamos elementos para elaborar uma compreensão para o propósito aqui delineado.

CONTEXTO

Os dados que serão apresentados, a seguir, foram coletados em uma turma do nono ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede pública de uma grande cidade brasileira. A escolha da professora, que chamaremos aqui de Nilda², e da turma se pautou na disponibilidade deles e desejo de cooperar, além das condições de acesso da primeira autora deste artigo à escola, que acompanhou as aulas da Profa. Nilda. A turma era composta por 35 alunos e foi observada durante 18 aulas de matemática.

Após trabalhar com o tópico “Perímetro e área de figuras planas”, a professora realizou uma atividade em que os alunos utilizavam materiais manipuláveis. A tarefa foi formulada com a professora em conjunto com a primeira autora desse artigo, adaptada a partir do problema da desigualdade isoperimétrica (De todas as curvas fechadas simples no plano, de comprimento dado l , qual limita a maior área?). Focalizamos a observação de

² O nome da professora e os nomes citados nas transcrições das falas são pseudônimos.

um grupo de cinco alunos, escolhidos no momento da coleta, por indicação da professora a partir do critério de heterogeneidade de desempenho nas aulas.

O grupo observado era composto pelos alunos Marcos, Raul, Let, Rafinha e Laura. Marcos e Let apresentavam bom desempenho em matemática, enquanto que Rafinha tinham um desempenho escolar regular e Raul e Laura apresentavam baixo desempenho escolar em matemática. Durante o trabalho do grupo, Marcos, Raul, Let e Rafinha mostraram-se envolvidos na tarefa, enquanto Laura não parecia engajada nela.

METODOLOGIA

Este estudo tem como foco de análise a produção discursiva com materiais manipuláveis no contexto da aula de matemática. Deste decorre a necessidade de dados relativos às ações discursivas dos alunos em função dos manipuláveis e da prática desenvolvida na sala de aula, levando-nos à utilização do método qualitativo. Segundo Denzin e Lincoln (2005), a pesquisa qualitativa estuda coisas no seu cenário “natural”, na tentativa de fazer sentido a, ou interpretar, fenômenos em termos dos significados que as pessoas trazem para eles. Assim, o investigador introduz-se no mundo das pessoas que pretende estudar, elaborando um registro sistemático de tudo aquilo que ouve e observa (BOGDAN; BIKLEN, 1994). Para elaborar tais registros, pode-se usar uma grande variedade de procedimentos de coleta de dados. Neste caso, como o foco era na produção discursiva dos alunos, a observação mostrou-se o procedimento de coleta de dados prioritária, já que ele possibilita identificar e registrar todas ações dos participantes da pesquisa (ALVEZ-MAZZOTTI, 1999).

Para registrar as observações, foram utilizadas filmagem e notas de campo. A necessidade da filmagem, e não apenas a gravação do áudio da aula, deveu-se a necessidade de registrar também os movimentos corporais dos alunos com os manipuláveis. Já as notas de campo serviram como um diário, a fim de registrar quaisquer impressões a respeito da escola, dos alunos, das aulas, etc., ou seja, do contexto geral onde se coletaram os dados.

Após a coletar dos dados, para analisá-los, foram utilizados alguns procedimentos analíticos da *Grounded Theory* (CHARMAZ, 2006), porém, sem aqui assumir seus compromissos epistemológicos. A primeira etapa da análise consistiu em assistir o vídeo da aula e transcrevê-lo; a segunda etapa correspondeu à codificação dos dados, onde as falas e as demais ações dos alunos foram reduzidas a códigos como uma pequena frase (CHARMAZ, 2006). Nas etapas seguintes, os códigos foram interpretados na sequência que apareciam, permitindo o recorte de trechos de falas e as outras ações correlatas. A partir daí, estes trechos foram agrupados em categorias. Por fim, confrontamos os resultados obtidos com a literatura a fim de gerar compreensões teóricas sobre a produção discursiva dos alunos em aulas de matemática em que se utilizam materiais manipuláveis.

APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

Na tarefa focalizada neste artigo, os alunos receberam quatro representações em papel de figuras planas regulares de diferente número de lados, todos com o mesmo perímetro (Figura 1) e quatro fichas, cada uma contendo o valor da área e o valor da medida do lado de uma dessas figuras planas (Figura 2). O objetivo da professora com esta atividade foi a inferência, por parte dos alunos, de que, dentre os polígonos regulares representados por estas figuras de papel, à medida que aumenta o número de lados, a área do polígono também aumenta, mesmo conservando o perímetro.

Figura 1: Figuras de papel

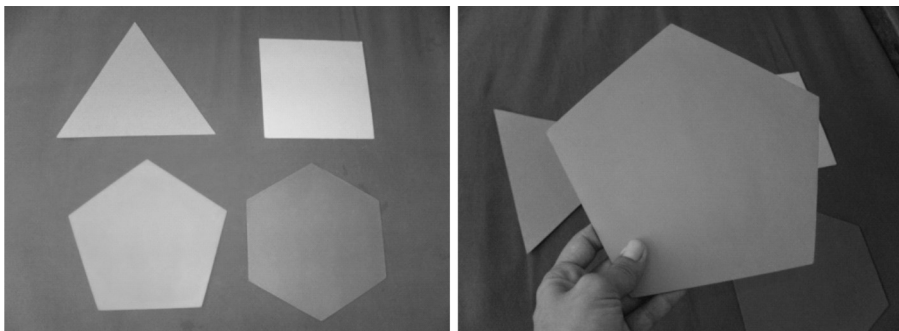


Figura 2: Exemplo de uma ficha

Qual dessas figuras planas corresponde a estes dados?

Medida do lado: 20 cm

Área: 173,21 cm²

Qual o perímetro desta figura?

No início da tarefa, a professora diz aos alunos que eles iriam trabalhar com os últimos tópicos estudados, perímetros e áreas, e solicitou que eles se organizassem em grupos.

A partir da análise dos episódios recortados dos dados, identificamos duas categorias que oferecem elementos para compreendermos a produção discursiva dos alunos em aulas de matemática em que utilizam manipuláveis:

- Atribuição de materialidade física aos objetos matemáticos;

- O uso de manipuláveis para justificação³.

A seguir, elas serão descritas a partir de trechos ilustrativos que foram numerados em ordem cronológica.

Atribuição de materialidade física aos objetos matemáticos

A professora iniciou a tarefa entregando os manipuláveis que seriam utilizados, como podemos ver nas falas apresentadas a seguir:

	Participante: discurso verbal	O que foi feito
1	Nilda: Eu estou entregando quatro figuras geométricas na mão de vocês. Elas são diferentes, tá? Eu vou entregar essas figuras e vou entregar uma tabelazinha e vocês vão ver as observações lá, tá?	A professora entrega quatro recortes de papel que representavam figuras planas ao grupo observado.
2	Marcos: A senhora já entregou o quadrado aqui .	Devolve o recorte que representa o quadrado para a professora.
3	Nilda: Falta o que então?	
4	Marcos: O hexágono.	A professora entrega o recorte que representa o hexágono ao grupo.
5	Nilda: Oh gente, agora eu vou entregar a vocês as informações, vocês vão receber quatro fichas dessas. Essas fichinhas têm o valor da área e do perímetro dessas figuras e vocês vão ver qual fichinha corresponde a qual figura, tá? Reparem, a gente aprendeu na aula passada a calcular perímetro e área das figuras, não foi? Vocês agora vão pegar essas fichas. Reparem oh: “Qual dessas figuras planas corresponde a estes dados?”. Medida do lado, a área. Esta aqui, vocês vão ver que figura corresponde a cada ficha, ok? Podem começar!	Mostra a ficha para os alunos e entrega a ficha a eles. Lê algumas informações na ficha.

Já na fala 2, o aluno indica à professora que tinha dois quadrado no grupo dele. O recorte de papel, entregue pela professora, é indicado pelo aluno como um polígono plano regular de quatro lados, o qual ele indica tocar naquele momento. Da mesma forma, no discurso 4, ele indica que o hexágono está faltando no grupo e quando a professora entrega um outro recorte de papel, ele fica satisfeito, pois seu grupo já estava de posse das quatro figuras geométricas que a professora indicou na fala 1.

Nesta mesma turma, na semana anterior, a professora fez uma atividade com materiais manipuláveis para introduzir o tópico “Áreas e Superfícies”. Nesta, a professora referiu-se às folhas de papel A4 como retângulos e alguns recortes destas como triângulos e trapézios. Os alunos também os indicaram no manipulável, além de indicar a diagonal do retângulo, a sua altura, a base maior e a menor do trapézio. Este envolvimento foi legitimado pela professora naquela prática.

³ Utilizaremos, neste artigo, a palavra “justificação” em vez de “justificativa”. A preferência pela primeira deve-se ao nosso propósito de enfatizar a ação de apresentar uma justificativa, ou seja, uma ação discursiva que serve ao propósito de argumentar sobre alguma proposição enunciada.

Ao iniciar o desenvolvimento da tarefa que vamos analisar neste artigo, sabendo estes que iriam trabalhar com os tópicos “perímetros de figuras planas” e “áreas de figuras planas”, e ouvindo a professora referir-se ao recorte de papel como uma figura geométrica, fala 1, os alunos já estavam à vontade para indicar quadrados e hexágonos nos recortes. A indicação de que estão tocando em triângulos, quadrados, pentágonos e hexágonos é feita em muitos momentos na aula, como podemos também notar no trecho a seguir:

197	Nilda: Qual é a figura que tem o menor número de lados? Mostra para mim.	
198	Raul: O menor número de lados.	Mostra o recorte que representa o triângulo.
199	Nilda: Quem tem o maior número de lados?	
200	Marcos: O hexágono.	Mostra o recorte que representa o hexágono.
201	Nilda: Agora a pergunta é: quem tem a maior área?	
202	Alunos: Hexágono	
203	Nilda: E a menor área?	
204	Alunos: O triângulo.	
205	Nilda: Será que existe alguma relação entre o perímetro, a área e o número de lados? O que vocês acham?	

Na fala e ação 200, fica claro que o aluno ao falar do objeto matemático hexágono, está se referindo a um dos manipuláveis. Ele fala “o hexágono” e ergue o manipulável para que todos possam vê-lo. Nesta tarefa, os alunos referem-se a alguns objetos matemáticos como tendo existência física. A inserção dos manipuláveis e o contexto daquela sala de aula de matemática permitiram que os alunos relacionem os recortes de papel a estes objetos. Observemos que a professora legitima esta ação. Naquele momento, não aparece a preocupação com a distinção entre um objeto matemático e sua representação, o que parece ser favorecido pela natureza física dos manipuláveis.

Além disso, os objetos matemáticos e os manipuláveis relacionados têm características em comum. O aluno, por exemplo, na fala 2, refere-se ao manipulável que possui quatro lados, com medidas muito próximas entre si e medida dos ângulos internos próximos à 90° de quadrado. Provavelmente, a professora não permitiria que ele denominasse aquele manipulável como um triângulo, pois o manipulável e este objeto matemático quase não possuem características em comum.

Essa correspondência entre o manipulável e o objeto matemático permite que os alunos usem o material para tirar suas conclusões, além de permitir que eles expliquem suas conclusões para os colegas e para a professora usando o manipulável, como veremos na seção que segue.

O uso de manipuláveis para justificação

De posse dos manipuláveis e das fichas, os alunos tiveram que relacioná-los. Um modo de fazer isto foi comparando as figuras de papel, como ilustrado no trecho que segue.

29	Let: O maior lado é o quadrado.	Olha Marcos comparar o lado do recorte que representa o quadrado e o lado do recorte que representa o pentágono.
30	Rafinha: O maior lado é o quadrado.	Olha Marcos comparar o lado do recorte que representa o quadrado e o lado do recorte que representa o pentágono.
31	Laura: É o triângulo, não?	
32	Marcos: O maior lado é o triângulo, claro!	Pega o recorte que representa o triângulo na mão de Let, compara o lado do recorte que representa o triângulo com o lado do recorte que representa o quadrado e o lado do recorte que representa o pentágono.
33	Rafinha: É o triângulo.	
34	Marcos: Qual o maior que tem aí?	Pergunta a Rafinha a respeito das fichas.
35	Rafinha: Então é esse, 20.	Olha as fichas e coloca a ficha que corresponde ao polígono de medida de lado igual a 20 cm em cima do recorte que representa o triângulo
36	Marcos: Raciocínio lógico!	

Nas falas 29, 30, 31, 32 e 33, os alunos referem-se aos recortes de papel como quadrado e triângulo, fazendo inferências em relação a estes, de acordo com o que foi observado nos manipuláveis. Para determinar a ficha que corresponde ao triângulo, não foi preciso nenhum procedimento analítico, como podemos ver em 29, 30, 31, 32, 33, 34 e 36. As conclusões foram levantadas a partir das visualizações dos manipuláveis. Marcos, então, finaliza este momento com a frase “Raciocínio lógico!”, parecendo indicar que sua conclusão advinha da observação dos manipuláveis que o grupo estava maneando.

Ao ser questionado pela professora, se conseguiram relacionar as fichas e as figuras de papel e como foi feita a relação, Marcos relata o procedimento utilizado:

39	Nilda: É o que Marcos? Descobriu aí alguma coisa?	
40	Marcos: Descobrimos qualquer um, agora falta achar o perímetro.	
41	Nilda: Você descobriu quem é quem?	
42	Marcos: É.	
43	Nilda: Como foi que você descobriu?	
44	Marcos: Oh... Oh... Qual o maior? Qual o maior lado da figura geométrica? A gente pegou. Qual o maior da ficha? O maior da ficha era quanto? (procura a ficha que indica a maior medida do lado). O triângulo que era 20 centímetros (mostra a professora). Ele tem o maior lado e o maior lado da ficha é 20 cm. E o menor que é esse (aponta o recorte que representa o hexágono) ficou 10.	(As ações relacionadas a essa fala, estão descritas juntamente com a fala, pois precisavam ser localizadas no momento em que foram realizadas)

45	Nilda: Então, você separou olhando o lado?	
46	Marcos: Foi.	
47	Nilda: Então você comparou as figuras?	
48	Marcos: Comparamos.	

Após o relato do procedimento, na fala 44, a professora sintetiza-os dizendo “Então você separou olhando o lado?”, ela percebe que os alunos concluíram aquela parte da tarefa, a partir de observações e manipulações. Marcos concorda com a professora, “Foi!”, fala 46. O uso da visualização para levantar conclusões é legitimado pela professora e pelos alunos nesta tarefa. Eles utilizam o manipulável para justificar seus discursos.

Além disso, é possível identificar os alunos explicando seus pontos de vista com os manipuláveis, como nas falas 99 e 100 a seguir:

99	Marcos: Porque a gente não usa base vezes altura sobre 2? Porque a gente não sabe a base?	
100	Let: O triângulo equilátero tem todos os lados iguais, 20, 20, 20. Não tem base, só essa parte aqui de baixo.	Aponta no manipulável cada um de seus lados e depois indica o lado paralelo ao solo.

Os alunos, mesmo de posse da ficha, em que constava o valor da área do triângulo equilátero de lado 20, quiseram determiná-lo. Para isso, no entanto, não era possível aplicar de forma imediata a fórmula para o cálculo da área do triângulo, a que se refere Marcos, na fala 99. Porém, o aluno não estava entendendo o porquê de não poder aplicá-la e indagou se isto se devia ao fato de não saber o valor da base daquele triângulo (discurso 99). Para explicar que este não era o motivo, pois poderia considerar qualquer um dos lados, já que todos possuíam a mesma medida, Let recorre ao manipulável, como podemos observar no discurso e ação 100. Ela aponta para cada um dos lados do manipulável, indicando a Marcos que todos estes são iguais e conclui dizendo “Não tem base, só essa parte aqui de baixo”. E eles continuam tentando calcular a medida da área daquele triângulo.

Como é possível observar nestes trechos de dados, os alunos manuseiam o material, indicam algumas propriedades nestes para fazer a justificação de seus discursos. Muitas vezes, para falar de suas idéias, durante a resolução da tarefa, eles recorrem aos recortes para explicá-las e argumentar para os outros colegas e para a professora.

DISCUSSÃO

Através da análise de uma aula de matemática, este artigo buscou gerar um entendimento sobre como os discursos dos alunos são produzidos em função do uso dos manipuláveis e da prática pedagógica que eles participam. A unidade de análise que tomamos aqui foi o aluno-agindo-com-o-material-manipulável-na-sala-de-aula-de-matemática, entendendo que os meios de mediação e a ação estão mutualmente

imbricadas (WERTSCH, 1991, 1998) e que as ações são parte de uma prática constituída (WATSON; WINBOURNE, 2008). A partir da análise dos dados, foi possível identificar a produção discursiva dos alunos em termos de duas características: (a) nomeando os objetos matemáticos como fisicamente materiais e (b) produzindo justificações a partir da visualização e manejo dos manipuláveis.

Como foi discutido no início deste artigo, partimos da compreensão de que os objetos matemáticos não existem fisicamente no mundo, sendo aqui entendidos como construções discursivas (SFARD, 2008) cujas representações físicas podem ser vistas como mediadores visuais. É possível que o propósito da professora Nilda, ao utilizar os manipuláveis, tenha envolvido a preocupação com a visualização matemática por parte dos alunos, permitindo uma “ponte” entre os objetos matemáticos e suas representações. A análise dos dados sugerem, entretanto, que esta distinção se diluiu. Ao falar dos objetos matemáticos representados pelos manipuláveis, eles referiam-se a estes últimos como se fossem os primeiros. Para o propósito da atividade escolar e o nível escolar, hipotetizamos que a professora julgou, como irrelevante, naquele momento, a distinção entre objeto matemático e representação, o que nos parece legítimo do ponto de vista pedagógico. A prática pedagógica desenvolvida pela professora legitimava a diluição da distinção entre objetos matemáticos e representações.

Desse modo, os manipuláveis não se constituem apenas em mediadores visuais, como definimos anteriormente, mas, nas mãos dos alunos e professores, também podem se converter nos próprios objetos matemáticos para os quais foram desenvolvidos para servir de representação. Neste caso, uma investigação na aula de matemática parece análogo às experimentações realizadas no ensino de ciências (MORTIMER; SCOTT, 2002), onde as observações empíricas subsidiam o enunciado de proposições e leis científicas. A materialidade física atribuída aos objetos matemáticos podem, por assim dizer, configurar uma experiência matemática de natureza empírica aos alunos. Seus discursos sobre seus objetos matemáticos passam a possuir referência física, tal como ocorre nas ciências naturais. Podemos, assim, chamar os cenários para investigação que envolvem materiais manipulativos como **ambientes investigativo-experimentais**.

Com a introdução dessa expressão, queremos enfatizar que a investigação em torno de ideias matemáticas acabam por se pautar na observação direta das características das representações físicas de objetos matemáticos. Do ponto de vista de geração de um cenário para investigação, isto pode ser apropriado para engajar os alunos na exploração de ideias matemáticas. Os dados analisados neste artigo sugerem que os alunos observaram as propriedades dos manipuláveis, geraram proposições e argumentaram sobre sua plausibilidade. Como ilustração, referimo-nos ao trecho de falas 29-31, citado anteriormente, em que Let e Rafinha concluem sobre a comparação das medidas dos lados do pentágono e quadrado regulares a partir da observação dos manipuláveis. O mesmo se nota no trecho 99-100 em que Let manipula a recorte de papel que representa um triângulo equilátero para falar de suas propriedades. Parece-nos possível dizer que a materialidade física dada ao objeto matemático permite que os alunos produzam algumas justificações para suas observações.

Porém, como temos sublinhado, não podemos esperar o engajamento dos alunos na produção de justificações apenas em decorrência da apropriação de manipuláveis. Tomando em conta as observações no período de coleta de dados, pareceu-nos que a professora Nilda tinha uma preocupação constante em envolver os alunos na aula, através da colocação de questões para os alunos, o que pode ser notado nos trechos que trouxemos para análise neste artigo. Neles, as questões da professora requeriam que os alunos falassem a partir do que observavam no manejo dos manipuláveis. Podemos notar que, de alguma maneira, as ações dos alunos e da professora, bem como aquelas desenvolvidas anteriormente naquele contexto, estavam sincronizadas. Parece existir ali alguma mutualidade entre as ações, denotando uma prática compartilhada (WINBOURNE; WATSON, 2008). É possível, então, hipotetizar que os alunos, por assim dizer, aceitaram o convite para produzir justificações a partir dos manipuláveis porque encontram legitimidade nesta ação face ao contexto mais amplo das práticas desenvolvidas nas aulas de matemática.

De um ponto de vista pedagógico, a materialidade física atribuída aos objetos matemáticos através dos manipuláveis pode ser apropriada para estabelecer cenários para investigação. Entretanto, depende do modo como ele é legitimado na sala de aula. Neste ponto, lembramos do estudo de Moyer (2001), em que a presença dos manipuláveis não deflagrou um ambiente investigativo-experimetal. É possível, portanto, estabelecer um *continuum* entre a prática compartilhada pelos agentes e a apropriação que estes fazem dos manipuláveis.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao analisar uma aula de matemática em que os alunos utilizam materiais manipuláveis, buscamos compreender como estes materiais são utilizados na produção do discurso dos alunos nesta prática pedagógica. Foi possível observar um cenário de investigação em que os alunos atribuem materialidade aos objetos matemáticos, além de fazer justificações utilizando os manipuláveis. Estas duas características podem instituir o que chamamos de um ambiente investigativo-experimental. A materialidade física dada aos objetos matemáticos pode ser propícia para engajar os alunos na investigação e exploração de ideias matemáticas, pois permitem que os alunos observem, comparem e manejem os manipuláveis para levantarem proposições e/ou conjecturas.

Porém, o envolvimento dos alunos na produção de justificações não ocorre apenas por conta da materialidade dada aos objetos matemáticos através dos manipuláveis. Como discutido por AlrØ e Skovsmose (2002), é necessário que o padrão de interação entre alunos e professor seja pautado na discussão e na escuta atenta. Portanto, o uso de materiais manipuláveis deve ser acompanhado de certos padrões de interação para que se constitua um ambiente investigativo-experimental. Uma das estratégias possíveis é a proposição de questões aos alunos, pelo professor, a partir do manejo dos manipuláveis, como estas que seguem: “O que se vê na figura?”, “O que se pode dizer?”, etc.

A despeito da possibilidade de envolver os alunos na exploração de ideias matemáticas, um ambiente investigativo-experimental pode também trazer dificuldades conceituais. Apesar de ser possível encontrar algumas relações entre os objetos matemáticos e suas representações físicas, não se pode esperar uma total correspondência, devido às suas naturezas ontologicamente diferentes. Estudos futuros precisam se debruçar sobre os limites dos manipuláveis para a produção de um discurso matemático legítimo.

REFERÊNCIAS

- ALRØ, H.; SKOVSMOSE, O. *Dialogue and learning in mathematics education: intention, reflection, critique*. Dordrecht: Kluwer, 2002.
- ALVEZ-MAZZOTTI, A. J.; GEWANDSZNAJDER, F. *O Método nas Ciências Naturais e Sociais: pesquisa quantitativa e qualitativa*. 2ed. São Paulo: Pioneira, 1999.
- BERTINI, L.F.; PASSOS, C. L. B.; *Compartilhando conhecimentos no ensino de matemática nas séries iniciais: uma professora no contexto de tarefas investigativas*. 32ª Reunião Anual da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação, Anais da ANPED, Caxambu, 2009.
- BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. *Investigação Qualitativa em Educação*. Td. ALVAREZ, M. J; SANTOS, S. B. BAPTISTA, T. M. Portugal, Porto Codex: Porto Editora, 1994.
- CHARMAZ, K. *Constructing grounded theory: a practical guide through qualitative analysis*. London: Sage, 2006.
- DENZIN, N.K.; LINCOLN. Introduction. In: DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y. S. *Handbook of qualitative research*. Thousand Oaks: Sage, p. 1 – 29, 2005.
- FIorentini, D.; Miorim, M.A. *Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no ensino de matemática*. Boletim da SBEM, n. 7, v.4, 1990.
- GODINO, J. D.; BATANERO, C. Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, n. 3, v. 14, p. 325 – 355, 1994.
- KAMII, C.; LEWIS, B.A.; KIRKLAND, L. Manipulatives: When are they useful? *Journal of Mathematics Behavior*, n. 20, p. 21 – 31, 2001.
- LAMBERTY, K.K.; KOLODNER, J. L. Exploring Digital Quilt Design Using Manipulatives as a Math Learning Tool. In P. Bell, R. Stevens, & T. Satwicz (Eds.), *Keeping Learning Complex: The proceedings of the Fifth International Conference of the Learning Sciences (ICLS)*. Mahwah: Erlbaum, p. 552 – 553, 2002.
- LORENZATO, S. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: LORENZATO, S.; (Org.). *O laboratório de ensino de matemática na formação de professores*. São Paulo: Autores Associados, p. 3– 38, 2006.
- MATOS, J.M.; SERRAZINA, M.L. *Didáctica da matemática*. Lisboa: Universidade Aberta, 1996.
- MORTIMER, E. F.; PHIL S. Atividade Discursiva nas Salas de Aula de Ciências: Uma Ferramenta Sociocultural para Analisar e Planejar o Ensino. *Investigações em Ensino de Ciências*. *Revista Investigativa sobre o Ensino de Ciências*, v.7, n3, p. 283-306, 2002.
- PAIS, L.C. *Uma análise do significado da utilização de recursos didáticos no ensino da*

geometria. Disponível em: <www.anped.org.br/23/textos/19/1919t.pdf>. Acesso em 17 de fevereiro de 2010.

RADFORD, L. et al. *On embodiment, artifacts, and signs: a semiotic-cultural perspective on mathematical thinking*. PME 29. 2005

SANTANA, E. *Manipulative material and representational material*. Morelia, Mexico PME 32, vol.4, p. 225 – 232, 2008.

SANTOS, M. P.; MATOS, J. F. The role of artefacts in mathematical thinking: a situated learning perspectives. In: WATSON, A.; WINBOURNE, P. (Org). *New directions for situated cognition in mathematics education*. New York: Springer, p. 179-204, 2008.

SFARD, A. *Thinking as communicating: human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge: University Press, 2008.

WATSON, A.; WINBOURNE, P. Introduction. In: WATSON, A.; WINBOURNE, P. (Ed). *New directions for situated cognition in mathematics education*. New York: Springer, p. 1-12. 2008.

WERTSCH J. V. *Mind as action*. New York: Oxford University Press, 1998.

WERTSCH, J. V. *Voices of the Mind: a sociocultural approach to mediated action*. Cambridge: Harvard University. 1991.

Recebido em: set. 2011

Aceito em: nov. 2011

